УДК 512.6 DOI 10.17223/2226308X/10/3

О ПОНИЖЕНИИ ПОРЯДКА ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К. Л. Геут, С. С. Титов

Рассматриваются соотношения, задающие нелинейные рекурсии первого порядка для общего линейного рекуррентного соотношения второго порядка с постоянными коэффициентами. Доказана сводимость линейного рекуррентного соотношения второго порядка с постоянными коэффициентами к нетривиальному однородному соотношению первого порядка при различности корней и равенстве единице некоторого произведения их целых степеней.

Ключевые слова: *линейное рекуррентное соотношение, нелинейное рекуррентное соотношение, числа Фибоначчи, уравнения в конечных разностях.*

Задача понижения порядка линейных рекуррентных уравнений с постоянными коэффициентами поставлена в работе [1] в общем виде. Там же приведено решение на примере чисел Фибоначчи.

В общем виде эта задача ставится [2, 3] для однородного уравнения N-го порядка

$$f_{n+N} + a_{N-1}f_{n+N-1} + \ldots + a_0 f_n = 0 \tag{1}$$

относительно неизвестной последовательности f_n с известными постоянными коэффициентами $a_0, \ldots, a_{N-1}$ как задача нахождения такой зависимости F, возможно нелинейной, что для любого решения f существует такая постоянная C, для которой выполняется тождество

$$F(f_n, \ldots, f_{n+N-1}) = C \tag{2}$$

для любого целого неотрицательного n [2, 3]. Эта задача аналогична проблеме поиска промежуточного интеграла для дифференциального уравнения второго порядка [4]. В [5, 6] изучены некоторые частные случаи.

Пусть имеется однородное соотношение m-й степени

$$\begin{gathered} F(f_n, \ldots, f_{n+N-1}) = \\ = a_m f_{n+1}^m + a_{m-1} f_{n+1}^{m-1} f_n^1 + a_{m-2} f_{n+1}^{m-2} f_n^2 + \ldots + a_1 f_{n+1}^1 f_n^{m-1} + a_0 f_n^m = C. \end{gathered} \tag{3}$$

При $N = 2$ при помощи корней λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, характеристического уравнения для (1) находим последовательно

$$\begin{gathered} f_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = u + v, \\ f_{n+1} = C_1\lambda_1^{n+1} + C_2\lambda_2^{n+1} = \lambda_1 u + \lambda_2 v, \end{gathered}$$

где C_1, C_2 — константы и введены обозначения $u = C_1\lambda_1^n$, $v = C_2\lambda_2^n$.

В случае полиномиального соотношения (2), (3) при $\deg F = m$ в однородном случае находим $F(f_n, f_{n+1}) = \sum\limits_{s=0}^{m} u^s v^{m-s} A_s$, где постоянные коэффициенты A равны

$$A_s = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \binom{m-k}{s-j} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j}$$

(считаем биномиальные коэффициенты $\dbinom{p}{q} = 0$ при $q < 0$ или $q > p$).

При $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$F(f_n, f_{n+1}) = \sum_{s=0}^{m} (C_1\lambda_1^n)^s (C_2\lambda_2^n)^{m-s} A_s = \sum_{s=0}^{m} (C_1^s C_2^{m-s} A_s)\lambda_1^{ns}\lambda_2^{n(m-s)} = C = \mathrm{const}\,. \qquad (4)$$

Если $C_1 = C_2 = 0$, то $C = 0$ и равенство (4) справедливо для любого n.

Если $C_1 \neq 0 = C_2$, то $C = 0$ и (4) сводится к равенству $C_1^m A_m \lambda_1^{mn} = C = \mathrm{const}$, из которого следует, что либо $A_m = 0$ (и тогда $C = 0$), либо $A_m \neq 0$ и $(\lambda_1^m)^n = 1$, т. е. $\lambda_1^m = 1$.

Аналогично, если $C_1 = 0 \neq C_2$, то при $A_m \neq 0$ имеем $(\lambda_2^m)^n = 1$, т. е. $\lambda_2^m = 1$.

Если $C_1 \neq 0 \neq C_2$, то $F(f_{n+1}, f_{n+2}) - F(f_n, f_{n+1}) = 0$, и если $A_s = 0$ не для всех $s \in \{0, 1, \ldots, m\}$, то, рассматривая эти последовательные соотношения как однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $(C_1^s C_2^{m-s} A_s)$, приходим к равенству нулю определителя матрицы этой системы, т. е. матрицы с элементами $\lambda_1^{(n+1)s}\lambda_2^{(n+1)(m-s)} - \lambda_1^{ns}\lambda_2^{n(m-s)} = (\lambda_1^s\lambda_2^{m-s} - 1)\lambda_1^{ns}\lambda_2^{n(m-s)}$ для последовательных значений n, составленной из столбцов для значений s, соответствующих неравенствам $A_s \neq 0$.

Запишем равенство $A_s = 0$ для всех $s = 0, 1, \ldots, m$ как систему линейных однородных уравнений относительно $a_0, a_1, \ldots, a_m$ и вычислим определитель этой системы. Оказывается, он равен произведению $(\mu - 1)^s$ и λ_1^t, где $s, t \in \mathbb{N}$, $\mu = \lambda_2/\lambda_1$. Следовательно, определитель может быть (при $\lambda_1 \neq 0$) равным нулю только при $\mu = 1$, т. е. при $\lambda_1 = \lambda_2$. Таким образом, доказана

Теорема 1. Если корни характеристического уравнения линейного рекуррентного соотношения второго порядка с постоянными коэффициентами различны, то это соотношение допускает нетривиальное однородное соотношение первого порядка тогда и только тогда, когда произведение некоторых целых степеней этих корней равно единице.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ушаков В. Н.* Египетские треугольники и числа Фибоначчи // Империя математики. 2001. № 11. С. 21–60.
2. *Марков А. А.* Исчисление конечных разностей. Одесса: Типография Акционерного Южно-Русского Общества Печатного Дела, 1910.
3. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
4. *Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
5. *Геут К. Л., Титов С. С.* О задаче построения нелинейных рекуррентных последовательностей // IV Междисциплинарная молодежная научная конференция УрО РАН «Информационная школа ученого». Екатеринбург, 2013. С. 203–208.
6. *Геут К. Л., Титов С. С.* О построении нелинейных рекуррентных соотношений // Проблемы теоретической и прикладной математики и ее приложений. Труды 46-й Всерос. молодежной конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2015. С. 3–6.