УДК 532.546: 519.6
DOI 10.17223/19988621/50/6

Х.М. Гамзаев

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ – КОНВЕКЦИИ – РЕАКЦИИ

Рассматриваются две обратные задачи по восстановлению коэффициентов нестационарного одномерного уравнения диффузии – конвекции – реакции. Первая задача состоит в определении коэффициента конвективного переноса, зависящего лишь от временной переменной, по интегральному условию переопределения. А вторая задача заключается в определении кинетического коэффициента реакции, зависящего от времени, снова по интегральному условию переопределения. Для решения обеих задач сначала проводятся дискретизация производной по времени и используются явно-неявные схемы для аппроксимации операторов задач. Для численного решения полученных задач предлагается безытерационный вычислительный алгоритм, основанный на сведении дифференциально-разностной задачи к двум прямым краевым задачам и линейному уравнению относительно искомого коэффициента.

Ключевые слова: *уравнение диффузии – конвекции – реакции, коэффициентная обратная задача, интегральное условие переопределения, дифференциально-разностная задача, явно-неявные схемы.*

Известно, что для изучения многих динамических процессов в классической и магнитной гидродинамике, космической отрасли и физике космоса, ракетостроении, химической промышленности, полупроводниковых технологиях, экологии, теплопередаче, акустике и т.д. пользуются одномерным нестационарным уравнением диффузии – конвекции – реакции [1–4]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\nu(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma(x,t)u=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x,t),\quad 0<x<l,\quad 0<t\le T, \tag{1}$$

где $u(x,t)$ – физическая величина (масса, импульс, энергия и т.д.), $\nu(x,t)$ – коэффициент конвективного переноса (скорость конвекции), $\gamma(x,t)$ – кинетический коэффициент реакции, $k(x,t)$ – коэффициент диффузии. Слагаемое $\gamma(x,t)u$ описывает поглощения или выделения физической величины, а слагаемое $f(x,t)$ описывает действие внешнего источника.

В настоящей работе рассматриваются две коэффициентные обратные задачи для уравнения (1) по определению коэффициента конвективного переноса и кинетического коэффициента реакции, представляя их функциями лишь от временной переменной. Общим методам решения обратных задач для уравнений математической физики посвящены [5–7]. Вопросы существования и единственности, а также разрешимости некоторых коэффициентных обратных задач для параболических уравнений исследованы в [8–11]. Ряд работ посвящен численному исследованию проблемы восстановления младших коэффициентов, входящих в одномерное уравнение диффузии – конвекции – реакции [12–16].

В данной работе для решения обратной задачи по восстановлению младших коэффициентов в уравнении диффузии – конвекции – реакции предлагается численный метод, основанный на использовании явно-неявной схемы при дискретизации данного уравнения.

Постановка задачи и метод решения

Задача А. Пусть рассматривается нестационарное уравнение диффузии – конвекции – реакции

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\nu(t)\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma(x,t)u=\frac{\partial}{\partial x}(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x})+f(x,t)\,,\ 0<x<l,\ \ 0<t\le T\,, \qquad (2)$$

со следующими начальным и граничным условиями:

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,\ 0\le x\le l\,; \qquad (3)$$

$$u(0,t)=\theta(t)\,,\ \ 0\le t\le T\,; \qquad (4)$$

$$u(l,t)=r(t)\,,\ \ 0\le t\le T\,. \qquad (5)$$

Коэффициент конвективного переноса считается непрерывной и ограниченной функцией переменной t: $v=v(t)$.

Известно, что прямая задача для уравнения (2) состоит в определении функций $u(x,t)$ из уравнения (2) с заданными коэффициентами $v(t)$, $\gamma(x,t)$, $k(x,t)$, правой частью $f(x,t)$ и дополнительными условиями (3) – (5). Предположим, что помимо функции $u(x,t)$ неизвестной является также функция $v(t)$. Требуется восстановление этой функции по следующему интегральному условию переопределения:

$$\int_0^l u(x,t)dx=E(t)\,,\ 0\le t\le T\,, \qquad (6)$$

где $E(t)$ – заданная функция. Предполагается, что при этом выполняются условия согласования

$$\theta(0)=\varphi(0)\,,\ r(0)=\varphi(l)\,,\ \int_0^l \varphi(x)dx=E(0)\,.$$

Таким образом, задача заключается в определении функций $u(x,t)$ и $v(t)$, удовлетворяющих уравнению (2) и условиям (3) – (6).

Для численного решения поставленной коэффициентной обратной задачи (2) – (6) сначала введем равномерную разностную сетку в области $0\le t\le T$ по переменной t

$$\bar{\omega}_t=\left\{t_j=j\Delta t,\ \ j=\overline{0,m}\right\}$$

с шагом $\Delta t=\dfrac{T}{m}$. Производную $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ в уравнении (2) при t_j, $j=\overline{1,m}$, дискретизируем разностью «назад»

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\left(x,t_j\right)}\approx\frac{u\left(x,t_j\right)-u\left(x,t_{j-1}\right)}{\Delta t}.$$

Для оператора конвективного переноса используем явную аппроксимацию по времени, а для операторов диффузионного переноса и реакции – неявные аппроксимации. Следует отметить, что подобные технологии применяются при численном решении различных краевых задач для уравнения диффузии – конвекции – реакции [17]. Обозначив $u^j(x) \approx u\left(x, t_j\right)$, задачу (2) – (6) запишем в следующем виде:

$$\frac{u^j(x)-u^{j-1}(x)}{\Delta t}+\nu^j \frac{du^{j-1}}{dx}+\gamma^j(x)u^j(x)=\frac{d}{dx}\left(k^j(x)\frac{du^j(x)}{dx}\right)+f^j(x),$$

$$0<x<l; \tag{7}$$

$$u^j(0)=\theta^j; \tag{8}$$

$$u^j(l)=r^j; \tag{9}$$

$$\int_0^l u^j(x)dx=E^j; \tag{10}$$

$$u^0(x)=\varphi(x); \tag{11}$$

где $\nu^j \approx \nu(t_j)$, $\gamma^j(x)=\gamma(x,t_j)$, $k^j(x)=k(x,t_j)$, $\theta^j=\theta(t_j)$,
$r^j=r(t_j)$, $f^j(x)=f(x,t_j)$, $E^j=E(t_j)$, $j=1, 2, \ldots, m$.

Следует отметить, что дифференциально-разностная задача (7) – (11) аппроксимирует задачу (2) – (6) с погрешностью $O(\Delta t)$. Предположим, что решение полученной дифференциально-разностной задачи (7) – (11) на каждом временном слое $j=1, 2, \ldots, m$ можно представить в виде

$$u^j(x)=p^j(x)+\nu^j w^j(x), \tag{12}$$

где $w^j(x)$, $p^j(x)$ – неизвестные функции. Подставив соотношение (12) в уравнение (7), будем иметь

$$\frac{p^j(x)+\nu^j w^j(x)-u^{j-1}(x)}{\Delta t}+\nu^j \frac{du^{j-1}}{dx}+\gamma^j(x)p^j(x)+\nu^j\gamma^j(x)w^j(x)=$$
$$=\frac{d}{dx}\left(k^j(x)\frac{dp^j(x)}{dx}\right)+\nu^j \frac{d}{dx}\left(k^j(x)\frac{dw^j(x)}{dx}\right)+f^j(x)$$

или
$$\left[\frac{p^j(x)-u^{j-1}(x)}{\Delta t}+\gamma^j(x)p^j(x)-\frac{d}{dx}\left(k^j(x)\frac{dp^j(x)}{dx}\right)-f^j(x)\right]+$$
$$+\nu^j\left[\frac{w^j(x)}{\Delta t}+\frac{du^{j-1}}{dx}+\gamma^j(x)w^j(x)-\frac{d}{dx}\left(k^j(x)\frac{dw^j(x)}{dx}\right)\right]=0.$$

Соотношение (12) также подставим в (8), (9):

$$p^j(0)+\nu^j w^j(0)=\theta^j,$$

$$p^j(l)+\nu^j w^j(l)=r^j.$$

В силу произвольности переменной ν^j из последних соотношений можно получить следующие краевые задачи относительно функций $w^j(x),\ p^j(x)$:

$$\frac{p^j(x)-u^{j-1}(x)}{\Delta t}+\gamma^j(x)p^j(x)-\frac{d}{dx}\left(k^j(x)\frac{dp^j(x)}{dx}\right)-f^j(x)=0\ ,\quad 0<x<l\ ; \qquad (13)$$

$$p^j(0)=\theta^j\ ; \qquad (14)$$

$$p^j(l)=r^j\ ; \qquad (15)$$

$$\frac{w^j(x)}{\Delta t}+\frac{du^{j-1}}{dx}+\gamma^j(x)w^j(x)-\frac{d}{dx}\left(k^j(x)\frac{dw^j(x)}{dx}\right)=0,\quad 0<x<l\ ; \qquad (16)$$

$$w^j(0)=0\ ; \qquad (17)$$

$$w^j(l)=0\ , \qquad (18)$$

$$j=1,\ 2,\ \ldots,m\ ;$$

$$u^0(x)=\varphi(x)\ .$$

А подстановка (12) в условие переопределения (10) дает

$$\int_0^l p^j(x)dx+v^j\int_0^l w^j(x)dx=E^j\ . \qquad (19)$$

Из полученных соотношений можно конструировать следующий вычислительный алгоритм для численного решения задачи (7) – (11) по определению $u^j(x),\ \ v^j$, $j=1,\ 2,\ \ldots,m$:

- для фиксированного значения временного слоя j определяются решения задач (13) – (15) и (16) – (18), т.е. функции $p^j(x)$ и $w^j(x)$ на отрезке $[0,l]$;

- из соотношения (19) определяется приближенное значение искомой функции $v(t)$ при $t=t_j$

$$v^j=\frac{E^j-\int_0^l p^j(x)dx}{\int_0^l w^j(x)dx}\ ;$$

- по формуле $u^j(x)=p^j(x)+v^jw^j(x)$ определяется приближение искомой функции $u(x,t)$ при $t=t_j$;

- при переходе на следующий временной слой описанная процедура вычислений снова повторяется.

Для численного решения задач (13) – (15) и (16) – (18) можно использовать метод конечных разностей. Введем равномерную разностную сетку в области $[0<x<l]$ по переменной x

$$\overline{\omega}_x=\left\{x_i=i\Delta x,\ \ i=\overline{0,n},\ \Delta x=l/n\right\}.$$

Дискретные аналоги задач (13) – (15) и (16) – (18) на сетке $\overline{\omega}_x$ представим в виде

$$\frac{p_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} + \gamma_i^j p_i^j - \frac{1}{\Delta x}\left[k_{i+1/2}^j \frac{p_{i+1}^j - p_i^j}{\Delta x} - k_{i-1/2}^j \frac{p_i^j - p_{i-1}^j}{\Delta x}\right] - f_i^j = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$p_0^j = \theta^j, \tag{20}$$

$$p_n^j = r^j;$$

$$\frac{w_i^j}{\Delta t} + \frac{u_i^{j-1} - u_{i-1}^{j-1}}{\Delta x} + \gamma_i^j w_i^j - \frac{1}{\Delta x}\left[k_{i+1/2}^j \frac{w_{i+1}^j - w_i^j}{\Delta x} - k_{i-1/2}^j \frac{w_i^j - w_{i-1}^j}{\Delta x}\right] = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$w_0^j = 0, \tag{21}$$

$$w_n^j = 0,$$

$$j = 1, 2, \ldots, m;$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, n},$$

где $\quad w_i^j \approx w^j(x_i), \quad u_i^{j-1} \approx u^{j-1}(x_i), \quad p_i^j \approx p^j(x_i), \quad \gamma_i^j = \gamma^j(x_i),$

$$f_i^j = f^j(x_i), \quad k_{i\pm1/2}^j = k^j(x_i \pm \Delta x/2).$$

Разностные задачи (20) и (21) при каждом фиксированном значении $j = 1, 2, \ldots, m$ представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Для решения этих систем можно использовать алгоритм Томаса (метод прогонки) [6].

Задача B. Пусть рассматривается нестационарное уравнение диффузии – конвекции – реакции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(t)u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \tag{22}$$

со следующими начальным и граничным условиями:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l; \tag{23}$$

$$u(0,t) = \theta(t), \quad 0 \le t \le T; \tag{24}$$

$$u(l,t) = r(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{25}$$

Кинетический коэффициент реакции предполагается непрерывной и ограниченной функцией переменной t: $\gamma = \gamma(t)$.

Предположим, что помимо функции $u(x,t)$ неизвестной является также функция $\gamma(t)$. Требуется восстановление этой функции по следующему интегральному условию переопределения:

$$\int_0^l u(x,t)dx = E(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{26}$$

Предполагается, что выполняются условия согласования. Снова дискретизируем производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ разностью «назад» в уравнении (22) при t_j, $j = \overline{1, m}$, и используя явную аппроксимацию по времени для оператора реакции, а неявные аппроксимации – для операторов диффузионного и конвективного переноса, задачу (22) – (26) запишем в следующем виде:

$$\frac{u^j(x)-u^{j-1}(x)}{\Delta t}+\nu^j(x)\frac{du^j}{dx}+\gamma^j u^{j-1}(x)=\frac{d}{dx}\left(k^j(x)\frac{du^j(x)}{dx}\right)+f^j(x),$$

$$0<x<l; \tag{27}$$

$$u^j(0)=\theta^j; \tag{28}$$

$$u^j(l)=r^j; \tag{29}$$

$$\int_0^l u^j(x)dx=E^j; \tag{30}$$

$$u^0(x)=\varphi(x), \tag{31}$$

где $\gamma^j\approx\gamma(t_j)$, $\nu^j(x)=\nu(x,t_j)$, $j=1,2,\ldots,m$.

Дифференциально-разностная задача (27) – (31) также аппроксимирует задачу (22) – (26) с погрешностью $O(\Delta t)$.

Предположим, что решение дифференциально-разностной задачи (27) – (31) на каждом временном слое $j=1,2,\ldots,m$ можно представить в виде

$$u^j(x)=p^j(x)+\gamma^j w^j(x), \tag{32}$$

где $w^j(x)$, $p^j(x)$ – неизвестные функции. Подставив соотношение (32) в (27) – (30) будем иметь

$$\left[\frac{p^j(x)-u^{j-1}(x)}{\Delta t}+\nu^j(x)\frac{dp^j}{dx}-\frac{d}{dx}\left(k^j(x)\frac{dp^j(x)}{dx}\right)-f^j(x)\right]+$$

$$+\gamma^j\left[\frac{w^j(x)}{\Delta t}+\nu^j(x)\frac{dw^j}{dx}+u^{j-1}(x)-\frac{d}{dx}\left(k^j(x)\frac{dw^j(x)}{dx}\right)\right]=0,$$

$$p^j(0)+\gamma^j w^j(0)=\theta^j,$$

$$p^j(l)+\gamma^j w^j(l)=r^j.$$

Отсюда получим следующие краевые задачи относительно функций $p^j(x)$, $w^j(x)$:

$$\frac{p^j(x)-u^{j-1}(x)}{\Delta t}+\nu^j(x)\frac{dp^j}{dx}-\frac{d}{dx}\left(k^j(x)\frac{dp^j(x)}{dx}\right)-f^j(x)=0,\quad 0<x<l; \tag{33}$$

$$p^j(0)=\theta^j; \tag{34}$$

$$p^j(l)=r^j; \tag{35}$$

$$\frac{w^j(x)}{\Delta t}+\nu^j(x)\frac{dw^j}{dx}+u^{j-1}(x)-\frac{d}{dx}\left(k^j(x)\frac{dw^j(x)}{dx}\right)=0,\quad 0<x<l; \tag{36}$$

$$w^j(0)=0; \tag{37}$$

$$w^j(l)=0, \tag{38}$$

$$j=1,2,\ldots,m;$$

$$u^0(x)=\varphi(x).$$

Подставив (32) в условие переопределения (30), имеем

$$\int_0^l p^j(x)dx + v^j \int_0^l w^j(x)dx = E^j \ . \qquad (39)$$

Таким образом, получим следующий вычислительный алгоритм для численного решения задачи (27) – (31) по определению $u^j(x),\ \ \gamma^j$ **,** $j = 1, 2, \ldots, m$:

- для фиксированного значения временного слоя j определяются решения задач (33) – (35) и (36) – (38), т.е. функции $p^j(x)$ и $w^j(x)$ на отрезке $[0, l]$;

- из соотношения (39) определяется приближенное значение искомой функции $\gamma(t)$ при $t = t_j$

$$\gamma^j = \frac{E^j - \int_0^l p^j(x)dx}{\int_0^l w^j(x)dx};$$

- по формуле $u^j(x) = p^j(x) + \gamma^j w^j(x)$ определяется приближение искомой функции $u(x,t)$ при $t = t_j$;

- при переходе на следующий временной слой описанная процедура вычислений повторяется.

Для численного решения задач (33) – (35) и (36) – (38) можно использовать метод конечных разностей. Дискретные аналоги задач (33) – (35) и (36) – (38) на сетке $\overline{\omega}_x$ можно представить в виде

$$\frac{p_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} + v_i^{j+} \frac{p_i^j - p_{i-1}^j}{\Delta x} + v_i^{j-} \frac{p_{i+1}^j - p_i^j}{\Delta x} -$$
$$- \frac{1}{\Delta x}\left[k_{i+1/2}^j \frac{p_{i+1}^j - p_i^j}{\Delta x} - k_{i-1/2}^j \frac{p_i^j - p_{i-1}^j}{\Delta x} \right] - f_i^j = 0,\ i = \overline{1, n-1};$$

$$p_0^j = \theta^j; \qquad (40)$$

$$p_n^j = r^j;$$

$$\frac{w_i^j}{\Delta t} + v_i^{j+} \frac{w_i^j - w_{i-1}^j}{\Delta x} + v_i^{j-} \frac{w_{i+1}^j - w_i^j}{\Delta x} + u_{i-1}^j -$$
$$- \frac{1}{\Delta x}\left[k_{i+1/2}^j \frac{w_{i+1}^j - w_i^j}{\Delta x} - k_{i-1/2}^j \frac{w_i^j - w_{i-1}^j}{\Delta x} \right] = 0,\ i = \overline{1, n-1};$$

$$w_0^j = 0; \qquad (41)$$

$$w_n^j = 0;$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i),\ i = \overline{0, n},$$

где $v_i^{j\pm} = \dfrac{v_i^j \pm \left| v_i^j \right|}{2}$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Полученные разностные задачи (40) и (41) также при каждом фиксированном значении $j = 1, 2, \ldots, m$ представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, и для решения этих систем можно использовать алгоритм Томаса.

Результаты численных расчетов

На основе предложенных вычислительных алгоритмов были проведены численные эксперименты для модельных задач. Ниже приводятся результаты численного эксперимента для двух модельных задач.

Задача А. Требуется найти функции $u(x,t)$ и $v(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu(t)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{10}{5x + 3\sin(x+t)}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{10x}{5 + 3\cos(x+t)}\frac{\partial u}{\partial x}\right) +$$

$$+3\cos(x+t) + (5 + 3\cos(x+t))(3 + 2\cos 100t),$$

$$0 < x < 1,\ 0 < t \le 1,$$

$$u(x,0) = 5x + 3\sin x\ ,$$

$$u(0,t) = 3\sin t\ ,$$

$$u(1,t) = 5 + 3\sin(1+t)\ ,$$

$$\int_0^1 u(x,t)dx = 2.5 - 3\cos(1+t) + 3\cos t\ .$$

Точным решением данной задачи являются функции

$$u(x,t) = 5x + 3\sin(x+t)\ ,\ v(t) = 3 + 2\cos 100t\ .$$

Результаты численного решения задачи приведены в табл. 1.

Таблица 1

Численные результаты по задаче А

t_j	Значение функции $v(t)$	
	Точное	Вычисленное при $\Delta t = 10^{-4}$, $\Delta x = 5 \cdot 10^{-3}$
0.1	1.322	1.321
0.2	3.816	3.814
0,.3	3.309	3.306
0.4	1.666	1.665
0.5	4.930	4.929
0.6	1.095	1.094
0.7	4.267	4.266
0.8	2.779	2.778
0.9	2.104	2.103
1.0	4.725	4.724

Задача B. Требуется найти функции $u(x,t)$ и $\gamma(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{8}{5t+2x}\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma(t)u=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{8x}{5t+2x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+5x+(5tx+x^2)(500-300\sin 10^3 t),$$

$$0<x<1,\quad 0<t\le 1,$$

$$u(x,0)=x^2,$$

$$u(0,t)=0,$$

$$u(1,t)=5t+1,$$

$$\int_0^1 u(x,t)dx=2.5t+1/3.$$

Точным решением данной задачи являются функции

$$u(x,t)=5tx+x^2,\ \gamma(t)=500-300\sin 10^3 t.$$

Результаты численного решения задачи B приведены в табл. 2.

Таблица 2

Численные результаты по задаче B

t_j	Значение функции $\gamma(t)$	
	Точное	Вычисленное при $\Delta t=10^{-4}$, $\Delta x=5\cdot 10^{-3}$
0.1	651.910	651.988
0.2	761.989	761.999
0,.3	799.927	799.957
0.4	755.276	755.476
0.5	640.332	640.445
0.6	486.745	486.820
0.7	336.809	336.855
0.8	231.809	231.838
0.9	200.659	200.682
1.0	251.936	251.962

Как показывают результаты численного эксперимента, искомые функции $v(t)$ и $\gamma(t)$ восстанавливаются с достаточно высокой точностью. Максимальная относительная погрешность восстановления искомого коэффициента в задаче А не превышает 0.13 %, а в задаче B – 0.08 %. Анализ результатов численного экспериментирования свидетельствует, что для п***овышения точности*** решений достаточно использовать ***мелкие шаги разностной сетки***.

Заключение

Рассмотрены коэффициентные обратные задачи для одномерного нестационарного уравнения диффузии – конвекции – реакции. Вычислительный алгоритм решения данных задач базируется на частичной дискретизации уравнения с использованием явно-неявных схем с последующим сведением к прямым краевым задачам. В отличие от метода регуляризации, приводящего к построению итерационных последовательностей, в предложенном подходе учитывается специфика обратных задач и решение определяется последовательно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андерсон Д.*, *Таннехил Дж.*, *Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1. 384 с.
2. *Уизем Дж.Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 638 с.
3. *Пасконов В.М.*, *Полежаев В.И.*, *Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
4. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 528 с.
5. *Алифанов О.М.*, *Артюхин Е.А.*, *Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
6. *Самарский А.А.*, *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Издательство ЛКИ, 2009. 480 с.
7. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
8. *Иванчов Н.И.*, *Побыривска Н.В.* Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43. № 2. С. 406–413.
9. *Камынин В.Л.* Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Матем. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 2. С. 207–2175.
10. *Костин А.Б.* Восстановление коэффициента перед u_t в уравнении теплопроводности по условию нелокального наблюдения по времени // Жур. вычисл. матем. и матем. физики. 2015. Т. 55. № 1. С. 89–104.
11. *Кожанов А.И.* Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 6. С. 961–972.
12. *Liu Yang*, *Jian-Ning Yu*, *Zui-Cha Deng.* An inverse problem of identifying the coefficient of parabolic equation //Applied Mathematical Modelling. 2008. V. 32. Iss. 10. P. 1984–1995.
13. *Nazim B. Kerimov*, *Mansur I. Ismailov.* An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // J. Mathematical Analysis and Applications. 2012. V. 396. Iss. 2. P. 546–554.
14. *Engl H.W.*, *Zou J.* A new approach to convergence rates analysis of Tikhonov regularization for parameter identification in heat conduction // Inverse Problems. 2000. V. 16. P. 1907–1923.
15. *Deng Z.C.*, *Qian K.*, *Rao X.B.*, *Yang L. and Luo G.W.* An inverse problem of identifying the source coefficient in a degenerate heat equation // Inverse Problems in Science and Engineering. 2015. 23(3). P. 498–517.
16. *Dehghan M.*, *Tatari M.* Determination of a control parameter in a one-dimensional parabolic equation using the method of radial basis functions // Math. Comput. Modell. 2006. V. 44. pp. 1160–1168.
17. *Вабищевич П.Н.*, *Васильева М.В.* Явно-неявные схемы для задач конвекции – диффузии – реакции // Сиб. журн. вычисл. матем. 2012. Т. 15. № 4. С. 359–369.

Статья поступила 04.09.2017 г.

Gamzaev Kh.M. (2017) A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR DIFFUSION-CONVECTION-REACTION EQUATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 67–78

DOI 10.17223/19988621/50/6

The two inverse problems on the restoration of coefficients for nonstationary one-dimensional diffusion – convection – reaction equation are considered. The first problem is intended to determine the convective transfer coefficient, which depends only on the time in accordance with the integral overdetermination condition. The second problem allows one to obtain the reaction rate coefficient depending on the time according to the integral overdetermination condition. To solve these problems, at first, a discretization of the time derivative is implemented and the explicit-implicit schemes are used to approximate the operators in both problems. For convective transfer operator in the first problem and reaction operator in the second problem, the explicit sheme was used. For the rest of operators in these problems, the implicit sheme was applied. As a result, both problems are reduced to the differential-difference problems with respect to the functions that depend on the spatial variable. For numerical solution of the problems obtained, a non-iterative computational algorithm is proposed. It is based on reducing of the differential-difference problem to two direct boundary-value problems and to a linear equation with respect to unknown coefficient. The proposed method was used to carry out the numerical experiments for the model problems.

Keywords: diffusion – convection – reaction equation, coefficient inverse problem, integral overdetermination condition, differential-difference problem, explicit-implicit schemes.

GAMZAEV Khanlar Mekhvali ogly (Doctor of Technical Sciences, Professor, Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan)
E-mail: xan.h@rambler.ru

REFERENCES

1. Anderson D., Tannehill K., Pletcher R. (1984) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. New York.
2. Whitham G.B. (1974) *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons Inc.
3. Paskonov V.M., Polezhaev V.I., Chudov L.A. (1984) *Chislennoe modelirovanie protsessov teplo-i-massoobmena* [Numerical modeling of heat and mass transfer processes]. Moscow: Nauka.
4. Roache P.J. (1976) *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque: Hermosa Publishers.
5. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. (1988) *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme methods for solving ill-posed problems]. Moscow: Nauka.
6. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. (2009) *Chislennye metody resheniya obratnikh zadach matematicheskoy fiziki* [Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics]. Moscow: Publishing house LCI.
7. Kabanikhin S.I. (2009) *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and ill-posed problems]. Novosibirsk: Siberian Scientific publishers.
8. Ivanchov N.I., Pabyrivska N.V. (2002) On determination of two time-dependent coefficients in a parabolic equation. *Siberian Mathematical Journal*. 43(2). pp. 323–329. DOI: 10.1023/A:1014749222472.
9. Kamynin V.L. (2013) The ınverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with ıntegral observation. *Mathematical Notes*. 94(2). pp. 205–213. DOI: 10.1134/S0001434613070201.
10. Kostin A.B. (2015) Recovery of the coefficient of u_t in the heat equation from a condition of nonlocal observation in time. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 55(1). pp. 85–100. DOI: 10.1134/S0965542515010121.
11. Kozhanov A.I. (2017) Parabolic equations with unknown time-dependent coefficients. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 57(6). pp. 956–966. DOI: 10.1134/S0965542517060082.
12. Liu Yang, Jian-Ning Yu, Zui-Cha Deng. (2008) An inverse problem of identifying the coefficient of parabolic equation. *Applied Mathematical Modelling.* 32(10). pp. 1984–1995. DOI: 10.1016/j.apm.2007.06.025.
13. Kerimov N.B., Ismailov M.I. (2012) An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 396(2). pp. 546–554. DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.06.046.
14. Engl H.W., Zou J. (2000) A new approach to convergence rates analysis of Tikhonov regularization for parameter identification in heat conduction. *Inverse Problems*. 16. pp. 1907–1923. DOI: 10.1088/0266-5611/16/6/319.
15. Deng Z.C., Qian K., Rao X.B., Yang L., Luo G.W. (2015) An inverse problem of identifying the source coefficient in a degenerate heat equation. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 23(3). pp. 498–517. DOI: 10.1080/17415977.2014.922079.

16. Dehghan M., Tatari M. (2006) Determination of a control parameter in a one-dimensional parabolic equation using the method of radial basis functions. *Mathematical and Computer Modelling*. 44(11–12). pp. 1160–1168. DOI: 10.1016/j.mcm.2006.04.003.
17. Vabishchevich P.N., Vasil'eva M.V. (2012) Explicit-implicit schemes for convection-diffusion-reaction problems. *Numerical Analysis and Applications*. 5(4). pp. 297–306. DOI: 10.1134/S1995423912040027.