МАТЕМАТИКА

УДК 512.552+512.643.8 MSC: 15B9, 15A06, 15A24, 16S50
DOI 10.17223/19988621/52/1

Ц.Д. Норбосамбуев

РАНГ ФОРМАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ. СИСТЕМА ФОРМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ДЕЛИТЕЛИ НУЛЯ

Вводится понятие ранга формальной матрицы со значениями в данном коммутативном кольце и рассматриваются системы формальных линейных уравнений. Приводятся некоторые свойства ранга. Получены необходимые и достаточные условия существования решения однородной системы формальных линейных уравнений. Находится условие, при котором формальная матрица будет левым или правым делителем нуля.

Ключевые слова: *кольцо, формальная матрица, ранг формальной матрицы, система формальных линейных уравнений.*

Везде далее R – коммутативное кольцо с единицей; R^m – R-модуль всех вектор-столбцов длины m; $M(n\times m, R)$ – множество матриц размера $n\times m$ с элементами из кольца R; $\mathrm{Col}_i(A)$ и $\mathrm{Row}_j(A)$ – i-й столбец и j-я строка матрицы A соответственно; $K = M(n, R, \Sigma)$ – кольцо формальных матриц порядка n над кольцом R, с системой множителей $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1,\ldots,n\}$.

Подробно познакомиться с формальными матрицами и кольцами формальных матриц можно в [1–4].

1. Ранг формальной матрицы

Напомним сначала определение ранга матрицы над произвольным коммутативным кольцом с единицей (см.[3]).

Пусть $A\in M(n\times m, R)$.

Определение 1. Для всякого $t = 1,\ldots,r = \min\{m,n\}$ через $I_t(A)$ будем обозначать идеал в R, порожденный всеми $(t\times t)$-минорами матрицы A.

Таким образом, для нахождения $I_t(A)$ необходимо вычислить определители всех $(t\times t)$-подматриц в матрице A и затем взять идеал, порожденный ими. По теореме Лапласа всякий $(t+1)\times(t+1)$-минор матрицы A лежит в $I_t(A)$. Поэтому имеет место следующая цепочка вложений идеалов в R:

$$I_r(A)\subseteq I_{r-1}(A)\subseteq \ldots \subseteq I_2(A)\subseteq I_1(A)\subseteq R .$$

Кажется логичным продолжить определение идеала $I_t(A)$ на все целые числа следующим образом:

$$I_t(A)=\begin{cases}(0), & \text{если } t>\min\{m,n\};\\ R, & \text{если } t\le 0.\end{cases}$$

Тогда $0 = I_{r+1}(A)\subseteq I_r(A)\subseteq I_{r-1}(A)\subseteq \ldots \subseteq I_2(A)\subseteq I_1(A)\subseteq I_0(A)=R$.

Определение 2. Аннулятором непустого множества S в кольце R называется множество $Ann_R(S) = \{r \in R \mid s \cdot r = 0, \forall s \in S\}$.

Найдя аннуляторы идеалов $I_t(A)$, получим вложения:

$$(0) = Ann_R(R) = Ann_R(I_0(A)) \subseteq Ann_R(I_1(A)) \subseteq Ann_R(I_2(A)) \subseteq \ldots$$
$$\ldots \subseteq Ann_R(I_r(A)) \subseteq Ann_R(I_{r+1}(A)) = Ann_R((0)) = R.$$

Заметим, что если $Ann_R(I_t(A)) \neq (0)$, то $Ann_R(I_k(A)) \neq (0)$ для всех $k \geq t$.

Определение 3. Рангом матрицы $A \in M(n \times m, R)$, обозначаемым через $rk(A)$, назовем следующее число: $rk(A) = \max\{t \in \mathbb{Z} \mid Ann_R(I_t(A)) = (0)\}$.

Теперь определим ранг формальной матрицы в кольце $K = M(n, R, \Sigma)$, введённом выше. Далее увидим, что на самом деле можно определить n рангов.

Пусть $A \in K$. Зафиксируем число $l \in \{1, \ldots, n\}$. Существует гомоморфизм колец $\eta_l : K \to M(n, R)$, $(a_{ij}) \mapsto (t_{ij} \cdot a_{ij})$, где $t_{ij} = s_{ijl} \in \Sigma$ (см. [1]). Другими словами, $\eta_l(a_{ij}) = (s_{ijl} \cdot a_{ij})$.

Определение 4. Назовем Σ-рангом, l-рангом или просто рангом $r_l(A)$ матрицы $A \in K$ ранг матрицы $\eta_l(A) \in M(n, R)$. То есть $r_l(A) = rk(\eta_l(A))$. Подробнее – $r_l(A) = \max\{t \in \mathbb{Z} \mid Ann_R(I_t(\eta_l(A))) = (0)\}$.

Итак, имеем n рангов – $r_1(A), r_2(A), r_3(A), \ldots, r_n(A)$ матрицы $A \in K$.

Замечание 1. Эти ранги у одной и той же матрицы могут не совпадать для разных $l \in \{1, \ldots, n\}$.

Пусть теперь $A \in M(m \times n, R)$, то есть A – прямоугольная матрица размера $m \times n$. Определим ранг матрицы A относительно кольца формальных матриц $K = M(n, R, \Sigma)$.

Пусть $m<n$. Тогда можно «дополнить» матрицу A до матрицы порядка n, дописав к A снизу $(n-m)$ нулевых строк. Полученную матрицу будем обозначать через $\left(\frac{A}{0}\right)$:

$$\left(\frac{A}{0}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & \ldots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаем $r_l(A) = r_l\left(\frac{A}{0}\right)$.

Теперь пусть $m>n$. Также «дополним» матрицу A до матрицы порядка n, дописав к A справа $(m-n)$ нулевых столбцов. Полученную матрицу будем обозначать через $(A \mid 0)$:

$$(A \mid 0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаем $r_l(A) = r_l(A \mid 0)$.

Приведем далее несколько простых фактов, непосредственно вытекающих из определения ранга формальной матрицы.

Лемма 1. Пусть $A \in M(m \times n, R)$, $K = M(n, R, \Sigma)$ – кольцо формальных матриц. Имеют место следующие соотношения и импликации для любого фиксированного $l \in \{1,\dots,n\}$:

1) $0 \le r_l(A) \le \min\{m,n\}$;

2) $r_l(A) = r_l(PAQ), \forall P,Q \in U(M(n,R,\Sigma))$;

3) $r_l(A) = 0 \Leftrightarrow Ann_R(I_1(\eta_l(A))) \ne (0)$;

4) Если $m = n$, то $r_l(A) < n \Leftrightarrow d(A) \in Z(R)$, где $d(A)$ – определитель формальной матрицы A, $Z(R)$ – множество делителей нуля кольца R.

Доказательство. Пункты 1), 3) и 4) прямо следуют из определения Σ-ранга формальной матрицы и леммы 4.11 в [3].

2) Для всяких матриц $B \in M(m \times p, R)$ и $C \in M(p \times n, R)$ справедлив следующий факт [5]: $I_t(BC) \subseteq I_t(B) \cap I_t(C)$, $\forall t \in \mathbb{Z}$. Теперь можем заключить: $I_t(\eta_l(PA)) \subseteq I_t(\eta_l(A)) = I_t(\eta_l(P^{-1}(PA))) \subseteq I_t(\eta_l(PA))$, то есть $I_t(\eta_l(PA)) = I_t(\eta_l(A))$, $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\forall l \in \{1,\dots,n\}$. Аналогично можем проверить равенство: $I_t(\eta_l(PAQ)) = I_t(\eta_l(PA))$, $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\forall l \in \{1,\dots,n\}$. Откуда прямо следует: $r_l(A) = r_l(PAQ), \forall P,Q \in U(M(n,R,\Sigma))$. □

Следствие 1. Так как определитель формальной матрицы не зависит от выбора номера $l \in \{1,\dots,n\}$, то из пункта 4) леммы 1 вытекает, что если $r_l(A) < n$ хотя бы для одного l, то он не равен n ни для какого другого номера $k \in \{1,\dots,n\}$.

2. Системы формальных линейных уравнений

Пусть $A \in M(m \times n, R)$ и $m<n$. Под системой формальных линейных уравнений (СФЛУ) понимаем матричное уравнение

$$\left(\frac{A}{0}\right) \circ X_l = B_l,$$

где X_l – квадратная матрица порядка n с элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$ в l-м столбце и нулями на всех остальных местах, B_l – аналогичная матрица, но с элементами $b_1, b_2, \dots, b_n$. То есть, в полном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. В данном случае в l-м столбце матрицы B_l последние $n-m$ элементов всегда равны нулю.

Если $A \in M(m \times n, R)$ и $m>n$, то, аналогично, системой формальных матричных уравнений назовем матричное уравнение:

$$(A \mid 0) \circ X_l = B_l,$$

где X_l – квадратная матрица порядка m с элементами $x_1,x_2,\dots,x_n,0,\dots,0$ в l-м столбце и нулями на всех остальных местах, B_l – квадратная матрица порядка m с элементами $b_1,b_2,\dots,b_m$ в l-м столбце и нулями на всех остальных местах.

В частности, при $m=n$, то есть, если A – квадратная матрица, имеем систему $A\circ X_l=B_l$, или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее везде будем писать $A\circ X_l=B_l$. Если матрица A прямоугольная, то дописывая в систему формальных линейных уравнений нулевые строки или столбцы всегда можем получить систему с квадратной матрицей.

Перемножая матрицы A и X_l, имеем равенство

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{k=1}^{n} s_{1kl}a_{1k}x_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{k=1}^{n} s_{2kl}a_{2k}x_k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{k=1}^{n} s_{nkl}a_{nk}x_k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Замечание 4. В зависимости от выбора $l\in\{1,\dots,n\}$ получим n различных СФЛУ, не обязательно эквивалентных между собой.

Предложение 1. Система формальных линейных уравнений $A\circ X_l=B_l$ эквивалента обычной системе линейных уравнений $\eta_l(A)\cdot X=B$ над кольцом R, где X и B – вектор-столбец неизвестных и вектор-столбец $(b_1,b_2,\dots,b_n)^{\mathrm{T}}$ длины n соответственно.

Доказательство. Действительно, отбросив в равенстве $(*)$ нулевые столбцы, получим n линейных уравнений над R, которые можно объединить в систему

$$\begin{cases} s_{11l}a_{11}x_1+s_{12l}a_{12}x_2+\dots+s_{1nl}a_{1n}x_n=b_1 \\ s_{21l}a_{21}x_1+s_{22l}a_{22}x_2+\dots+s_{2nl}a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ s_{n1l}a_{n1}x_1+s_{n2l}a_{n2}x_2+\dots+s_{nnl}a_{nn}x_n=b_n \end{cases}.$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} s_{11l}a_{11} & s_{12l}a_{12} & \dots & s_{1nl}a_{1n} \\ s_{21l}a_{21} & s_{22l}a_{22} & \dots & s_{2nl}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1l}a_{n1} & s_{n2l}a_{n2} & \dots & s_{nnl}a_{nn} \end{pmatrix}$$

является образом матрицы A относительно гомоморфизма η_l.

Очевидно, что решение этой системы $\xi\in R^n$ будет решением и для СФЛУ $A\circ X_l=B_l$, если записать его в виде матрицы с нулями везде, кроме l-го столбца, в который нужно вписать вектор $\xi\in R^n$. □

Если $B_l = 0$, то система $A \circ X_l = 0$ называется однородной. У такой системы всегда имеется, по крайней мере, одно решение, а именно $X_l = 0$, называемое тривиальным или нулевым.

Следующий результат, являющийся аналогом теоремы Маккоя [7], дает необходимые и достаточные условия для существования нетривиального решения однородной системы формальных линейных уравнений.

Теорема 1. Пусть $A \in M(m \times n, R)$. Однородная СФЛУ $A \circ X_l = 0$ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $r_l(A) < \min\{m,n\}$.

Доказательство. Согласно предложению 1, однородная система $A \circ X_l = 0$ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда имеет нетривиальное решение однородная система $\eta_l(A) \cdot X = 0$. Тогда по теореме Маккоя (см. [5], теорема 5.3) последнее эквивалентно неравенству $rk(\eta_l(A)) < \min\{m,n\}$. Осталось заметить, что $r_l(A) = rk(\eta_l(A))$ по определению ранга $r_l(A)$. □

Следствие 2. Однородная СФЛУ имеет нетривиальное решение, если количество уравнений в ней меньше числа неизвестных.

Доказательство. Действительно, пусть $A \circ X_l = 0$ – система, в которой количество уравнений меньше числа неизвестных, то есть $m < n$. По пункту 1) леммы 1 $r_l(A) \le \min\{m,n\} = m < n$. Тогда по теореме 1 система $A \circ X_l = 0$ имеет нетривиальное решение. □

Далее будем говорить о неоднородных системах, то есть B_l – не обязательно нулевая матрица.

Комбинируя предложение 1 и теорему 5.17 из [5], несложно убедиться в том, что правило Крамера остается справедливым для СФЛУ.

Теорема 2 (Правило Крамера). Пусть $A \in K$ и $d(A) \in U(R)$, другими словами, пусть A – обратимая формальная матрица. Тогда для любой матрицы B_l с l-м столбом $\mathrm{Col}_l(B_l) = (b_1, b_2, ..., b_n)^T \in R^n$ и нулями на всех остальных местах уравнение $A \circ X_l = B_l$ имеет единственное решение – матрицу $\Lambda_l \in K$ с l-м столбцом $\mathrm{Col}_l(\Lambda_l) = (y_1, y_2, ..., y_n)^T \in R^n$, где

$$y_j = \mathrm{d}(A)^{-1} \cdot \det\begin{pmatrix} s_{11l}a_{11} & \dots & s_{1,j-1,l}a_{1j-1} & b_1 & s_{1,j+1,l}a_{1j+1} & \dots & s_{1nl}a_{1n} \\ s_{21l}a_{21} & \dots & s_{2,j-1,l}a_{2j-1} & b_2 & s_{2,j+1,l}a_{2j+1} & \dots & s_{2nl}a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1l}a_{n1} & \dots & s_{n,j-1,l}a_{nj-1} & b_n & s_{n,j+1,l}a_{nj+1} & \dots & s_{nnl}a_{nn} \end{pmatrix}, \ \forall j = 1, ..., n,$$

и нулями на всех остальных местах.

Итак, если A – обратимая формальная матрица, то СФЛУ $A \circ X_l = B_l$ имеет единственное решение для любой $B_l \in K$. Следующая теорема дает необходимые условия, при которых уравнение $A \circ X_l = B_l$ имеет решение для любой $A \in M(m \times n, R)$ и любой $B_l \in K$.

Теорема 3. Пусть $A \in M(m \times n, R)$. Допустим, что СФЛУ $A \circ X_l = B_l$ имеет решение. Тогда $I_t(\eta_l(A)) = I_t(\eta_l(A) \mid \mathrm{Col}_i(B_l))$, для любого $t \in \{1, ..., n\}$, где $(\eta_l(A) \mid \mathrm{Col}_i(B_l))$ – матрица $\eta_l(A)$ с приписанным справа l-м столбцом матрицы B_l.

Доказательство этой теоремы следует из предложения 1 и теоремы 5.21 в [5].

Замечание 5. В теореме 3 мы могли сразу считать, что $m \le n$.

Доказательство. Действительно, пусть $A \in M(m \times n, R)$ и $m>n$. Легко видеть, что $I_t(A) = I_t(A \mid 0)$, где $A \mid 0$ – матрица A с дописанными справа $(m–n)$ нулевыми столбцами. Матрица $A \mid 0$ имеет размерность $n \times n$. Смысл вышесказанного в том, что, переходя от A к $A \mid 0$, можем, без потери общности, считать, что $m \le n$. □

В общем случае выполнение равенства $I_t(\eta_l(A)) = I_t(\eta_l(A) \mid \mathrm{Col}_i(B_l))$ не гарантирует существование решения для системы $A \circ X_l = B_l$. Следующий результат, аналогичный теореме Камиона – Леви – Манна [6] для систем линейных уравнений над кольцом R, дает достаточные условия для разрешимости СФЛУ $A \circ X_l = B_l$.

Можем полагать $B_l \neq 0$ и $m \le n$.

Через $I_m(\eta_l(A) \mid B)^*$ будем обозначать идеал в R, порождаемый всеми $(m \times m)$-минорами матрицы$(\eta_l(A) \mid \mathrm{Col}_i(B_l))$, которые включают элементы последнего столбца. Другими словами, $I_m(\eta_l(A) \mid B)^*$ порождается множеством $\{\Delta(i_1,...,i_m; j_1,..., j_{m-1}, n+1) \mid 1 \le j_1 < ... < j_{m-1} \le n\}$.

Теорема 4. Пусть $A \in M(m \times n, R)$, $m \le n$ и $r_l(A) = 0$. Допустим, что в R существует идеал W и неделитель нуля $z \in R$ такие, что $WI_m(\eta_l(A) \mid B)^* \subseteq Rz \subseteq WI_m(\eta_l(A))$. Тогда СФЛУ $A \circ X_l = B_l$ имеет решение.

Доказательство этой теоремы следует из предложения 1 и теоремы 5.25 в [3].

Следствие 3. Пусть матрица $A \in M(m \times n, R)$ такая, что $I_m(\eta_l(A)) = R$ для некоторого фиксированного $l \in \{1,...,n\}$. Тогда для любой $B_l \in K$ СФЛУ $A \circ X_l = B_l$ имеет решение.

3. Делители нуля в кольце формальных матриц

Формальная матрица A из кольца $K = M(n, R, \Sigma)$ формальных матриц порядка n над кольцом R с системой множителей $\Sigma = \{s_{ijk} \in C(R) \mid i, j, k = 1,...,n\}$ называется левым делителем нуля, если $A \circ B = 0$ для некоторой ненулевой формальной матрицы B из K. Аналогично, $A \in K$ – правый делитель нуля, если $B \circ A = 0$ для какой-то ненулевой $B \in K$. Следующая теорема характеризует делители нуля в K.

Теорема 5. Пусть $A \in K$. Эквивалентны следующие утверждения:

1) A – левый делитель нуля в K;

2) A – правый делитель нуля в K;

3) $d(A) \in Z(R)$;

4) $r_l(A) < n$ для любого $l \in \{1,\ldots,n\}$.

Доказательство. Схема доказательства: 4)↔3), 4)→1), 2)→3), 1)→2).

4)↔3) По лемме 1.

4)→1). Так как $r_l(A) < n$ для любого $l \in \{1,\ldots,n\}$, то по теореме 1 СФЛУ $A \circ X_l = 0$ имеет нетривиальное решение. Таким образом, A – левый делитель нуля в K.

2)→3). Пусть $\hat{R}$ – кольцо частных кольца R. Ясно, что существует кольцо формальных матриц $\hat{K} = M(n, \hat{R}, \Sigma)$. Считаем, что $R \subseteq \hat{R}$ и $K \subseteq \hat{K}$. Допустим, что $d(A)$ – неделитель нуля. Значит, $d(A)$ – обратимый элемент в $\hat{R}$. Тогда по [1] матрица A обратима в $\hat{K}$.

Из равенства $B \circ A = 0$ получаем $B = 0$. Но по условию $B \neq 0$. Противоречие. Итак, $d(A) \in Z(R)$.

1)→2). Пусть $A, B \in K$ – ненулевые формальные матрицы и $A \circ B = 0$. Тогда в кольце K^{T} будет справедливо равенство: $B^{\mathrm{T}} * A^{\mathrm{T}} = 0$, то есть A^{T} – правый делитель нуля в K^{T}. Тогда по 2)→3)→1) A^{T} – также левый делитель нуля в K^{T}. Значит, найдется ненулевая матрица $C \in K$, для которой $A^{\mathrm{T}} * \mathrm{C} = 0$. Возвращаясь в кольцо K, получаем равенство $C^T \circ A = 0$. То есть A – правый делитель нуля в K. □

Таким образом, правые и левые делители нуля в кольцах формальных матриц со значениями в данном коммутативном кольце R совпадают и их определители – делители нуля в R.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Формальные матрицы и их определители // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. № 1(19). С. 65–119.
2. *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Модули над кольцами формальных матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15. № 8. С. 145–211.
3. *Норбосамбуев Ц.Д.* О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 34–41.
4. *Норбосамбуев Ц.Д.* 2-хорошие диагональные формальные матрицы над кольцом целых чисел // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики» (25 – 29 апреля 2016 г.): сб. статей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2016. С. 6–13.
5. *Brown W.C.* Matrices over commutative rings. New York: Marcel Dekker Inc., 1993. 294 p.
6. *Camion P., Levy L.S., Mann H.B.* Linear equations over commutative ring // J. Algebra. 1971. V. 18. P. 432 – 436.
7. *McCoy N.* Rings and Ideals. Carus Math. Monogr. 8, Mathematical Association of America, 1948. 216 p.

Статья поступила 19.01.2018 г.

Norbosambuev T. D. (2018) RANK OF FORMAL MATRIX. SYSTEM OF FORMAL LINEAR EQUATIONS. ZERO DIVISORS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 5–12

DOI 10.17223/19988621/52/1

Keywords: Ring, formal matrix, rank of formal matrix, system of formal linear equations.

In this paper, we present the notion of the formal rank, i.e., the rank of a formal matrix over an arbitrary commutative ring, and some its general properties. Next, we introduce the notion of systems of formal linear equations and give necessary and sufficient conditions for the existence of a solution of homogenous systems of formal linear equations. In Section 2, we show that Cramer's rule is still valid for systems of formal linear equations. Finally, in Section 3, we establish the condition under which a formal matrix is a left or right zero divisor.

AMS Mathematical Subject Classification: 15B9, 15A06, 15A24, 16S50

NORBOSAMBUEV Tsyrendorji Dashatsyrenovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: NsTsdDts@yandex.ru

REFERENCES

1. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2015) Formal Matrices and Their Determinants. *J. Math. Sci.* 211:341. DOI: 10.1007/s10958-015-2610-3
2. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2010) Modules over formal matrix rings. *J. Math. Sci.* 171:248. DOI: 10.1007/s10958-010-0133-5
3. Norbosambuev T.D. (2015) O summah diagonal'nyh i obratimyh formal'nyh matrits [On sums of diagonal and invertible formal matrices]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta.*

Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 4(36). pp. 34–41. DOI: 10.17223/19988621/36/4.
4. Norbosambuev T.D. (2016) 2-horoshie diagonal'nye formal'nye matritsy nad koltsom tselyh chisel [2-good diagonal formal matrices over the ring of integers]. *Proceedings of All-Russia Scientific Youth Conferences "All Faces of Mathematics and Mechanics"*. Tomsk: TGU Publ. pp. 6–13.
5. Brown W.C. (1993) *Matrices over commutative rings*. New York: Marcel Dekker Inc.
6. Camion P., Levy L.S., Mann H.B. (1971) Linear equations over commutative ring. *J. Algebra*. 18. P. 432–436. DOI: 10.1016/0021-8693(71)90073-1.
7. McCoy N. (1948) *Rings and Ideals*. Carus Math. Monogr. 8, Mathematical Association of America.