

ЛИТЕРАТУРА

1. Wielandt H. Unzerlegbare nicht negative Matrizen // Math. Zeitschr. 1950. V. 52. P. 642–648.
2. Jin M., Lee S. G., and Seol H. G. Exponents of r -regular primitive matrices // Inform. Center Math. Sciences. 2003. V. 6. No. 2. P. 51–57.
3. Bueno M. I. and Furtado S. On the exponent of r -regular primitive matrices // ELA. Electronic J. Linear Algebra. 2008. V. 17. P. 28–47.
4. Kim B., Song B., and Hwang W. Nonnegative primitive matrices with exponent 2 // Linear Algebra and its Applications. 2005. No. 407. P. 162–168.
5. Meringer M. Fast generation of regular graphs and construction of cages // J. Graph Theory. 1999. No. 30. P. 137–146.
6. Сухов С. А. DSR Generator. Свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2016610073. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 11 января 2016 г.
7. Костин С. В. Об использовании задач по теории графов для интеллектуального развития учащихся // Математика в образовании: сб. статей. Вып. 10 / под ред. И. С. Емельяновой. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та. 2014. С. 68–74.

УДК 519.17

DOI 10.17223/2226308X/10/52

О ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ОЦЕНКАХ ЧИСЛА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДУГ МИНИМАЛЬНОГО РЁБЕРНОГО 1-РАСШИРЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ЦЕПИ

М. Б. Абросимов, О. В. Моденова

Исследуются верхняя и нижняя оценки числа дополнительных дуг $ec(P_n)$ минимального рёберного 1-расширения ориентации цепи. Если P_n имеет концы разного типа и отлична от гамильтоновой и от ориентации, состоящей из чередующихся источников и стоков, то $\lceil n/6 \rceil + 1 \leq ec(P_n) \leq n + 1$. Если P_n имеет концы одинакового типа, то $\lceil n/4 \rceil + 1 \leq ec(P_n) \leq n + 1$.

Ключевые слова: минимальное рёберное 1-расширение, ориентация цепи, отказоустойчивость.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k -расширением* (МВ- k Р) n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

- 1) граф G^* является вершинным k -расширением графа G , то есть G вкладывается в каждый подграф графа G^* , получающийся удалением любых его k вершин;
- 2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Понятие минимального вершинного k -расширения появилось в [1] как модель для исследования отказоустойчивости элементов дискретных систем. Позднее в работе [2] была введена модель для исследования отказов связей между элементами.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным рёберным k -расширением* (МР- k Р) n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

- 1) граф G^* является рёберным k -расширением графа G , то есть G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k рёбер (дуг);
- 2) граф G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

В [1] доказано, что МВ-1Р n -вершинной цепи является $(n + 1)$ -вершинный цикл, в [2] доказано, что МР-1Р n -вершинной цепи является n -вершинный цикл. Легко пока-

зять [3], что эти расширения являются единственными с точностью до изоморфизма. Задача поиска минимального вершинного или рёберного k -расширения для произвольного графа является вычислительно сложной [4], и в общем виде решение удалось получить лишь для некоторых классов графов. Обзор основных результатов можно найти в [3].

Рассмотрим ориентации цепи. Очевидно, что гамильтонова цепь имеет единственное с точностью до изоморфизма МР-1Р — контур с тем же числом вершин. Другой интересной ориентацией является орцепь, состоящая только из источников и стоков, МР-1Р которой при чётном числе вершин является ориентация цикла, состоящая только из источников и стоков.

Теорема 1. Среди всех ориентаций цепей при чётном числе вершин МР-1Р с одной дополнительной дугой имеют только гамильтоновы цепи и цепи, состоящие только из источников и стоков. Среди всех ориентаций цепей при нечётном числе вершин только гамильтоновы цепи имеют МР-1Р с одной дополнительной дугой.

Теорема 2. Не существует ориентаций цепей с числом вершин $n > 5$, таких, что МР-1Р имеет две дополнительных дуги.

Общих схем, которые бы позволили построить МР-1Р для каких-либо ориентаций цепей P_n , отличных от гамильтоновой и цепи, состоящей из стоков и источников, пока получить не удаётся. В связи с этим большой интерес представляет оценка числа дополнительных дуг МР-1Р. Для МВ-1Р ориентаций цепи удалось получить некоторые такие оценки [5, 6]. В данной работе исследуется случай рёберных расширений. Обозначим число дополнительных дуг МР-1Р графа G через $ec(G)$. Тогда оценка из последней теоремы может быть записана следующим образом:

$$\forall n > 5 \quad (3 \leq ec(P_n)).$$

Полученный результат удалось улучшить. Очевидно, что концевая вершина ориентации цепи может быть или источником, или стоком. Будем говорить, что концевые вершины цепи одного типа, если они одновременно являются источниками или стоками. В противном случае будем говорить, что концевые вершины имеют разный тип.

Рёберное 1-расширение графа G называется *неприводимым*, если никакая его собственная часть не является рёберным 1-расширением графа G . Заметим достаточно очевидный факт, который можно использовать для получения верхней оценки числа дополнительных дуг:

Теорема 3. Неориентированный цикл C_n при $n > 2$ является неприводимым рёберным 1-расширением для любой ориентации цепи P_n , отличной от гамильтоновой и от ориентации, состоящей из источников и стоков при чётном числе вершин.

В неориентированном цикле подразумевается, что ребро представляет собой пару встречных дуг. Из теоремы получается оценка

$$ec(P_n) \leq n + 1.$$

Теорема 4. Число $ec(P_n)$ дополнительных дуг МР-1Р ориентации цепи P_n , имеющей концы разного типа и отличной от гамильтоновой и от ориентации, состоящей из чередующихся источников и стоков, удовлетворяет следующим условиям:

$$\left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil + 1 \leq ec(P_n) \leq n + 1.$$

Теорема 5. Число дополнительных дуг МР-1Р ориентации цепи P_n , имеющей концы одинакового типа, удовлетворяет следующим условиям:

$$\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1 \leq ec(P_n) \leq n + 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
2. Harary F. and Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
3. Абросимов М. Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2012. 192 с.
4. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. Т. 88. Вып. 5. С. 643–650.
5. Абросимов М. Б., Моденова О. В. Характеризация орграфов с малым числом дополнительных дуг минимального вершинного 1-расширения // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2013. Т. 13. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 2. Ч. 2. С. 3–9.
6. Абросимов М. Б., Моденова О. В. Характеризация орграфов с тремя дополнительными дугами в минимальном вершинном 1-расширении // Прикладная дискретная математика. 2013. № 3. С. 68–75.

УДК 519.17

DOI 10.17223/2226308X/10/53

О ГЕНЕРАЦИИ НЕИЗОМОРФНЫХ ВЕРШИННЫХ k -РАСКРАСОК

М. Б. Абросимов, П. В. Разумовский

Исследуется генерация всех неизоморфных вершинных и рёберных k -раскрасок заданного графа. Предлагается алгоритм решения задачи построения неизоморфных вершинных k -раскрасок методом Риды — Фараджеева без проверки на изоморфизм. Задача построения рёберных k -раскрасок сводится к задаче построения вершинных k -раскрасок.

Ключевые слова: *граф, раскраска, изоморфизм, вершинная раскраска, рёберная раскраска.*

Введение

Определение 1. Пусть $G = (V, \alpha)$ — граф, $k \in \mathbb{N}$. Функция вида $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ называется *вершинной k -раскраской* графа G , $f(v)$, $v \in V$, — цветом вершины v . При этом граф G называется *графом с цветными вершинами*, или *цветным графом*. Для таких графов вводится обозначение $G = (V, \alpha, f)$.

Аналогичным образом определяется рёберная k -раскраска, а граф называется *графом с цветными рёбрами*.

Определение 2. Вершинная k -раскраска называется *правильной*, а граф называется *k -раскрашиваемым*, если вершины графа можно раскрасить в k цветов так, что смежные вершины будут раскрашены в разные цвета. Аналогичным образом определяется правильная *рёберная k -раскраска*. В этом случае граф называется *k -рёберно раскрашиваемым*.

Обычно, когда встречаются задачи, связанные с раскраской графов, имеется в виду именно правильная раскраска графа. Однако встречаются и задачи, в которых вер-