

## МЕХАНИКА

УДК 539.374

DOI 10.17223/19988621/50/5

**А.А. Афанасьев, К.К. Горностаев, А.В. Ковалёв, А.С. Чеботарев****О МЕХАНИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ  
УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДИСКА  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА**

В рамках теории течения для модели Ишлинского – Прагера получено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии диска из изотропного упрочняющегося упругопластического материала под действием теплового источника, помещенного в центре диска. Проведена проверка достоверности полученного решения.

**Ключевые слова:** модель Ишлинского – Прагера, плоское напряженное состояние, точечный источник тепла.

Проблеме определения напряжений и деформаций в тонких дисках (в том числе вращающихся) и пластинах посвящены работы [1–4]. Учет температурных эффектов в упругих и упругопластических не вращающихся дисках приводится в работах [5, 6].

В настоящей работе, следуя [5] и [6], получено точное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии диска из изотропного идеального упругопластического материала под действием теплового источника, помещенного в центре диска. Такой процесс может иметь место при точечной контактной сварке. Задача по исследованию напряженно-деформированного состояния нагреваемого диска является логичным продолжением ряда работ, посвященных моделированию температурного поля, возникающего при точечной контактной сварке [7, 8]. Решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела [9, 10] приближенными и численными методами, в том числе методом конечных элементов, математически дополняют друг друга. Так, в данной работе приближенное решение методом малого параметра дополнено решением с помощью пакета ANSYS и распространено на случай упрочняющегося материала.

Примем, что диск будет находиться в плоском напряженном состоянии, все механические и тепловые константы материала не зависят от температуры. Вследствие осевой симметрии все искомые величины будут зависеть только от расстояния  $r$  до точечного источника. Задачу определения поля температур и напряженно-деформированного состояния будем считать несвязанной. Поскольку в окрестности теплового источника температура теоретически неограниченно высока, там сразу возникает пластическая область. Пусть  $r = R$  – граница этой области. Внешнюю границу диска обозначим  $r = b$ .

Запишем систему уравнений осесимметричного плоско напряженного состояния упругопластического диска в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ :

- уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}, \quad (1)$$

где  $\sigma_r, \sigma_\theta$  – компоненты тензора перемещений в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ ;

- соотношения Коши

$$e_r = \frac{du}{dr}, e_\theta = \frac{u}{r}, \quad (2)$$

где  $e_r, e_\theta$  – компоненты тензора полных деформаций,  $u$  – компонента вектора перемещений в цилиндрической системе координат;

- связь полных деформаций с пластической и упругой составляющими

$$e_r = e_r^p + e_r^e, e_\theta = e_\theta^p + e_\theta^e, e_z = e_z^p + e_z^e. \quad (3)$$

Функцию нагружения выберем в форме, предложенной Ишлинским [7] и Прагером [8]:

$$\left(\sigma_r - \sigma_\theta - c(e_r^p - e_\theta^p)\right)^2 + \left(\sigma_r - c(e_r^p - e_z^p)\right)^2 + \left(\sigma_\theta - c(e_\theta^p - e_z^p)\right)^2 = 2k^2, \quad (4)$$

где  $e_r^p, e_\theta^p, e_z^p$  – компоненты тензора пластических деформаций,  $c$  – коэффициент упрочнения,  $k$  – предел текучести.

Ассоциированный закон пластического течения тогда будет иметь вид

$$\begin{aligned} de_r^p &= 2d\psi \left( \sigma_r - \sigma_\theta - c(2e_r^p - e_\theta^p - e_z^p) \right), \\ de_\theta^p &= 2d\psi \left( \sigma_\theta - \sigma_r - c(2e_\theta^p - e_r^p - e_z^p) \right), \\ de_z^p &= -2d\psi \left( \sigma_r + \sigma_\theta + c(2e_z^p - e_\theta^p - e_r^p) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $d\psi$  – малый скалярный положительный множитель.

Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука в форме

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2G}{1-\nu} \left( e_r^e + \nu e_\theta^e - (1+\nu)\alpha T \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{2G}{1-\nu} \left( e_\theta^e + \nu e_r^e - (1+\nu)\alpha T \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $G$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения,  $T$  – температура.

Определим напряжения и перемещения в идеальном упругопластическом случае (коэффициент упрочнения равен 0) для функции температуры, зависящей от координат.

Из соотношений (1), (2), (6) получим уравнение для перемещений  $u$  в упругой зоне:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = (1+\nu)\alpha \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) имеет вид

$$u(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{2}r + \frac{(1+\nu)\alpha}{r} \int T r dr, \quad (8)$$

где  $A$  и  $B$  – произвольные функции. При этом, используя (2), (6), имеем

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2G \left( -\frac{A}{r^2} + \frac{B}{2} \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) - \frac{(1+\nu)\alpha}{r^2} \int T r dr \right), \\ \sigma_\theta &= 2G \left( \frac{A}{r^2} + \frac{B}{2} \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) + \frac{(1+\nu)\alpha}{r^2} \int T r dr - (1+\nu)\alpha T \right).\end{aligned}\quad (9)$$

Граничное условие, соответствующее свободному внешнему контуру диска, запишется в виде

$$\sigma_r|_{r \rightarrow b} = 0. \quad (10)$$

Из уравнений (1), (4) выводим уравнение для напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в пластической зоне

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -k. \quad (11)$$

Тогда из соотношений для полных деформаций (3) и ассоциированного закона пластического течения (5) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u}{r}.$$

Решением данного уравнения будет:

$$u(r) = r C. \quad (12)$$

Для определения постоянных интегрирования и радиуса упругопластической границы используем уравнение непрерывности компонент перемещений и напряжений

$$[\sigma_r]|_{r=R} = [\sigma_\theta]|_{r=R} = [u] = 0.$$

Квадратные скобки здесь означают разность соответствующих выражений в упругой и пластической областях.

Заметим, что вариант решения упругопластической задачи для неограниченной пластины и вполне определенного вида температуры приведен в книге Паркуса.

Известно, что стационарное температурное поле для кольцевого диска или цилиндрической трубы удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (13)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}T &= T_1, \text{ при } r = a, \\ T &= 0, \text{ при } r = b.\end{aligned}$$

Нетрудно установить, что решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$T(r) = T_1 \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{T_1}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{r}. \quad (14)$$

Для сплошного диска при заданной интенсивности источника тепла температурное поле, в соответствии с (14) и предположением о постоянстве количества тепла, протекающего через окружность радиуса  $r$  [6], примет следующий вид:

$$T(r) = \frac{W}{2\lambda\pi\delta} \ln\left(\frac{b}{r}\right), \quad (15)$$

где  $W$  – мощность источника тепла  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\delta$  – толщина диска,

при граничных условиях

$$T = 0, \text{ при } r = b.$$

Рассмотрим частное решение задачи для диска следующих геометрических размеров: радиус диска  $b = 0.2$  м, толщина диска  $\delta = 0.05$  м. К диску в центре приложен источник тепла постоянной интенсивности  $W = 2000$  Вт.

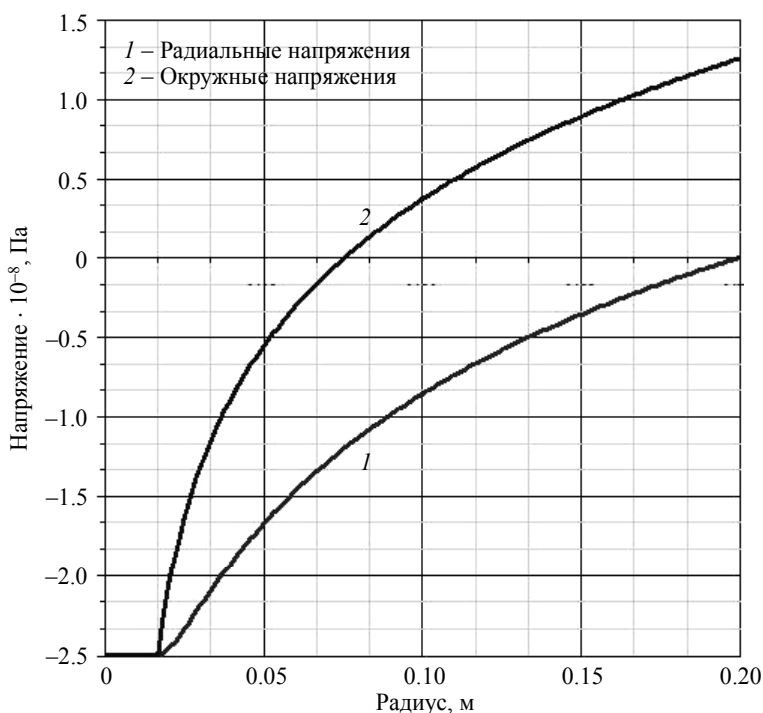
Для большинства конструкционных сталей справедливы следующие константы материала:  $\nu = 0.3$ ;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $k = 250$  МПа;  $\lambda = 60.5$  Вт/м·К;  $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5}$  К $^{-1}$ .

Определив постоянные интегрирования, с учетом приведенных выше констант материала и функции температурного поля, получим уравнение для радиуса упругопластической границы  $R$ :

$$R^2 = 0.0718 \ln R + 0.29.$$

Численное решение уравнения для радиуса упругопластической границы при приведенных значениях параметров среды и габаритах диска приводит к следующему результату – радиус упругопластической границы  $R^2 = 0,0177$  м.

На рис. 1 показаны зависимости напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  от радиуса диска  $r$ .



**Рис. 1.** Зависимость нормальных компонент напряжений от радиуса  
**Fig. 1.** Normal stress components as functions of the radius

Данная задача без учета упрочнения также была решена с помощью пакета инженерного анализа ANSYS Mechanical, основанного на методе конечных элементов. Для экономии вычислительных ресурсов и удобства задания граничных условий рассматривалась четверть диска с заданными условиями симметрии относительно осей  $X$  и  $Y$ . Построена структурированная сетка (рис. 2), содержащая 7500 элементов Quad4 и 7651 узел.

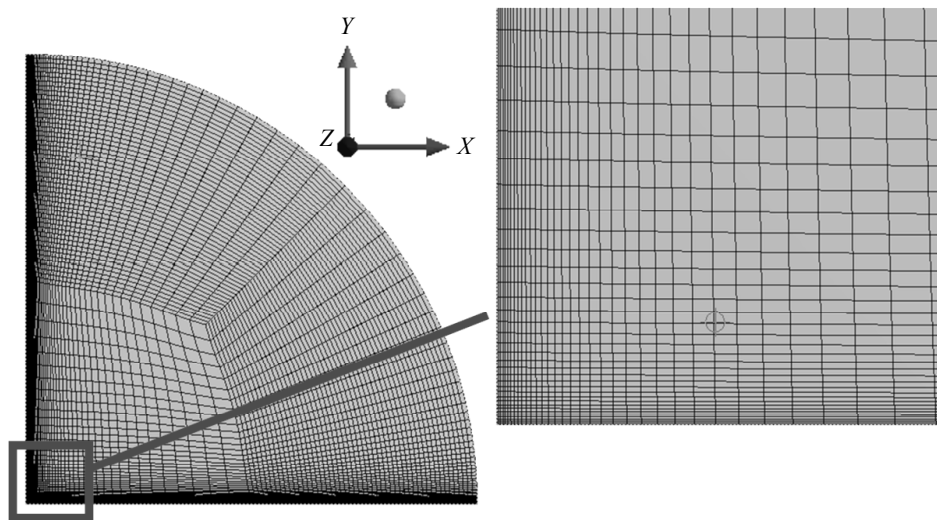


Рис. 2. Сетка для расчетной области  
Fig. 2. Grid for the computational domain

Решение поставленной задачи потребовало последовательного исследования теплового состояния диска с помощью модуля Steady State Thermal и исследования напряженно-деформированного состояния под действием полученного температурного поля в модуле Static Structural.

При решении задачи заданы следующие граничные условия:

- в центральной точке приложен источник тепла постоянной интенсивности с мощностью 2000 Вт, удовлетворяющий условию (15) с предположением о постоянстве количества тепла, протекающего через окружность некоторого радиуса;
- на внешнем радиусе диска задана температура 0;
- в центре диска в узле задается отсутствие линейных степеней свободы в цилиндрической системе координат;
- задается модель кинематически упрочняющегося упругопластического материала, соответствующая модели Ишлинского – Прагера. С коэффициентом упрочнения равным 0, данная модель соответствует идеально пластическому случаю.

По результатам компьютерного моделирования получены зависимости (рис. 3) напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  от радиуса диска  $r$ .

Получено совпадение результатов аналитического решения и компьютерного моделирования с точностью 0.1% для напряжений. Определим радиус упругопластической границы, исходя из условий равенства нулю компонента тензора пластических деформаций на этой границе.

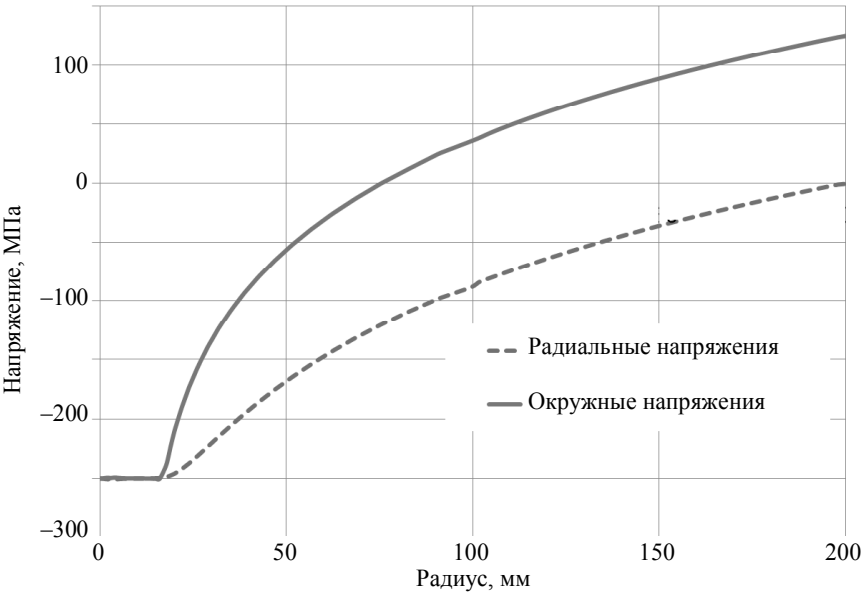


Рис. 3. Зависимость нормальных компонент напряжений от радиуса  
Fig. 3. Normal stress components as functions of radius

В пластической зоне  $e_r^p = e_\theta^p$  и они обращаются в ноль на радиусе 17.7 мм (рис. 4), что также совпадает с результатами аналитического решения.

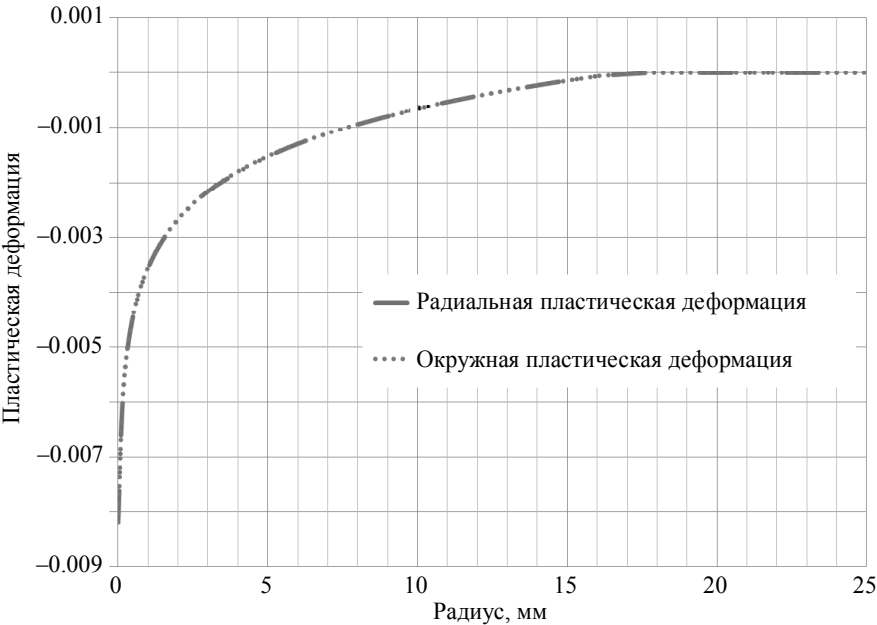


Рис. 4. Пластические деформации  
Fig. 4. Plastic strains

Следует отметить, что в центре диска, где аналитическое решение несправедливо ввиду обращаемой в бесконечность температуры, в ANSYS получено определенное конечное значение температуры  $T = 1036.1$  К. В основной части диска температурное поле в форме (15) совпадает с полем, полученным в ANSYS. При аналитическом решении этот факт позволяет рекомендовать к использованию температурное поле для кольцевого диска или цилиндрической трубы (14), где внутренний диаметр диска или трубы следует выбирать достаточно малым и задавать на нем некоторую конечную температуру. Что, по существу, и проделано в работе Мелана и Паркуса [6] при решении упругой задачи. Следствием ненулевой величины размера элемента в окрестности источника тепла является конечное максимальное значение температуры в центре диска, где, как отмечалось ранее, получена заметная разница температурных полей. В основной части диска получена погрешность на уровне 0.05 %.

Далее по описанному алгоритму проведено моделирование для кинематически упрочняющегося материала с коэффициентом упрочнения  $c = 10000$  МПа. Такой коэффициент  $c$  наделяет материал ярко выраженным упрочнением, которое не характерно для конструкционных сталей, но позволяет нагляднее продемонстрировать разницу с идеально пластическим случаем.

Для упрочняющегося материала  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в пластической зоне не равны между собой (рис. 5). На упругопластической границе напряжения  $\sigma_r$  больше предела текучести, а напряжения  $\sigma_\theta$  – меньше. В то же время радиус упругопластической границы, так же как и в идеально пластическом случае, равен 17.7 мм.

Для упрочняющегося материала получена меньшая интенсивность пластических деформаций (рис. 6). Кроме того, деформации  $e_r^p \neq e_\theta^p$ , причем  $|e_r^p| > |e_\theta^p|$ .

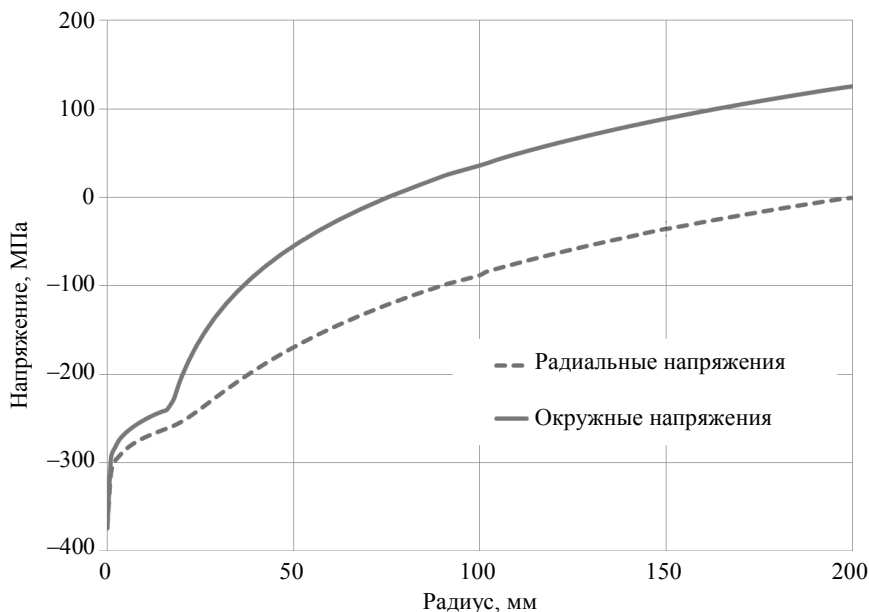
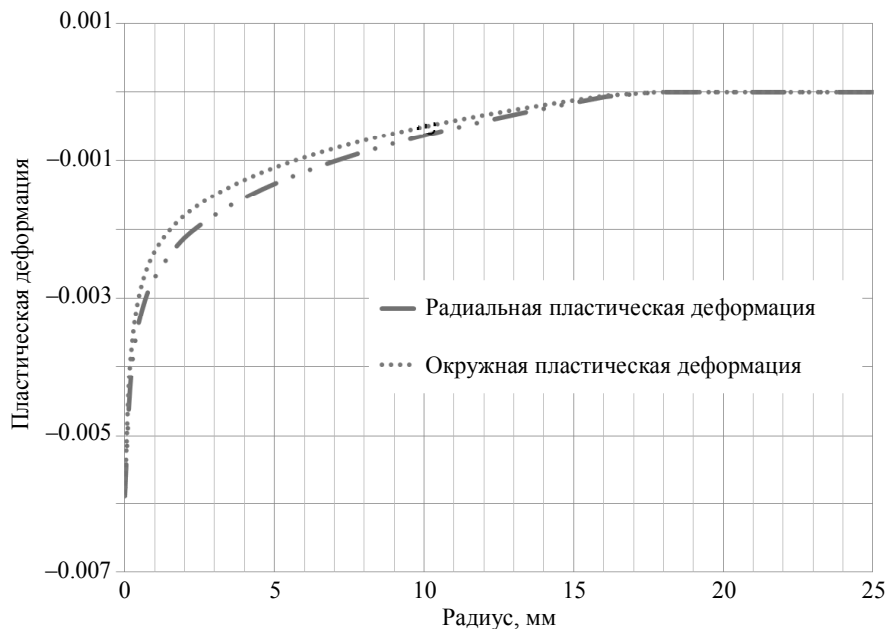


Рис. 5. Зависимость нормальных компонент напряжений от радиуса для упрочняющегося материала

Fig. 5. Normal stress components as functions of the radius for a hardening material



**Рис. 6.** Пластические деформации для упрочняющегося материала  
**Fig. 6.** Plastic strains for a hardening material

Таким образом, в настоящей работе получено аналитическое решение задачи об идеально упругопластическом диске с приложенным в центре точечным источником тепла постоянной интенсивности. Проведено сравнение аналитического решения и решения на основе метода конечных элементов. С помощью метода конечных элементов решена задача о кинематически упрочняющемся диске (модель Ишлинского – Прагера [11, 12]) и проведено сравнение результатов полученных решений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. Артемов М.А., Якубенко А.П. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска // Вестник Воронежского государственного университета. 2014. Сер.: Физика. Математика. № 1. С. 30–38.
3. Спорыхин А.Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Изд-во Воронеж, ун-та, 1997. 360 с.
4. Александров С.Е., Ломакин Е.В., Дзенг Й.Р. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443. №3. С. 310
5. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения: пер. с нем. М.: Физматлит, 1963. С. 199–206.
6. Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958.
7. Козловский С.Н. Математическое моделирование температурного поля при контактной точечной сварке // Вестник Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева. 2006. Сер.: Машиностроение. № 6. С. 4–10.
8. Борисенко Е.А., Шахматова В.А., Беляков Н.Н., Козловский С.Н. Расчетное определение температуры при точечной контактной сварке // Актуальные проблемы авиации и



- космонавтики. Общие и комплексные проблемы технических и прикладных наук и отраслей народного хозяйства. 2014. Т. 10. № 1. С. 93, 94
9. Манахов П.В., Федосеев О.Б. Оптимизация вычислений пластических деформаций в нелинейных задачах механики деформируемого твердого тела // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3(23). С. 96–103.
10. Гоцев Д.В., Перунов Н.С. Математическая модель напряженно-деформируемого состояния упруго цилиндрического тела с пористым наполнителем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 47. С. 43–50. DOI: 10.17223/19988621/47/5.
11. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матем. журн. 1964. Т. 6. № 3. С. 314–325.
12. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956, 398 с.

Статья поступила 11.03.2017 г.

Afanas'ev A.A., Gornostaev K.K., Kovalev A.V., Chebotarev A.S. (2017) ON MECHANICAL BEHAVIOR OF THE HARDENING ELASTOPLASTIC DISK AFFECTED BY A HEAT SOURCE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 57–66

DOI 10.17223/19988621/50/5

The authors obtained an exact solution of the problem of the stress-strain state of a disk made of an isotropic hardening elastoplastic material affected by a heat source placed in the center of the disk. The disk is in a plane stress state. All mechanical and thermal constants of the material are temperature-independent. All the unknown quantities depend only on the distance to the point heat source due to axial symmetry. The temperature in the heat vicinity of the source is infinitely high.

In addition, the same problem without consideration of a hardening process was solved using ANSYS Mechanical engineering package. It should be noted that the analytical solution is unavailable due to infinite temperature in the center of the disk, but ANSYS made it possible to calculate a finite value of the temperature there.

As a result, in this paper, an analytical solution of the problem of an ideal elastoplastic disk with the point heat source in the center has been obtained. The analytical solution has been compared with results calculated using the finite element method.

Keywords: Ishlinskii – Prager model, plane stress state, point heat source.

*AFANAS'EV Aleksandr Aleksandrovich* (Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation)  
E-mail afanasyev.alex.alex@gmail.com

*GORNOSTAEV Konstantin Konstantinovich* (Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation)  
E-mail gornostaevkonstantink@gmail.com

*KOVALEV Aleksey Viktorovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation)  
E-mail kav-mail@mail.ru

*CHEBOTAREV Andrey Sergeevich* (Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation)  
Email: chebotarev@amm.vsu.ru

## REFERENCES

1. Sokolovskiy V.V. (1969) *Teoriya plastichnosti* [Theory of plasticity]. Moscow: Vysshaya shkola.
2. Artemov M.A., Yakubenko A.P. (2014) Matematicheskoe modelirovanie mekhanicheskogo povedeniya vrashchayushchegosya diska [Mathematical modeling of mechanical behavior of a rotating disk]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Fizika i matematika – Proceedings of Voronezh State University. Physics and mathematics*. 1. pp. 30–38.
3. Sporykhin A.N. (1997) *Metod vozmushcheniy v zadachakh ustoychivosti slozhnykh sred* [Perturbation method in the problems of stability of complex media]. Voronezh: Izdatel'stvo Voronezh.
4. Aleksandrov S.E. (2012) Solution of the thermoelastoplastic problem for a thin disk of plastically compressible material subjected to thermal loading. *Doklady Physics*. 57(3). pp. 136–139. DOI: 10.1134/S1028335812030081.
5. Parkus H. (1963) *Neustanovivshiesya temperaturnye napryazheniya* [Nonsteady temperature stresses]. Moscow: Fizmatgiz.
6. Melan E., Heinz P. (1958) *Temperaturnye napryazheniya, vyzvaemye statsionarnymi temperaturnymi polymi* [Thermal Stresses due to Stationary Temperature Fields]. Moscow: Fizmatgiz.
7. Kozlovskiy S.N. (2006) Mathematical modelling of the temperature field at contact spot welding. *Vestnik Sibirskogo Gosudarstvennogo Aerokosmicheskogo Universiteta im. akademika M.F. Reshetneva – Vestnik of the Siberian State University of Science and Technology Named after academician M.F. Reshetnev*. 6(13). pp. 4–10.
8. Borisenko E.A., Shakhmanova V.A., Belyakov N.N., Kozlovskiy S.N. (2014) Raschetnoe opredelenie temperatury pri tochechnoy kontaktной сварke [Computational temperature determination in spot welding]. *Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavтики. Obshchie i kompleksnye problemy tekhnicheskikh i prikladnykh nauk i otrasley narodnogo khozyaystva – Topical problems of aviation and cosmonautics. General and complex problems of technical and applied sciences and branches of national economy*. 10(1). pp. 93–94.
9. Manakhov P.V., Fedoseev O.B. (2013) Optimization of calculations of plastic deformations in nonlinear problems of deformable solid mechanics. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(23). pp. 96–103.
10. Gotsev D.V., Perunov N.S. (2017) Mathematical model of the stress-strain state of an elastic cylindrical body with a porous filler. *Vestnik tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp.43–50. DOI: 10.17223/19988621/47/5.
11. Ishlinskiy A.Yu. (1964) Obshchaya teoriya plastichnosti s lineynim uprochneniem [General theory of plasticity with a linear hardening]. *Ukrainskiy Matematicheskii Zhurnal – Ukrainian Mathematical Journal*. 6(3). pp. 314–325.
12. Prager W., Hodge P.G. (1951) *Theory of perfectly plastic solids*. John Wiley & Sons.