

УДК 519.6 + 532.516

DOI 10.17223/19988621/50/10

Б.О. Цыденов

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОМПОНЕНТОВ СИСТЕМЫ
«НУТРИЕНТ – ФИТОПЛАНКТОН – ЗООПЛАНКТОН – ДЕТРИТ»
ВО ВРЕМЯ ЭВОЛЮЦИИ ВЕСЕННЕГО ТЕРМОБАРА¹**

Описана математическая модель, позволяющая численно воспроизводить взаимодействие элементов системы «нутриент–фитопланктон–зоопланктон–детрит» в период прогревания водоема. Получены пространственно-временные распределения концентрации биологических компонентов модели на примере озера Камлупс. Показано влияние термического режима речного притока на изменение биомассы фито-, зоопланктона, нутриента и детрита.

Ключевые слова: численное моделирование, термобар, планктон, нутриент, детрит, озеро Камлупс.

Во время весеннего прогревания водоема возникает явление термобара, представляющее собой погружение водных масс в узкой зоне [1]. Создавая специфические условия для жизнедеятельности планктонных сообществ, термобар оказывает огромное влияние на экосистему озер умеренных широт [2]. Для численного воспроизведения эффекта термобара используют двухмерные [3, 4, 5–7], квазидвухмерные [8–10] и трехмерные [11, 12] модели. Выбор модели зависит от цели исследования. Однако натурные наблюдения показывают, что при образовании и развитии термобара основные изменения происходят от берега (для случая озера Камлупс – от устья реки Томпсон) к центру озера. При этом характеристики в направлении, параллельном берегу (устью реки Томпсон), достаточно однородны. На этом основании полагают [13], что модель, в которой исключены все градиенты в направлении, параллельном берегу (устью реки Томпсон), должна качественно и правильно описывать физический процесс развития речного термобара. Поэтому для исследования динамики термобара достаточно применять квазидвухмерную модель, в которой используется такое приближение, переводящее задачу в двумерную, но учитывающую три компонента вектора скорости, причем компонента скорости вдоль однородного направления в результате влияния силы Кориолиса может в некоторых областях доминировать над другими компонентами [8].

Цель настоящей работы – разработка квазидвухмерной численной модели на основе модели «нутриент – фитопланктон – зоопланктон – детрит» Паркера [14], анализ влияния температурного режима речного притока на концентрацию биологических компонентов в озере Камлупс в период существования весеннего термобара.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60041 мол_а_дк.

Математическая модель

Негидростатическая квазидвухмерная математическая модель состоит из термогидродинамического и биологического модулей. Термогидродинамический модуль, включающий в себя уравнения количества движения, энергии, минерализации и турбулентных характеристик, детально описан в ранее опубликованной работе [15]. Биологический модуль воспроизводит перенос биомасс фито-, зоопланктона, нутриента и детрита с помощью конвективно-диффузионных уравнений

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial uP}{\partial x} + \frac{\partial wP}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial P}{\partial z} \right) + P(G - m_P - IZ)q;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial uZ}{\partial x} + \frac{\partial wZ}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + Z((1 - \gamma_N - \gamma_D)IP - m_Z)q;$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial uN}{\partial x} + \frac{\partial wN}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial N}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial N}{\partial z} \right) + (-GP - \gamma_N IPZ + C_0 D)q;$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial uD}{\partial x} + \frac{\partial wD}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial D}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial D}{\partial z} \right) + (m_P P + \gamma_D IPZ - C_0 D + m_Z Z)q,$$

где N , P , Z , D – концентрация нутриента, фитопланктона, зоопланктона, детрита соответственно; A_x и A_z – коэффициенты турбулентной диффузии в соответствующих направлениях. Для описания гидробиологического процесса в водоеме используется модель «нутриент – фитопланктон – зоопланктон – детрит» (N – P – Z – D) Паркера [14]. Схематическая диаграмма математической модели биологической системы, демонстрирующая связь между ее компонентами, представлена на рис. 1.

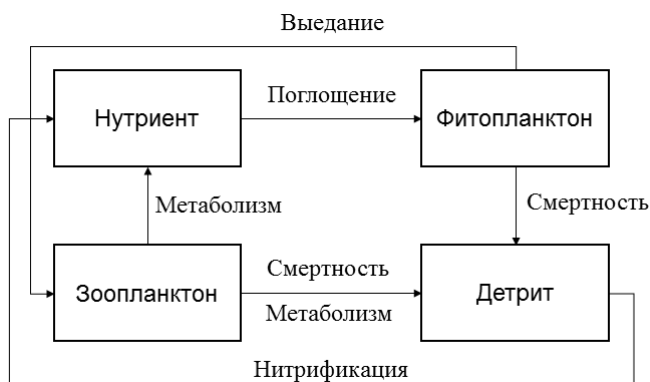


Рис. 1. Схема взаимодействия компонентов биологической системы

Fig. 1. Scheme of the interaction between biological system components

Согласно модели Паркера [14], увеличение биомассы фитопланктона происходит за счет поглощения нутриентов из водной среды (рис. 1). Часть экскреции зоопланктона переходит в фонд нутриентов, а часть – в детритный фонд. В процессе нитрификации продукты деградации детрита превращаются в нутриенты с постоянной скоростью. Фитопланктон, съеденный зоопланктоном, распределяется следующим образом: 40 % – в фонд нутриентов, 30 % – в детритный фонд и 30 % – в биомассу зоопланктона.

Также модель Паркера описывает процессы фотосинтеза с учетом проникновения света в эвфотическую зону. Скорость первичного продуцирования фитопланктона G определяется по формуле

$$G = V_m [(L_d/s_c) \exp\{1 - (L_d/s_c)\}][N/(N+k_s)].$$

Суточная поверхностная инсоляция вычисляется на основе закона нормально-го распределения с математическим ожиданием 0.5 сут и дисперсией 1/64 сут²:

$$L_s = \left[(s_{cm} \sqrt{2\pi} / 8) \right] N(0.5, 1/64).$$

Функция L_s принимает максимальное значение 150 Э·м²·сут⁻¹ в полдень.

Свет, проникающий на определенную глубину, рассчитывается по экспоненциальной зависимости с учетом затенения планктоном и детритом в водной толще между поверхностью ($z = L_z$) и глубиной $z = d$:

$$L_d = L_s \exp \left\{ -\eta d - S_s \int_d^{L_z} (P + Z + D) dz \right\}.$$

Задержка роста, связанная с доступом света, определяется по функции Стила [16] с коэффициентом светового насыщения s_c , равным 40 % от максимальной дневной инсоляции [14].

Смертность фитопланктона и множитель температурного ограничения вычисляются соответственно:

$$m_p = M \exp\{-(n_1 N)^2\};$$

$$q = 2.5^{(T-15)/10}.$$

Следует заметить, что m_p представляет физиологическую смертность фитопланктонных клеток в условиях нехватки питательных веществ. Благодаря множителю q , активное развитие биологической системы происходит в теплой водной среде.

Остальные параметры, входящие в расчетные формулы модели «нутриент – фитопланктон – зоопланктон – детрит», приведены в таблице [8].

Значения параметров N–P–Z–D-модели

Параметр	Наименование	Значение
V_m	Максимальная скорость роста фитопланктона	2.8 сут ⁻¹
η	Коэффициент ослабления света	0.15 м ⁻¹
k_s	Константа полунасыщения поглощения нутриентов	0.6 ммольN·м ⁻³
m_Z	Смертность зоопланктона	0.1 сут ⁻¹
I	Интенсивность питания зоопланктона	0.2 сут ⁻¹
M	Максимальная скорость смертности фитопланктона	0.5 сут ⁻¹
n_1	Коэффициент скорости смертности фитопланктона	1 (ммольN·м ⁻³) ⁻¹
γ_N	Доля неусвоенного питания зоопланктона, превращающегося в нутриент	0.4
γ_D	Доля неусвоенного питания зоопланктона, превращающегося в детрит	0.3
C_0	Скорость превращения детрита в нутриент	0.02 сут ⁻¹
S_s	Коэффициент самозатенения	0.02 (ммольN·м ⁻³) ⁻¹ м ⁻¹
s_c	Коэффициент светового насыщения	60 Э·м ² ·сут ⁻¹
s_{cm}	Коэффициент максимального светового поглощения	150 Э·м ² ·сут ⁻¹

Начальная концентрация фито-, зоопланктона, нутриента и детрита составляет 1.0, 1.0, 4.0 и 1.0 ммольN·м⁻³ соответственно [8]. Термическое состояние озера Камлупс и реки Томпсон соответствует весеннему режиму [17]. На поверхности озера задается тепловой поток, равный 170 Вт/м² [8].

Численный метод решения уравнений модели подробно изложен в работах [18, 19].

Результаты и обсуждение

В качестве области исследования рассматривается канадское озеро Камлупс (рис. 2, а). Расчётная область представляет собой упрощённую форму вертикального разреза водоема и имеет протяженность $L_x = 10$ км и глубину $L_z = 150$ м (рис. 2, б).

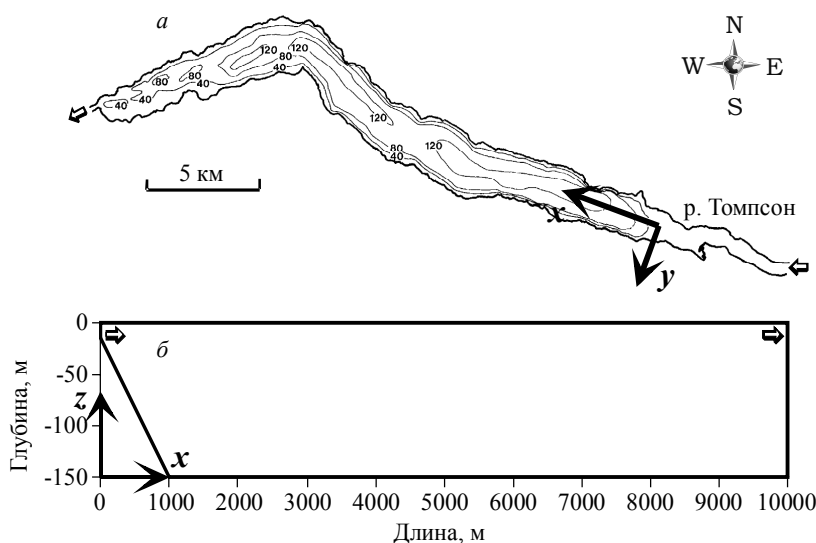


Рис. 2. Озеро Камлупс: а – батиметрия, б – вычислительная область
Fig. 2. Kamloops Lake: (a) bathymetry and (b) computational domain

Полученные на 8-е, 16-е и 24-е сутки значения биологических компонентов модели на поверхности водоема (рис. 3) хорошо согласуются с результатами Холланда и др. (рис. 13 в [8]). На 8-й день вычислительного эксперимента в области впадения реки в озеро наблюдается увеличение популяции фитопланктона (рис. 3, а). Более теплые речные воды способствуют быстрому росту биомассы фитопланктона. Это влечет за собой уменьшение нутриента на месте интенсивного цветения фитопланктона (рис. 3, б и в).

Согласно области расположения температуры максимальной плотности (изотерма 4 °C) и линиям тока (рис. 4, а и б), можно заключить, что термобар на 16-й день моделирования находится на расстоянии 1.7–1.8 км от устья речного притока. Фронтальное нисходящее течение (термобар), формирующееся при смешении теплых вод реки и холодных вод открытого озера, индуцирует циркуляцию (рис. 4, б) в теплоинертной области (справа от термобара). Локальный максимум концентрации фитопланктона (рис. 4, в) наблюдается в приповерхностном слое слева от термобара (в теплоактивной области). Видно, что на месте активного

роста фитопланктона происходит истощение нутриента (рис. 4, в). Опускное течение, инициированное термобаром, увлекает частицы зоопланктона (рис. 4, д) и детрита (рис. 4, е) в глубоководную зону озера.

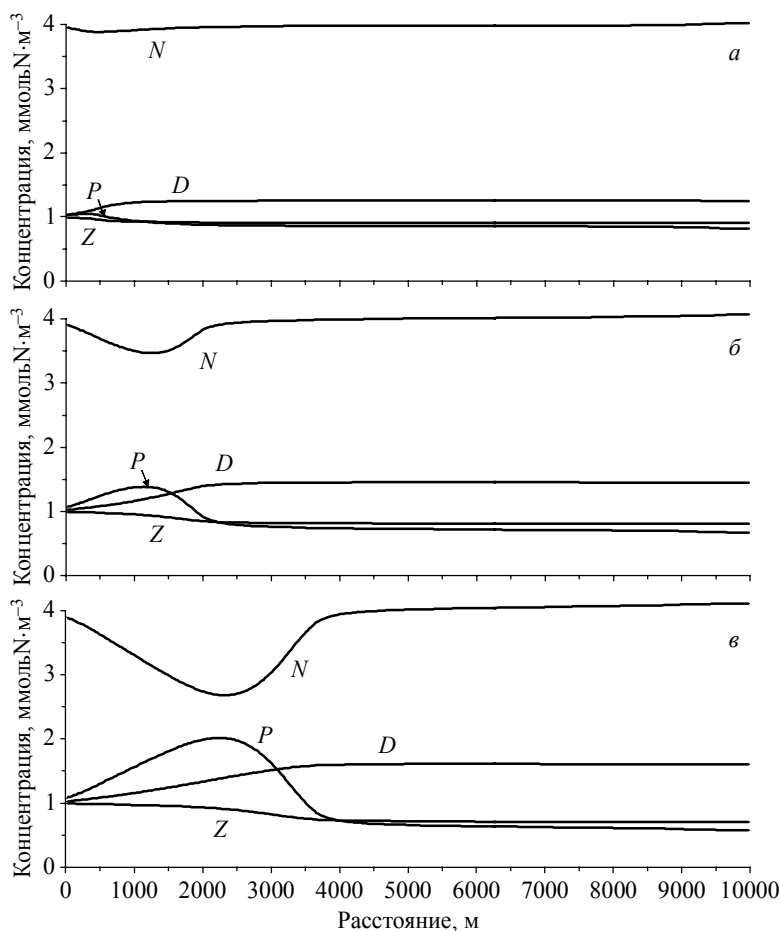


Рис. 3. Профили фито-, зоопланктона, нутриента и детрита на 8 (а), 16 (б) и 24 (в) сутки на глубине 4.5 м
Fig. 3. Profiles of phytoplankton, zooplankton, nutrient, and detritus after (а) 8, (б) 16, and (в) 24 days at 4.5 m depth

Сравнительный анализ представленных на рис. 3 профилей с ранее полученными по модели Франкса и др. результатами [20, рис. 3] показывает качественное различие. На особенность взаимодействия биологических компонентов в модели Паркера [14] влияют более сложные зависимости, описывающие процессы фотосинтеза, а также температурные условия водной среды. Если согласно модели Франкса и др. на 16-е сутки расчетов концентрация фитопланктона увеличивается до $4.5 \text{ ммоль N} \cdot \text{м}^{-3}$, а концентрация нутриента сокращается до $0.3 \text{ ммоль N} \cdot \text{м}^{-3}$ [20, рис. 3, б], то модель Паркера на том же временном разрезе дает следующие экстремальные значения данных компонентов: $1.4 \text{ ммоль N} \cdot \text{м}^{-3}$ и $3.5 \text{ ммоль N} \cdot \text{м}^{-3}$

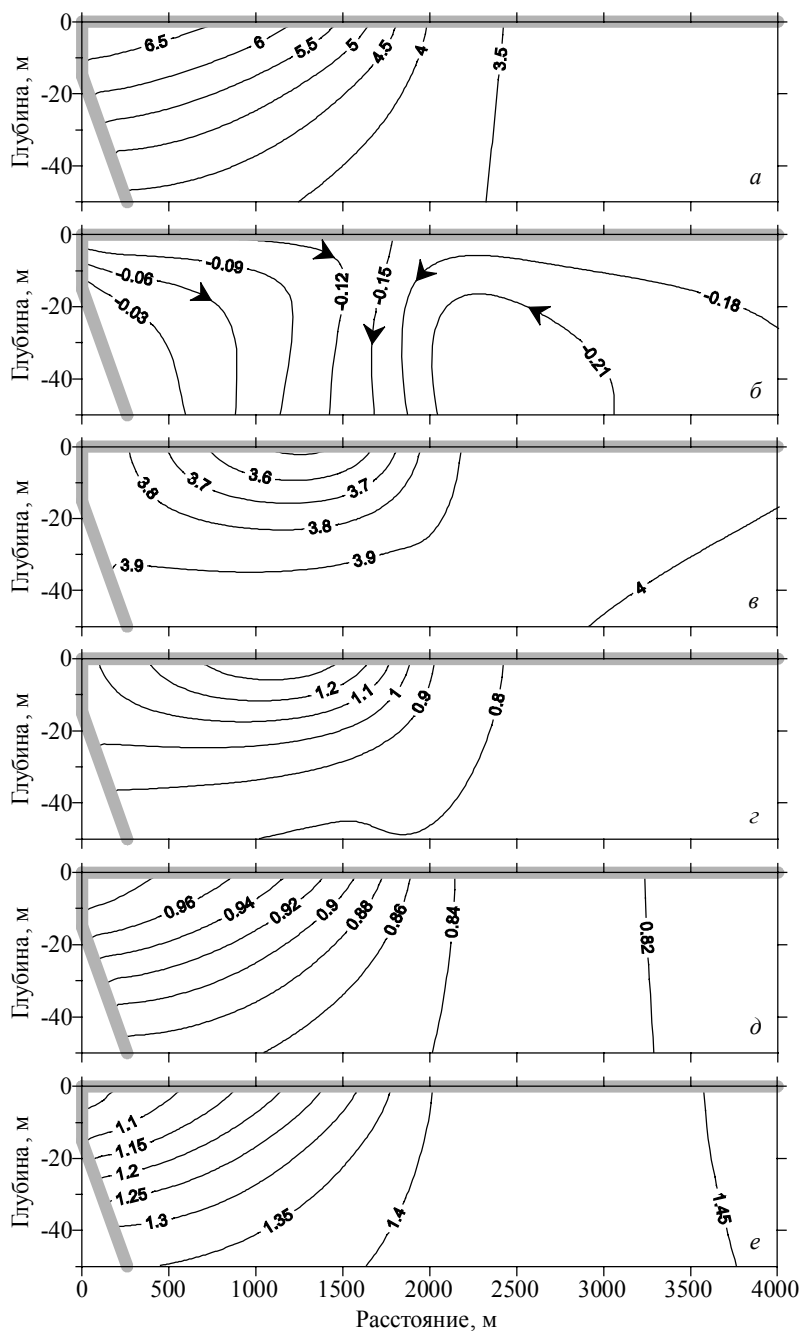


Рис. 4. Картина на 16-е сутки: *а* – изотермы [°C], *б* – линии тока [$\text{м}^2/\text{с}$], *в* – концентрация нутриента [$\text{ммольN}\cdot\text{м}^{-3}$], *г* – концентрация фитопланктона [$\text{ммольN}\cdot\text{м}^{-3}$], *д* – концентрация зоопланктона [$\text{ммольN}\cdot\text{м}^{-3}$], *е* – концентрация детрита [$\text{ммольN}\cdot\text{м}^{-3}$]

Fig. 4. Pattern after 16 days: (*a*) isotherms [°C], (*б*) streamlines [m^2/s], (*в*) nutrient concentrations [$\text{mmolN}\cdot\text{m}^{-3}$], (*г*) phytoplankton concentrations [$\text{mmolN}\cdot\text{m}^{-3}$], (*д*) zooplankton concentrations [$\text{mmolN}\cdot\text{m}^{-3}$], and (*е*) detritus concentrations [$\text{mmolN}\cdot\text{m}^{-3}$]

соответственно (рис. 3, б). Кроме того, важно заметить, что полученные в данной работе максимальные значения концентрации фитопланктона значительно смещены в сторону прибрежной акватории водоема, где вода имеет более высокую температуру.

Для оценки влияния термического режима реки на концентрацию планктона проведены вычислительные эксперименты с прогревом вод речного притока на 0.3 и 0.4 °C в день. На основе результатов вычислительных экспериментов (рис. 5) можно заключить, что в рамках модели Паркера температурный режим является определяющим фактором роста биомассы фитопланктона. Интенсивный прогрев поверхностных слоев за счет поступления теплых вод из реки способствует бурному цветению фитопланктона и снижению количества питательных веществ.

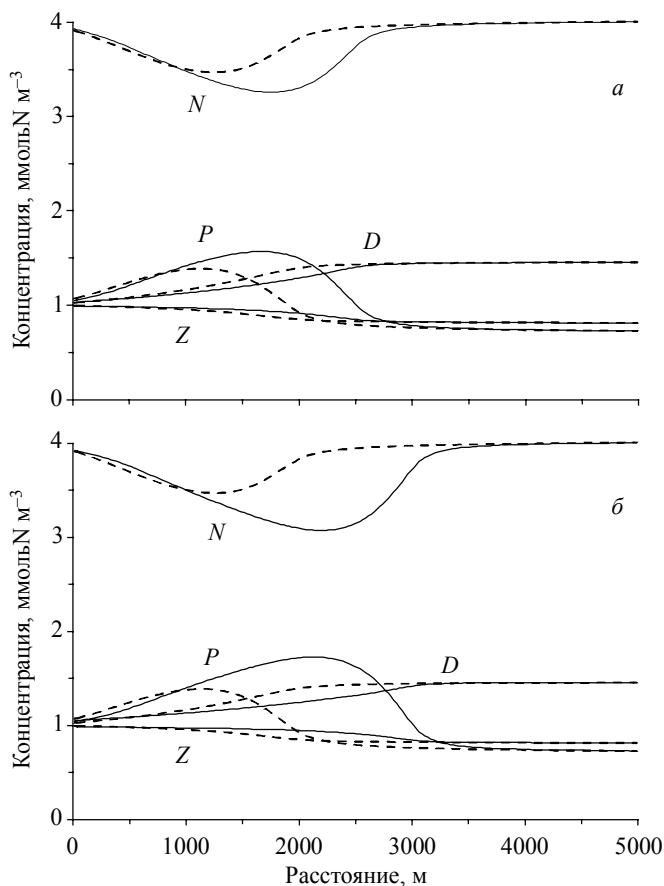


Рис. 5. Профили нутриента (*N*), фитопланктона (*P*), зоопланктона (*Z*) и детрита (*D*) на 16-е сутки моделирования (глубина 4.5 м) в вычислительных экспериментах с прогревом вод речного притока на 0.3 °C (*a*) и 0.4 °C (*б*) в день. Пунктиром показаны профили биологических компонентов, соответствующие эксперименту с прогревом вод речного притока на 0.2 °C в день

Fig. 5. Profiles of nutrient (*N*), phytoplankton (*P*), zooplankton (*Z*), and detritus (*D*) after 16 days (at 4.5 m depth) in simulations with the river inflow warmed by (*a*) 0.3 and (*б*) 0.4 °C day⁻¹. Dash line indicates the results of simulation with the river inflow warmed by 0.2 °C day⁻¹

Кроме того, термический режим речного притока влияет на скорость продвижения термобара в центральную часть водоема, что отражается на местоположении максимальных значений концентрации фитопланктона (и минимальных значений концентрации нутриента). Важно также заметить, что граничные температурные условия в устье реки не оказывают сильного влияния на изменение популяции зоопланктона и частиц детрита.

Заключение

Представленная в работе математическая модель позволяет адекватно воспроизводить весеннюю динамику компонентов системы «нутриент – фитопланктон – зоопланктон – детрит». Результаты моделирования свидетельствуют о максимальной концентрации фитопланктона в теплоактивной области водоема. С помощью вычислительных экспериментов с различными температурными условиями речного притока установлено, что интенсивный прогрев поверхностных слоев за счет поступления теплых вод из реки способствует бурному цветению фитопланктона и существенному снижению количества нутриента в соответствующей области. Термические граничные условия в устье реки имеют меньший эффект на изменение биомассы зоопланктона и детрита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохина Н.С., Показеев К.В. Уникальное природное явление – термобар // Земля и Вселенная. 2015. № 6. С. 78–88.
2. Mortimer C.H. Lake hydrodynamics // *Mitteilungen Int. Ver. Limnol.* 1974. No. 20. P. 124–197.
3. Blokhina N.S., Ordanovich A.E., Savell'eva O.S. Model of Formation and Development of Spring Thermal Bar // *Water Resources*. 2001. No. 28(2). P. 201–204. DOI: 10.1023/A:1010339919712
4. Holland P.R., Kay A., Botte V. A numerical study of the dynamics of the riverine thermal bar in a deep lake // *Environmental Fluid Mechanics*. 2001. No. 1(3). P. 311–332. DOI: 10.1023/A:1013106526253
5. Бочаров О.Б., Овчинникова Т.Э. О термогравитационной конвекции в прибрежной зоне глубокого озера в период весеннего прогревания // *Вычисл. технологии*. 1998. Т. 3. № 4. С. 3–12.
6. Квон В.И., Квон Д.В. Численный анализ механизма глубокого проникновения поверхностных вод в прибрежной зоне озера в период весенне-летнего термобара // *Вычисл. технологии*. 1997. Т. 2. № 5. С. 46–56.
7. Farrow D.E. A numerical model of the hydrodynamics of the thermal bar // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 303. P. 279–295. DOI: 10.1017/S0022112095004277.
8. Holland P.R., Kay A., Botte V. Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake // *J. Mar. Syst.* 2003. No. 43(1–2). P. 61–81. DOI: 10.1016/S0924-7963(03)00089-7
9. Malm J. Spring circulation associated with the thermal bar in large temperate lakes // *Nordic Hydrology*. 1995. V. 26. No. 4–5. P. 331–358.
10. Tsvetova E.A. Effect of the Coriolis force on convection in a deep lake: numerical experiment // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1998. V. 39. No. 4. P. 593–599.
11. Tsvetova E.A. Mathematical modelling of Lake Baikal hydrodynamics // *Hydrobiologia*. 1999. No. 407. P. 37–43. DOI: 10.1023/A:1003766220781.
12. Demchenko N.Yu., Chubarenko I.P. Horizontal exchange across the thermal bar front: laboratory and numerical modeling // *Water Quality Res. J. Can.* 2012. V. 47. No. 3–4. P. 436–450. DOI: 10.2166/wqrj.2012.037.
13. Цветова Е.А. Численное моделирование гидродинамических процессов, ответственных за распространение загрязняющих примесей в глубоком водоёме // *Вычисл. технологии*. 1997. Т. 2. № 2. С. 102–108.

14. Parker R.A. Eddy diffusion of phytoplankton and nutrients: Estimating coefficients from simulated and observed vertical distributions // *Journal of Plankton Research*. 1991. No. 13(4). P. 815–830. DOI: 10.1093/plankt/13.4.815.
15. Tsydenov B.O., Kay A., Starchenko A.V. Numerical modeling of the spring thermal bar and pollutant transport in a large lake // *Ocean Modelling*. 2016. No. 104. P. 73–83. DOI: 10.1016/j.ocemod.2016.05.009
16. Steele J.H. Notes on some theoretical problems in production ecology // *Mem. Ist. Ital. Idrobiol.* Dr. Marco de Marchi. 1965. No. 18 (SUPPL.). P. 383–398.
17. John B.E.St., Carmack E.C., Daley R.J., Gray C.B.J., Pharo C.H. The limnology of Kamloops Lake, B.C. Vancouver, 1976. 167 p.
18. Цыденов Б.О. Численное моделирование эффекта весеннего термобара в глубоком озере: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск. 2013. 145 с.
19. Цыденов Б.О. Численное исследование распространения примеси в пресном озере на основе распределения мутности воды // *Вычислительные технологии*. 2017. Т. 22. № S1. С. 113–124.
20. Цыденов Б.О. Численное воспроизведение гидробиологических процессов в период развития весеннего термобара на основе модели «нутриент – фитопланктон – зоопланктон» // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2016. № 3(41). С. 86–97. DOI: 10.17113/19988611/41/9

Статья поступила 17.03.2017 г.

Tsydenov B.O. (2017) NUMERICAL MODELING OF THE INTERACTION BETWEEN NUTRIENT-PHYTOPLANKTON-ZOOPLANKTON-DETRITUS SYSTEM COMPONENTS DURING THE SPRING THERMAL BAR *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 112–121

DOI 10.17223/19988621/50/10

In this paper, a nonhydrostatic 2.5D numerical model for simulating the hydrobiological processes during the spring riverine thermal bar in Kamloops Lake (British Columbia, Canada) is described. A thermal bar is a narrow zone in a lake where the water, which has a maximum density, sinks from the surface to the bottom. Numerical modeling of the dynamics of plankton ecosystems is implemented using the nutrient – phytoplankton – zooplankton – detritus model of Parker (1991). The hydrodynamic model, which takes into account an effect of the Coriolis force, is written in the Boussinesq approximation with the continuity, momentum, energy, and salinity equations. The data obtained in numerical experiments show a good agreement with that of Holland et al. (2003). Simulation results demonstrate that the maximum concentrations of phytoplankton are in the thermoactive (the inshore side of a thermal bar) region of the lake. Calculations under variable temperature conditions of the Thompson River show that the warm river waters facilitate a rapid growth of the phytoplankton and leads to a significant reduction of the nutrient in this area. However, these thermal boundary conditions have a little impact on the changes in zooplankton and detritus biomass.

Keywords: plankton, thermal bar, mathematical model, numerical experiment, Kamloops Lake.

TSYDENOV Bair Olegovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tsydenov@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Blokhina N.S., Pokazeev K.V. (2015) *Unikal'noe prirodnoe yavlenie – termobar* [A unique natural phenomenon is the thermal bar]. *Zemlya i Vselennaya*. 6. pp. 78–88.
2. Mortimer C.H. (1974) Lake hydrodynamics. *Mitteilugen Int. Ver. Limnol.* 20. pp. 124–197.
3. Blokhina N.S., Ordanovich A.E., Savel'eva O.S. (2001) Model of formation and development of spring thermal bar. *Water Resources*. 28(2). pp. 201–204. DOI: 10.1023/A:1010339919712.

4. Holland P.R., Kay A., Botte V. (2001) A numerical study of the dynamics of the riverine thermal bar in a deep lake. *Environ. Fluid Mech.* 1(3). pp. 311–332. DOI: 10.1023/A:1013106526253.
5. Bocharov O.B., Ovchinnikova T.E. (1998) O termogravitatsionnoy konveksii v pribrezhnoy zone glubokogo ozera v period vesennego progrevaniya [On the thermo-gravity convection in the near-shore zone of a deep lake in the spring warming period]. *Vychislitelnye tekhnologii.* 3(4). pp. 43–12.
6. Kvon V.I., Kvon D.V. (1997) Chislennyy analiz mekhanizma glubokogo proniknoveniya poverkhnostnykh vod v pribrezhnoy zone ozera v period vesenne-letnego termobara [Numerical analysis of a deep penetration mechanism of surface waters during the spring-summer thermal bar]. *Vychislitelnye tekhnologii.* 2(5). pp. 46–56.
7. Farrow D.E. (1995) A numerical model of the hydrodynamics of the thermal bar. *J. Fluid Mech.* 303. pp. 279–295. DOI: 10.1017/S0022112095004277.
8. Holland P.R., Kay A., Botte V. (2003) Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake. *J. Mar. Syst.* 43(1–2). pp. 61–81. DOI: 10.1016/S0924-7963(03)00089-7.
9. Malm J. (1995) Spring circulation associated with the thermal bar in large temperate lakes. *Nordic Hydrology.* 26(4–5). pp. 331–358.
10. Tsvetova E.A. (1998) Effect of the Coriolis force on convection in a deep lake: numerical experiment. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 39(4). pp. 593–599.
11. Tsvetova E.A. (1999) Mathematical modelling of Lake Baikal hydrodynamics. *Hydrobiologia.* 407. pp. 37–43. DOI: 10.1023/A:1003766220781.
12. Demchenko N.Yu., Chubarenko I.P. (2012) Horizontal exchange across the thermal bar front: laboratory and numerical modeling. *Water Quality Res. J. Can.* 47(3–4). pp. 436–450. DOI: 10.2166/wqrjc.2012.037.
13. Tsvetova E.A. (1997) Chislennoe modelirovanie gidrodinamicheskikh protsessov, otvetstvennykh za rasprostranenie zagryaznyayushchikh primesey v glubokom vodoeme [Numerical modelling of hydrodynamic processes responsible for the propagation of contaminants in a deep basin]. *Vychislitelnye tekhnologii.* 2(2). pp. 102–108.
14. Parker R.A. (1991) Eddy diffusion of phytoplankton and nutrients: Estimating coefficients from simulated and observed vertical distributions. *J. Plankton Res.* 13(4). pp. 815–830. DOI: 10.1093/plankt/13.4.815.
15. Tsydenov B.O., Kay A., Starchenko A.V. (2016) Numerical modeling of the spring thermal bar and pollutant transport in a large lake. *Ocean Modelling.* 104. pp. 73–83. DOI: 10.1016/j.ocemod.2016.05.009.
16. Steele J.H. (1965) Notes on some theoretical problems in production ecology. *Mem. Ist. Ital. Idrobiol. Dr. Marco de Marchi.* 18 (suppl.). pp. 383–398.
17. John B.E.St., Carmack E.C., Daley R.J., Gray C.B.J., Pharo C.H. (1976) *The Limnology of Kamloops Lake, B.C.* Vancouver.
18. Tsydenov B.O. (2013) *Chislennoe modelirovanie effekta vesennego termobara v glubokom ozere* [Numerical modeling of the effect of spring thermal bar in a deep lake]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Tomsk.
19. Tsydenov B.O. (2017) Chislennoe issledovanie rasprostraneniya primesi v presnom ozere na osnove raspredeleniya mutnosti vody [A numerical study of impurity propagation in a fresh-water lake on the basis of water turbidity distribution]. *Vychislitelnye tekhnologii.* 22(S1). pp. 113–124.
20. Tsydenov B.O. (2016) Chislennoe vosпроизvedenie gidrobiologicheskikh protsessov v period razvitiya vesennego termobara na osnove modeli “nutrient – fitoplankton – zooplankton” [Numerical simulation of hydrobiological processes during the spring thermal bar on the basis of the nutrient – phytoplankton – zooplankton model]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 3(41). pp. 86–97. DOI: 10.17223/19988621/41/9.