

УДК 532.5.032; 536.22
DOI 10.17223/19988621/49/11

А.В. Шваб, Н.И. Гичёва

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОЙ И ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ВИХРЕВОЙ КАМЕРЕ ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

Исследуется влияние естественной конвекции на характер течения и теплообмен в вихревой камере химического реактора. С использованием двух подходов реализовано численное моделирование течения, получены поля линий тока, скоростей и температуры с учётом и без учёта свободной конвекции. Достоверность расчётов проверена сопоставлением результатов различных методов и сравнением с аналитическими результатами.

Ключевые слова: гидродинамика, теплообмен, вихревая камера, свободная конвекция, химический реактор.

Развитие промышленности требует повышения качества материалов. Это обуславливает интерес науки к тугоплавким металлам, имеющим очень высокую износостойкость. Одним из самых востребованных в различных областях промышленности тугоплавких металлов является вольфрам. Однако получение вольфрама и придание изделиям из него нужной формы весьма затруднительно. Поэтому существует необходимость разработки новых способов выделения чистого вольфрама из его соединений. Перспективным является метод получения вольфрама путем осаждения из парогазовой фазы с помощью восстановления его фторидов или хлоридов. Процесс осаждения вольфрама из смеси гексафторида вольфрама и водорода протекает по реакции



которая начинает идти при температурах порядка 300 °С и позволяет получать осадки любой толщины.

В данной работе приведен численный расчёт процессов гидродинамики и теплопереноса с учётом естественной конвекции в химическом реакторе, имеющем цилиндрическую форму (рис. 1, а). Впуск газов, имеющих температуру T_0 , в реактор осуществляется через цилиндрическую трубу в центре со скоростью U_0 , а выпуск – через кольцевой канал. Верхняя и нижняя стенки сосуда приведены во вращательное движение с угловой скоростью ω . Нижняя стенка имеет температуру T_1 .

Течение и теплоперенос газа в вихревой камере могут быть описаны системой уравнений, включающей уравнения Навье – Стокса, уравнение неразрывности, и уравнение переноса температуры. В безразмерной форме в цилиндрической системе координат для осесимметричного случая система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial(u_r^2)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{u_\varphi^2}{r} - \frac{u_r^2}{r}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial(u_r u_z)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z^2)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) - \frac{u_r u_z}{r} + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \theta; \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial(u_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z u_\varphi)}{\partial z} &= -\frac{2u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u_r \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z \theta)}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) - \frac{u_r \theta}{r}.$$

В качестве масштабов обезразмеривания для получения системы (2) взяты радиус вихревой камеры, входная линейная скорость, а также максимальный перепад температур. Характер гидродинамических и тепловых процессов в данной модели зависит от значений критериев Рейнольдса $\text{Re} = \rho U R / \mu$, Прандтля $\text{Pr} = c_p \mu / \lambda$ и Грасгофа $\text{Gr} = g \beta (T_1 - T_0) \rho R^3 / \mu^2$.

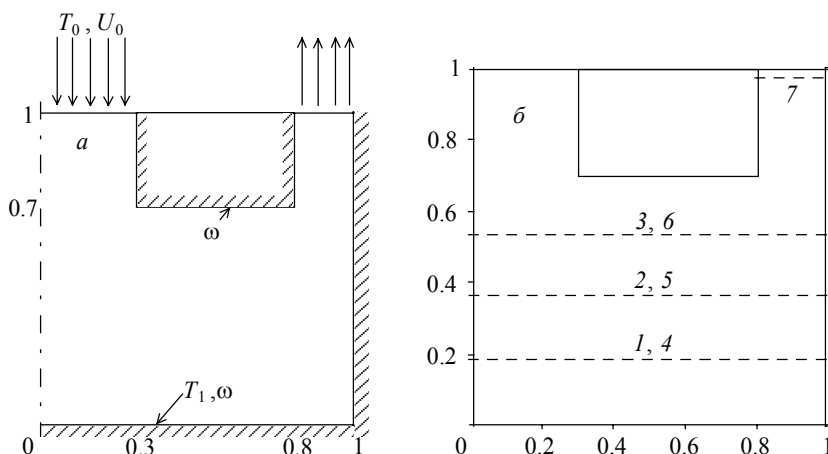


Рис. 1. Вихревая камера химического реактора:
расчётная область и граничные условия

Fig. 1. Vortex chamber of the chemical reactor:
computational domain and boundary conditions

Численное моделирование процессов в вихревой камере проводится двумя способами: в переменных «вихрь – функция тока» и в физических переменных «скорость – давление».

Для решения в переменных «вихрь – функция тока» система (2) тождественно преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(u_r \Omega)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z \Omega)}{\partial z} = \frac{2u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{\Omega}{r^2} \right) - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \frac{\partial \theta}{\partial r};$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - r \Omega;$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial(u_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z u_\varphi)}{\partial z} = -\frac{2u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right);$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u_r \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z \theta)}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) - \frac{u_r \theta}{r}.$$

Рассматриваемая задача стационарна, однако её решение проводится эволюционным методом до установления по времени. Поэтому уравнения приводятся в нестационарном виде. Время в уравнениях фиктивно и, по сути, заменяет значение итерационного параметра. Для решения системы (3) с вышеприведёнными граничными условиями используется неявная обобщённая схема переменных направлений в Δ -форме [1]. Она абсолютно устойчива и имеет второй порядок точности по времени. Данный двумерный метод основан на введении промежуточного временного слоя с целью построения многомерной неявной схемы, в которой требуется обращение только трёхдиагональной матрицы. Рассмотрим применение обобщённой схемы переменных направлений на примере уравнения для переноса тепла. Представим значение температуры на новом временном слое как суперпозицию старого значения и малого изменения $\Delta\theta$:

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta\theta. \quad (4)$$

Уравнение переноса для $\Delta\theta$ запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u_r \Delta\theta)}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u_z \Delta\theta)}{\partial z} - \frac{1}{2 \text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{2 \text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial z^2} = \\ = \frac{\rho u_r \theta}{r} + \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta^n}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta^n}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Проведём всё возмущение вначале в направлении r , а затем – в направлении z :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\theta^*}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u_r \Delta\theta^*)}{\partial r} - \frac{1}{2 \text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 \Delta\theta^*}{\partial r^2} = \\ = - \frac{\partial(u_r \theta^n)}{\partial r} - \frac{\partial(u_z \theta^n)}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta^n}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta^n}{\partial r} \right); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\Delta\theta^{**}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u_z \Delta\theta^{**})}{\partial z} - \frac{1}{2 \text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 \Delta\theta^{**}}{\partial z^2} = \frac{\Delta\theta^*}{\Delta t}. \quad (7)$$

Таким образом, получаем

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta\theta^{**}. \quad (8)$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений решается методом прогонки.

Метод расщепления [2] применяется к уравнениям, записанным в физических переменных (2). В нём вместо уравнения неразрывности решается уравнение Пуассона для давления. Это делается для того, чтобы выделить влияние давления в одно уравнение. Уравнения для скорости представляются в следующем виде:

$$\frac{\tilde{v}^{n+1} - \tilde{v}^n}{\Delta t} + K - D = -\nabla p^n - \nabla(\delta p). \quad (9)$$

Здесь K и D – слагаемые, определяющие соответственно конвекцию и диффузию, δp – разность между значениями давления на n -м и $(n+1)$ -м временных слоях.

Прибавим и отнимем в числителе промежуточное сеточное значение скорости $\tilde{\tilde{v}}$:

$$\frac{\tilde{v}^{n+1} - \tilde{v}^n + \tilde{\tilde{v}} - \tilde{\tilde{v}}}{\Delta t} + K - D = -\nabla p^n - \nabla(\delta p). \quad (10)$$

Разделим слагаемые в выражении (10) на два уравнения, содержащие соответст-

венно значения на n -м слое и промежуточные значения. Будем иметь

$$\frac{\tilde{\bar{v}} - \bar{v}^n}{\Delta t} + \tilde{K} - \tilde{D} = -\nabla p^n; \quad (11)$$

$$\frac{\bar{v}^{n+1} - \tilde{\bar{v}}}{\Delta t} = -\nabla(\delta p). \quad (12)$$

Из уравнения (11) можно найти промежуточное сеточное значение скорости.

Подействуем оператором градиент на выражение (12):

$$\frac{\nabla \bar{v}^{n+1} - \nabla \tilde{\bar{v}}^n}{\Delta t} = -\nabla^2(\delta p). \quad (13)$$

В силу выполнения уравнения неразрывности выражение сведётся к виду

$$\nabla^2(\delta p) = \frac{\nabla \tilde{\bar{v}}}{\Delta t}. \quad (14)$$

Получаем уравнение Пуассона для поправки к давлению. Метод его решения аналогичен используемому для уравнений переноса. Для поправки к давлению δp при численном решении на всех границах задаются граничные условия второго рода (Неймана). Исходя из представленных рассуждений, выражения для значений скорости и давления на новом временном слое будут определяться уравнениями

$$\nabla p^{n+1} = \nabla p^n + \nabla(\delta p); \quad (15)$$

$$\nabla \bar{v}^{n+1} = \tilde{\bar{v}} - \Delta t \cdot \nabla(\delta p). \quad (16)$$

Для аппроксимации конвективных и диффузионных слагаемых применяется экспоненциальная схема [2]. Решение реализуется на разнесённых сетках [3].

Для единственности решения задаются следующие граничные условия.

На входе:

$$\psi(r) = \frac{r^2}{2}, \quad \Omega = 0, \quad u_r = 0, \quad u_z = -1, \quad u_\varphi = 0, \quad \theta = 0;$$

на оси симметрии:

$$\psi = 0, \quad \Omega = 0, \quad u_r = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0;$$

на нижней стенке камеры:

$$\psi = 0, \quad \Omega = \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{r\Delta n^2}, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad u_\varphi = R\omega \cdot r, \quad \theta = 1,$$

где $R\omega = R \cdot \omega / U$ – обратное число Россби. На правой стенке:

$$\psi = 0, \quad \Omega = \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{r\Delta n^2}, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0;$$

на верхней стенке камеры:

$$\psi = \frac{r_1^2}{2}, \quad \Omega = \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{r\Delta n^2}, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad u_\varphi = R\omega \cdot r, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0;$$

на внешней стенке входного и внутренней стенке выходного каналов:

$$\psi = \frac{r_1^2}{2}, \quad \Omega = \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{r\Delta n^2}, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0;$$

на выходе для всех функций:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

Достоверность результатов была проверена тремя способами: сравнением результатов разных методов решений, сопоставлением с аналитическими результатами и исследованием на сеточную сходимость.

Ниже сопоставлены графики распределений характеристик потока в различных сечениях, полученные двумя методами решения (рис. 2). Цифры, обозначающие кривые, соответствуют сечениям, в которых построены распределения (см. рис. 1, б). Сплошной линией обозначены результаты расчётов в переменных «скорость – давление», точками – распределения полученные вычислениями в переменных «вихрь – функция тока». Рис. 2, а содержит сечения аксиальной составляющей скорости, 2, б – окружной составляющей, 2, в – температуры. Параметры потока, при которых проводилось данное сопоставление, следующие: $Re = 3$, $Pr = 1$, $R\omega = 0.5$, $Gr = 0$. Рисунок 2 демонстрирует хорошее совпадение результатов, полученных различными методами.

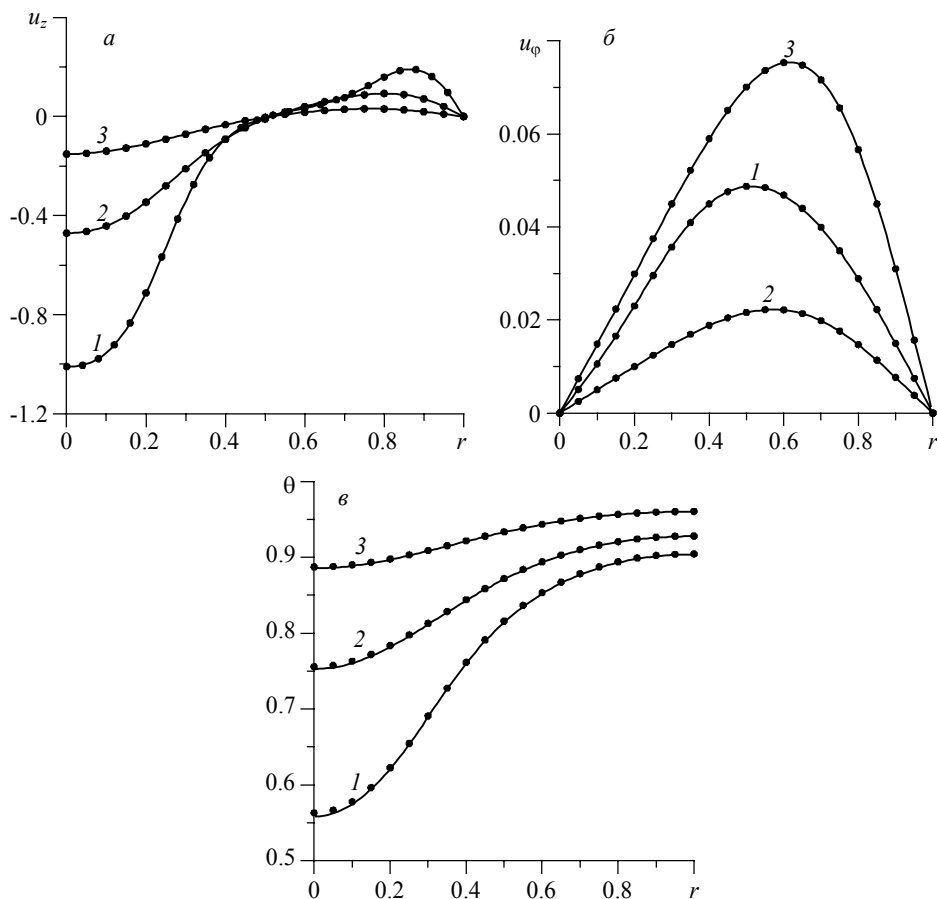


Рис. 2. Сопоставление результатов расчётов, полученных разными методами
Fig. 2. Comparison of the calculation results obtained by different methods

На выходе из реактора при малых числах Рейнольдса можно провести тестовое исследование на сравнение результатов с аналитической зависимостью для установившегося течения жидкости в кольцевом канале [4]. Течение описывается формулой

$$U_z = 2U_m \frac{(1-r^2) \ln r_1 - (1-r_1^2) \ln r}{(1+r_1^2) \ln r_1 + (1-r_1^2)}, \quad (17)$$

где U_m – среднее значение скорости. В данной задаче кольцевой канал имеет место на выходе из вихревой камеры (сечение 7 на рис. 1, б). Сравнение графиков распределения u_z дано на рис. 3, а. Сплошной линией обозначено распределение, полученное с использованием разработанной модели, точками – точные значения. Совпадение графиков также говорит о правильности расчётов: полученные результаты совпадают с аналитической зависимостью.

Ещё одним способом проверки достоверности модели является решение классической задачи о течении вблизи бесконечного вращающегося диска [5]. Рассматривается течение вблизи плоского диска, равномерно вращающегося с угловой скоростью вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска. Жидкость вдали от диска принимается покоящейся. Вследствие трения слой жидкости, непосредственно прилегающий к диску, увлекается последним и под действием центробежной силы отбрасывается наружу от диска. Взамен отброшенной жидкости к диску притекает в осевом направлении новая жидкость, которая также увлекается диском и опять отбрасывается наружу. С использованием ранее описанных методов были получены распределения скоростей вблизи диска. На рис. 3, б представлено сравнение численных результатов разработанной модели (сплошные линии) с аналитическим решением данной задачи, полученным В. Г. Кохрэном (обозначено точками). График демонстрирует хорошее совпадение решений, что также указывает на достоверность разработанной модели.

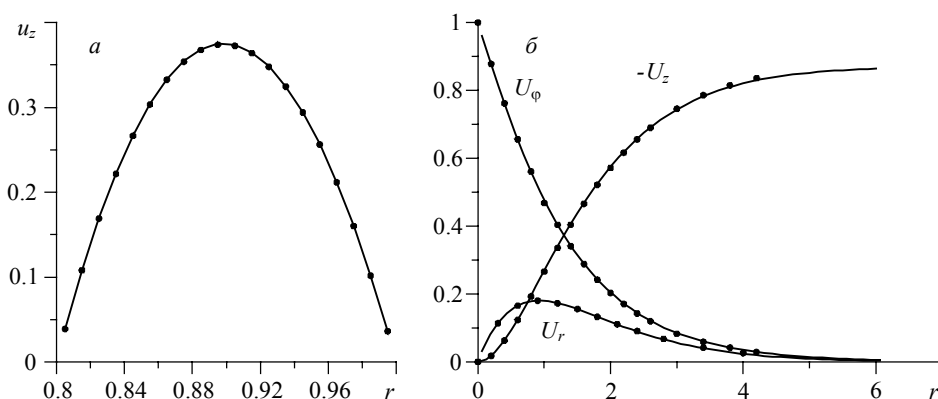


Рис. 3. Сравнение расчётов с аналитическими результатами
Fig. 3. Comparison of the calculation results with analytical solutions

Далее представлены результаты численного решения. На рис. 4 изображены линии тока в вихревой камере при различных значениях критерия Рейнольдса при отсутствии (верхний ряд, $Gr = 0$) и при наличии (нижний ряд, $Gr = 10^5$) свободной конвекции. Параметры потока для всех графиков: $Pr = 1$, $R\omega = 0.5$, $Re = 3, 20, 100$

(соответственно по столбцам). Графики показывают, что свободная конвекция существенно влияет на гидродинамику закрученного течения, — изменяется положение циркуляционной зоны линий тока газа, усиливается вихревое движение.

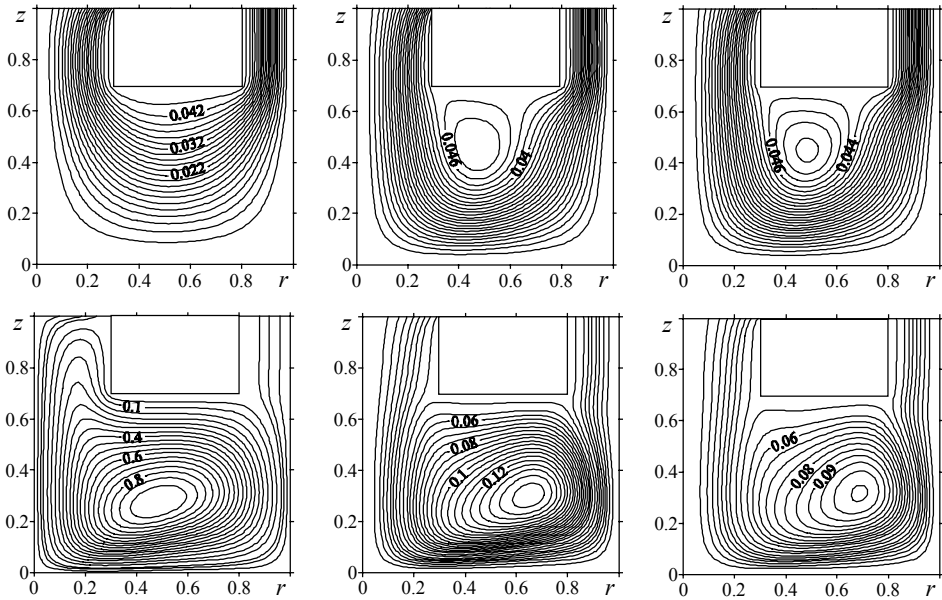


Рис. 4. Влияние числа Рейнольдса на распределение линий тока при отсутствии и при наличии свободной конвекции

Fig. 4. Effect of the Reynolds number on the distribution of streamlines in the absence and presence of free convection

Рис. 5 показывает изолинии окружной составляющей скорости u_ϕ при различных значениях параметра закрутки и в зависимости от наличия естественной конвекции. Верхний ряд на рис. 5 иллюстрирует поля скорости, полученные вычислениями без учёта свободной конвекции ($Gr = 0$), нижний ряд — с её учётом ($Gr = 10^5$). Критериальные параметры потока, использованные при визуализации: $Re = 50$, $Pr = 1$, $R\omega = 0.1, 0.5, 5$. При учёте свободной конвекции поле окружной скорости значительно изменяется, область больших значений окружной составляющей скорости перемещается в направлении к оси симметрии.

На следующем рисунке (рис. 6) представлено температурное поле в камере реактора при различных величинах критерия Прандтля и в зависимости от наличия естественной конвекции. Верхний ряд графиков иллюстрирует распределение температуры в камере без учёта свободной конвекции ($Gr = 0$), нижний — с её учётом ($Gr = 10^5$). Параметры потока: $Re = 50$, $R\omega = 0.5$, $Pr = 0.2, 1, Pr = 20$. Рисунок 6 позволяет судить о том, что при наличии свободной конвекции температура в большей части вихревой камеры возрастает, что свидетельствует об интенсификации теплоотдачи на нижней стенке вихревой камеры.

Графики на рис. 7 являются изотермами в сечениях в вихревой камере, полученными без учёта свободной конвекции (кривые 1, 2, 3), и с её учётом (кривые 4, 5, 6). Номера кривых соответствуют номерам сечений, в которых они построены, приведённых на рис. 1, б.

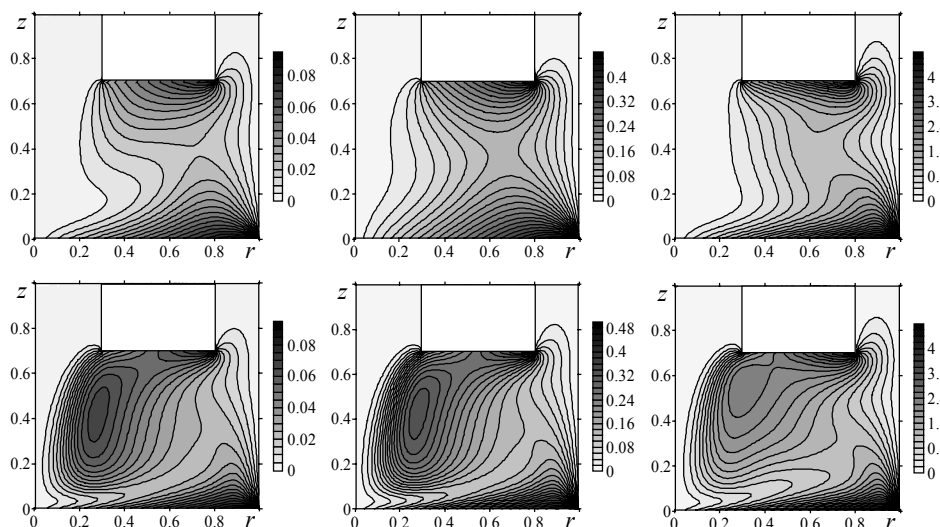


Рис. 5. Влияние числа Россби на распределение изолиний окружной составляющей скорости при отсутствии и при наличии свободной конвекции

Fig. 5. Effect of the Rossby number on the distribution of peripheral velocity isolines in the absence and presence of free convection

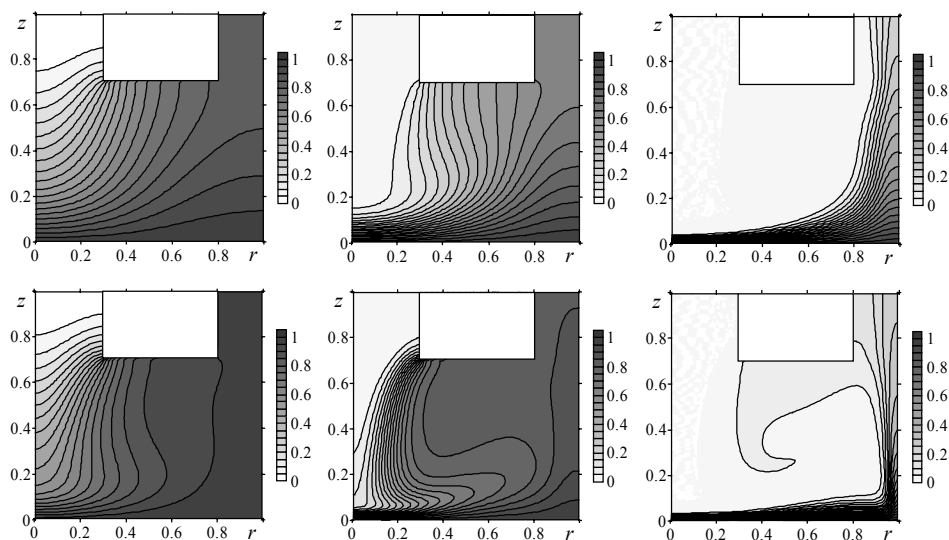


Рис. 6. Влияние числа Прандтля на распределение температуры при отсутствии и при наличии свободной конвекции

Fig. 6. Effect of the Prandtl number on the temperature distribution in the absence and presence of free convection

Изотермы иллюстрируют более быстрое и равномерное прогревание в большей части вихревой камеры при наличии естественной конвекции, а также свидетельствуют о необходимости её учёта при расчёте подобных химических реакторов.

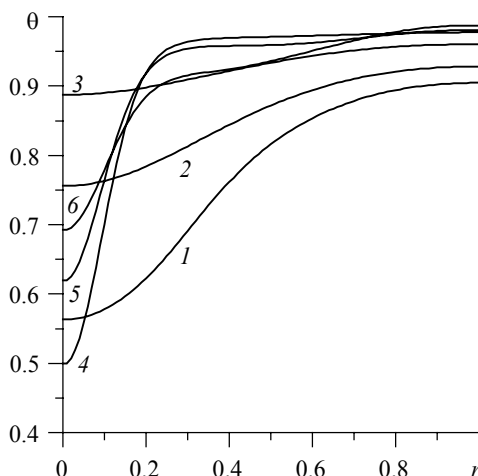


Рис. 7. Влияние свободной конвекции на изотермы в указанных сечениях в вихревой камере
Fig. 7. Effect of free convection on the isotherms in the sections indicated in the vortex chamber

Исследования, проведённые на основе разработанной модели течения в вихревой камере химического реактора, показывают необходимость учёта свободной конвекции в задачах расчёта аппаратов такого рода. Расчёты показали, что наличие естественной конвекции существенно влияет на гидродинамику потока и интенсифицирует теплообмен в вихревой камере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роуч П. Вычислительная гидромеханика. М.: Мир, 1977. 618 с.
2. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. под ред. Виленского. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
3. Chung T.J. Computational fluid dynamics. Cambridge University Press, 2002. 1012 p.
4. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 411 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: пер. с нем. М.: Наука, 1974. 712 с.

Статья поступила 17.05.2017 г.

Shvab A.V., Gicheva N.I. (2017) MODELING OF THE NATURAL AND FORCED CONVECTION IN A VORTEX CHAMBER OF THE CHEMICAL REACTOR. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 114–123

DOI 10.17223/19988621/49/11

The subject of this research is a chemical reactor for producing tungsten. A physical and mathematical model of fluid flow and heat transfer in the chemical reactor under forced and free convection has been described and developed by two methods. The numerical simulation was carried out using “vortex–stream function” and “velocity–pressure” variables. The velocity and temperature distribution in reactor were obtained. The parametric studies of the effect of the Reynolds, Prandtl, and Rossby criteria on the flow characteristics were also performed. The graphs presented show that the natural convection has a significant impact on the flow hydrodynamics and intensifies the heat transfer.

The reliability of the calculations was verified by comparing the results obtained by the methods mentioned above. Furthermore, the created model was applied for numerical solving of a classical test problem of velocity distribution in an annular channel and that of the rotating infinite disk in a stationary liquid. The research results are in a good agreement with the analytical solutions.

Keywords: hydrodynamics, heat transfer, rotating flow, vortex chamber, natural convection, chemical reactor.

SHVAB Alexander Veniaminovich (Doctor of Physics and Mathematics,
National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail avshvab@inbox.ru

GICHEVA Natal'ya Ivanovna (National Research Tomsk State University,
Tomsk, Russian Federation)
E-mail tashka-zenit@mail.ru

REFERENCES

1. Roache P.J. (1976) *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa: Albuquerque.
2. Patankar S. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Hemisphere.
3. Chung T.J. (2002) *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
4. Petukhov B.S. (1967) *Teploobmen i soprotivlenie pri laminarnom techenii zhidkosti v trubakh* [Heat transfer and resistance in a laminar flow in pipes]. Moscow: Energiya.
5. Schlichting H. (1951) *Grenzschicht-Theorie* [Boundary layer theory]. Karlsruhe: G. Braun.