

УДК 532.529:662.62

DOI 10.17223/19988621/52/8

О.В. Матвиенко, А.О. Андропова, А.В. Андриасян, Н.А. Мамадраимова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПО НАКЛОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

Проведено исследование движения сферической частицы по наклонной поверхности, обдуваемой сдвиговым потоком. Проанализированы различные режимы движения частицы в потоке: качение, скольжение, пробуксовка. Исследование движения по наклонной поверхности, обдуваемой воздушным потоком, показывает, что скорость центра масс частиц увеличивается с увеличением ее диаметра, при этом скорость частиц быстро достигает стационарного значения. Изменение угловой скорости ω характеризуется на начальном этапе резким ее возрастанием, после чего качение частицы происходит с постоянной угловой скоростью. Для малых размеров частицы ее движение на начальном участке характеризуется качением без скольжения, однако затем переходит в режим проскальзывания.

Ключевые слова: *механика жидкости, дисперсная фаза, суспензии, качение, скольжение.*

Математическая модель

Изучение движения частиц аэрозоля, их осаждения и коагуляции составляет предмет весьма важного раздела учения об аэродисперсных системах, который можно назвать механикой аэрозолей [1, 2]. Сюда же целесообразно отнести тесно примыкающий к проблемам осаждения и сепарации [3, 4] вопрос о явлениях, происходящих при соприкосновении частиц друг с другом и с макроскопическими телами, а также весьма важный, мало изученный вопрос об обратных процессах – отрыве частиц от стенок и переходе порошкообразных тел в аэрозольное состояние [5].

В работах [6, 7] представлены результаты экспериментального исследования гравитационного осаждения консолидированной системы твердых монодисперсных сферических частиц в вязкой жидкости в широких диапазонах их концентрации и чисел Рейнольдса и Стокса. На основе экспериментальных данных по изменению скорости осаждения совокупности частиц получена критериальная зависимость для коэффициента сопротивления совокупности частиц в исследуемом режиме осаждения.

Авторами [8] проведено исследование движения частицы в окрестности подвижной стенки. Результаты расчетов показывают, что увеличение частоты колебания пластины ω увеличивает частоту изменения скорости частицы. С ростом частоты колебаний пластины колебательный режим изменения скорости частицы наблюдается в более тонком слое, прилегающем к пластине. С увеличением диаметра частиц увеличивается их инерционность. Амплитуда колебаний частицы уменьшается с увеличением частоты колебаний пластины.

В работе [9] представлены экспериментальные исследования режима соударения твердой сферической частицы, движущейся в жидкости, с горизонтальной

плоской стенкой. В результате проведенных измерений был определен коэффициент восстановления при ударе. Установлено, что при малых значениях числа Стокса $Stk = \rho_p v_n d_p / \mu$, являющегося отношением силы инерции частицы к силе внутреннего трения (плотность частицы, диаметр частицы, динамическая вязкость жидкости и скорость частицы) коэффициент восстановления равен нулю и соударение со стенкой происходит без отскакивания. С увеличением значения числа Стокса коэффициент восстановления монотонно увеличивается, асимптотически достигая значений, соответствующих удару в вакууме.

В работе [10] представлено исследование ударного взаимодействия частиц в потоке. Проанализировано осаждение бидисперсной смеси с учетом соударения частиц. Проведенные расчеты показали, что соударения частиц существенным образом определяют скорость их осаждения в воздушной среде и практически не оказывают влияния на процессы седиментации в жидкости.

В [11] предложена модель движения частицы, движущейся в газе вблизи шероховатой стенки. На основе экспериментальных данных предложена математическая модель движения частицы по поверхности средней и малой шероховатости, размер которой не превышает размера частицы. В результате проведенных экспериментов определена величина силы адгезии частицы вблизи шероховатой стенки.

Авторами [12] проведено экспериментальное и теоретическое исследование движения твердой сферы по наклонной плоскости под действием силы тяжести в присутствии поперечного потока вязкой жидкости. Установлено, что движение тяжелой сферы по наклонной плоскости в жидкости ускоряется, если жидкость течет в поперечном направлении. Эффект увеличивается с ростом скорости поперечного потока, с ростом коэффициента трения и с уменьшением угла наклона плоскости. Эффект ускорения оседания обусловлен поворотом вектора силы контактного трения скольжения под действием поперечного потока.

Целью работы является математическое моделирование движения сферической частицы, обдуваемой сдвиговым потоком, по наклонной поверхности.

Уравнение движения центра масс частицы можно записать в виде [1, 13]:

$$\rho V \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (1)$$

где ρ – средняя плотность частицы; V – ее объем; $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ – главный вектор внешних действующих сил. Рассмотрим более подробно систему сил, действующих на частицу. Силу тяжести можно определить по формуле

$$\vec{F}_G = \rho V \vec{g}. \quad (2)$$

Наличие локального градиента давления приводит к появлению силы, направленной в сторону градиента давления [2, 14]:

$$\vec{F}_p = - \int_s p \vec{n} ds = - \int_V \text{grad}(p) dV \approx - \text{grad}(p) V. \quad (3)$$

Градиент давления, создаваемый статическим давлением, $\text{grad}(p) = -\rho_e \vec{g}$. Складывая силу тяжести и силу, вызванную градиентом статического давления, получим силу Архимеда [1]

$$\vec{F}_A = (\rho - \rho_e) V \vec{g}. \quad (4)$$

Сила сопротивления в однородном потоке газа определяется как [15, 16]

$$\vec{F}_D = -\frac{C_D}{8} \pi d_p^2 \rho_e |\vec{v} - \vec{v}_e| (\vec{v} - \vec{v}_e), \quad (5)$$

где C_D – коэффициент сопротивления; d_p – диаметр частицы, \vec{v}_e – скорость несущей среды, \vec{v} – скорость центра масс частицы.

В потоке с неравномерным распределением скорости \vec{v}_e частица может совершать вращательное движение относительно своего центра масс. При этом в области, где скорость набегающего потока имеет более высокие значения, формируется область пониженного давления, что, в свою очередь, приводит к образованию подъемной силы, так называемой силы Саффмана [17, 18]. Величина этой силы определяется по формуле

$$\vec{F}_S = \frac{C_S}{4} \pi d_p^2 \sqrt{\frac{\mu_e \rho_e}{|\text{rot}(\vec{v}_e)|}} (\vec{v} - \vec{v}_e) \times \text{rot}(\vec{v}_e), \quad (6)$$

где $C_S = 0.01$ – константа Саффмана.

В результате несовпадения угловой скорости вращения частицы, вызванного несимметричным обтеканием, и завихренности обтекающего потока возникает сила Магнуса. Эту силу можно определить следующим образом [1, 17]:

$$\vec{F}_M = \frac{C_M}{8} \pi d_p^2 \rho_e \frac{|\vec{v} - \vec{v}_e|}{|\vec{\omega} - \vec{\omega}_e|} (\vec{\omega} - \vec{\omega}_e) \times (\vec{v} - \vec{v}_e), \quad (7)$$

где $C_M = 0.05$ – константа Магнуса.

Рассмотрим движение частицы диаметром d_p , находящейся на наклонной поверхности с углом наклона к горизонту α , обдуваемую воздушным потоком с линейным распределением скорости $v_e = \gamma y$ (рис. 1). В качестве сил, действующих на частицу, будем рассматривать силу Архимеда \vec{F}_A (1), подъемные силы Саффмана \vec{F}_S (6) и Магнуса \vec{F}_M (7), силу сопротивления \vec{F}_D (5). Также необходимо учитывать силу реакции опоры \vec{F}_R ($F_R = \max(0, F_G \cos \alpha - F_M - F_S)$) и силу трения \vec{F}_{fr} .

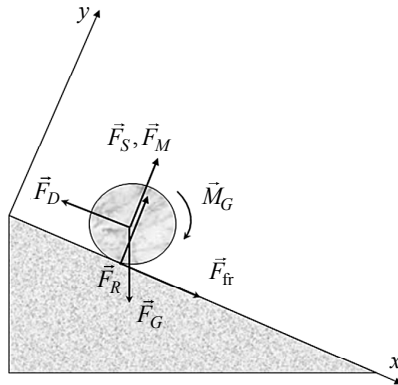


Рис. 1. Схема движения частицы по наклонной поверхности
Fig. 1. Scheme of the particle motion along an inclined surface

Сила трения скольжения определяется законом Кулона – Амонтона [19] и может быть определена как

$$\vec{F}_{\text{fr,sl}} = -f_{\text{sl}} F_R \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \quad (8)$$

Сила трения покоя препятствует возникновению скольжения тел. Она направлена противоположно силе, пытающейся вывести тело из состояния равновесия. Величина этой силы изменяется от нуля до максимального значения, которое может быть определено как

$$|F_{\text{fr,stat}}| = f_{\text{stat}} F_R. \quad (9)$$

В уравнениях (8), (9) $f_{\text{fr,sl}}$ – коэффициент трения скольжения, f_{stat} – коэффициент трения покоя. В расчетах $f_{\text{fr,sl}} = 0.15$, $f_{\text{stat}} = 0.2$.

В результате взаимодействия несущей среды и катящейся частицы возникает пара сил с гидродинамическим моментом равным [1]:

$$\vec{M}_G = -\frac{1}{64} C_\omega \rho d^5 |\vec{\omega} - \vec{\omega}_e| (\vec{\omega} - \vec{\omega}_e). \quad (10)$$

Параметр C_ω , согласно результатам исследований [1, 20], вычисляется в соответствии с корреляцией

$$C_\omega = \frac{12.9}{\sqrt{\text{Re}_\omega}} + \frac{128.4}{\text{Re}_\omega}, \quad \text{Re}_\omega = \frac{\rho |\omega| d^2}{2\mu}. \quad (11)$$

Трение качения происходит при наличии контактной площадки между частицей и опорной поверхностью. В результате реакция опоры смещается в сторону возможного движения и создает момент сопротивления.

Максимальное значение расстояния между линией действия реакции опоры и нормалью к поверхности, проведенной через центр масс тела, составляет половину длины площадки контакта. Это расстояние принимают за коэффициент трения качения. Таким образом, предельная величина момента трения качения может быть определена как

$$|M_{\text{fr,max}}| = F_R \delta, \quad (12)$$

где δ – коэффициент трения качения, имеющий размерность длины. В расчетах коэффициент трения качения принимался равным $\delta = 0.05 d_p$.

Динамика частицы в потоке определяется дифференциальными уравнениями, описывающими движение центра масс, а также вращение частицы [19]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \pi d_p^3 \rho_p \frac{dv_x}{dt} = & \frac{1}{6} \pi d^3 (\rho_p - \rho_e) g \sin(\alpha) - \frac{C_D}{8} \pi d_p^2 \rho_e |\vec{v} - \vec{v}_e| (v_x - \gamma y) - \\ & - \frac{C_S}{4} \pi d_p^2 v_y \sqrt{\mu_e \rho_e |\gamma|} - \frac{C_M}{8} \pi d_p^2 \rho_e \frac{|\vec{v} - \vec{v}_e|}{|\vec{\omega} - \vec{\omega}_e|} (\omega - \gamma) v_y + F_{\text{fr}}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \pi d_p^3 \rho_p \frac{dv_y}{dt} = & -\frac{1}{6} \pi d^3 (\rho_p - \rho_e) g \cos(\alpha) - \frac{C_D}{8} \pi d_p^2 \rho_e |\vec{v} - \vec{v}_e| v_y + \\ & + \frac{C_S}{4} \pi d_p^2 (v_x - \gamma y) \sqrt{\mu_e \rho_e |\gamma|} + \frac{C_M}{8} \pi d_p^2 \rho_e \frac{|\vec{v} - \vec{v}_e|}{|\vec{\omega} - \vec{\omega}_e|} (\omega - \gamma) (v_x - \gamma y) + F_R; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{1}{60} \pi d_p^5 \rho_p \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{64} C_\omega \rho_e d_p^5 |\vec{\omega} - \vec{\omega}_e| (\omega - \gamma) - \frac{1}{2} F_{\text{fr}} d_p \frac{\omega}{|\omega|} - M_{\text{fr}}. \quad (15)$$

Рассмотрим различные сценарии движения частицы.

Отрыв частицы от поверхности возможен при выполнении условия $dv_y/dt > 0$. С учетом уравнения (14) условие отрыва частицы от поверхности может быть представлено в виде

$$d_p g \cos(\alpha) < \frac{3}{4} \left(2C_S \frac{\sqrt{\mu_e \rho_e \gamma}}{(\rho_p - \rho_e)} + \frac{C_M}{8} \frac{\rho_e}{(\rho_p - \rho_e)} \frac{|v_x - \gamma d_p|}{|\omega - \gamma_e|} (\omega - \gamma) \right) (v_x - \gamma d_p). \quad (16)$$

Проведенные расчеты показали, что в исследуемом диапазоне параметров: $10 \leq d_p \leq 1000$ мкм, $\gamma < 10$ с⁻¹, $6^\circ < \alpha < 87^\circ$, $\rho = 2600$ кг/м³, $\rho_e = 1.2$ кг/м³ условие отрыва частицы от поверхности (13) не реализуется. Таким образом, в рассмотренных случаях частица движется вдоль поверхности.

Определим условия равновесия частицы:

$$\left| \frac{1}{6} \pi d_p^3 (\rho_p - \rho_e) g \sin(\alpha) + \frac{C_D}{32} \pi d_p^4 \gamma |\gamma| \rho_e \right| \leq f_{\text{stat}} F_R; \quad (17)$$

$$\left| -\frac{1}{64} C_\omega \rho d_p^5 \gamma |\gamma| + \frac{1}{2} F_{\text{fr}} d_p \right| \leq F_R \delta. \quad (18)$$

При этом сила реакции опоры определяется выражением

$$F_R = \frac{1}{6} \pi d_p^3 (\rho_p - \rho_e) g \cos(\alpha) + \frac{C_S}{8} \pi d_p^3 \gamma \sqrt{\mu_e \rho_e |\gamma|} - \frac{C_M}{16} \pi d_p^3 \rho_e \gamma |\gamma| d. \quad (19)$$

Условием вращением частицы без скольжения будет невыполнение условия (18) при выполнении условия (17). Этот случай может реализоваться при обдуве поверхности восходящим несущим потоком ($\gamma < 0$). При этом составляющая силы тяжести, направленная вдоль поверхности уравнивается силой трения и силой сопротивления. Вращение частицы обуславливается действием гидродинамического момента, вызванного неоднородным полем скорости потока несущей среды.

Поступательное движение частицы, то есть скольжение без вращения осуществляется при выполнении условия (18) и невыполнении условия (17).

Если условия (17), (18) не выполняются одновременно, то частица скатывается по наклонной поверхности. В зависимости от величин действующих сил и моментов возможно: качение частицы без скольжения ($|v_x| = 0.5|\omega|d_p, v_y = 0$), пробуксовка частицы ($|v_x| < 0.5|\omega|d_p, v_y = 0$); качение частицы со скольжением ($|v_x| > 0.5|\omega|d_p, v_y = 0$).

Определим условия качения частицы без скольжения. В этом случае должно выполняться кинематическое соотношение $v_x = 0.5\omega d_p$. Таким образом, уравнение (15) может быть записано в виде

$$\frac{1}{30} \pi d_p^4 \rho_p \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{16} C_\omega \rho d_p^3 \left| v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right| \left(v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right) + \frac{1}{2} F_{\text{fr}} d_p + F_R \delta \frac{v_x}{|v_x|}. \quad (20)$$

Совместное решение уравнений (13) и (20) позволяет определить условие качения частицы без скольжения и пробуксовки:

$$\left| \left(\frac{1}{9} \pi d^3 (\rho_p - \rho_e) g \sin(\alpha) - \frac{2C_D - 5C_\omega}{24} \pi d_p^2 \rho_e \left| v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right| \left(v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right) \right) \frac{v_x}{|\vec{v}_x|} - \frac{3}{3} F_R \frac{\delta}{d_p} \right| \leq f_{\text{stat}} F_R. \quad (21)$$

При движении частицы без скольжения величина силы трения будет определяться зависимостью

$$F_{\text{fr}} = \frac{1}{9} \pi d^3 (\rho_p - \rho_e) g \sin(\alpha) \frac{v_x}{|\vec{v}_x|} - \frac{2C_D - 5C_\omega}{24} \pi d_p^2 \rho_e \left| v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right| \left(v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right) \frac{v_x}{|\vec{v}_x|} - \frac{3}{3} F_R \frac{\delta}{d_p}. \quad (22)$$

Качение частицы со скольжением происходит при выполнении условия

$$f_{\text{stat}} F_R < \left(\frac{1}{9} \pi d^3 (\rho_p - \rho_e) g \sin(\alpha) - \frac{2C_D - 5C_\omega}{24} \pi d_p^2 \rho_e \left| v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right| \left(v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right) \right) \times \frac{v_x}{|\vec{v}_x|} - \frac{3}{3} F_R \frac{\delta}{d_p}. \quad (23)$$

Режим пробуксовки становится возможным при

$$f_{\text{stat}} F_R < \left(-\frac{1}{9} \pi d^3 (\rho_p - \rho_e) g \sin(\alpha) + \frac{2C_D - 5C_\omega}{24} \pi d_p^2 \rho_e \left| v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right| \left(v_x - \frac{1}{2} \gamma d_p \right) \right) \times \frac{v_x}{|\vec{v}_x|} - \frac{3}{3} F_R \frac{\delta}{d_p}. \quad (24)$$

Результаты математического моделирования

Рассмотрим результаты численного моделирования движения сферической частицы по наклонной поверхности, обдуваемой потоком несущей среды. Уравнения динамики частицы (13) – (15) решаются со следующими начальными условиями:

$$t = 0: v_x = 0, \omega = 0, x = 0. \quad (25)$$

На рис. 2 – 4 представлены динамические характеристики движения частицы различного диаметра по пластине, наклоненной к горизонту на угол $\alpha = 45^\circ$, при интенсивности обдува $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$. Как видно из рис. 2, скорость центра масс частиц увеличивается с увеличением ее диаметра. При этом скорость частиц быстро уходит на стационарное значение, определяемое балансом сил тяжести и сопротивления. За исключением небольшого начального этапа, изменение координаты со временем описывается линейной зависимостью.

Изменение угловой скорости ω , характеризуется на начальном этапе резким ее возрастанием, после чего качение частицы происходит с постоянной угловой скоростью, асимптотически стремясь к стационарному значению ω_{st} (рис. 3).

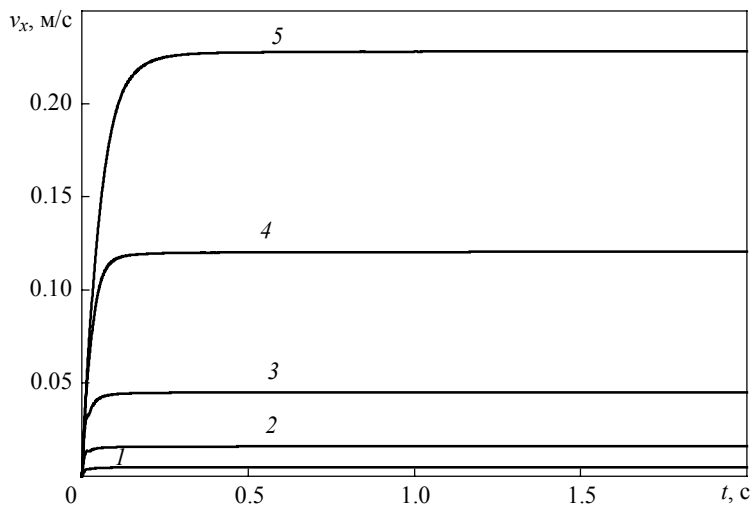


Рис. 2. Изменение скорости центра масс частицы со временем для разных значений ее диаметра $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$: 1 – $d_p = 50$, 2 – 100, 3 – 200, 4 – 500, 5 – 1000 мкм

Fig. 2. Variation in the velocity of particle center of mass with time for various diameters at $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$: $d_p = (1) 50$, (2) 100, (3) 200, (4) 500, and (5) 1000 μm

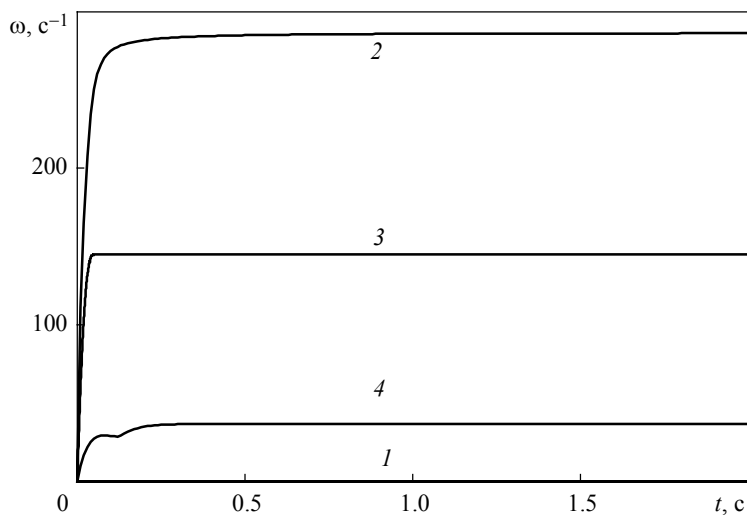


Рис. 3. Изменение угловой скорости частицы со временем для разных значений ее диаметра $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$: 1 – $d_p = 100$, 2 – 200, 3 – 500, 4 – 1000 мкм

Fig. 3. Variation in the angular velocity of the particle with time for various diameters at $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$: $d_p = (1) 100$, (2) 200, (3) 500, and (4) 1000 μm

Для частиц диаметром менее 100 мкм угловая скорость $\omega = 0$ вследствие выполнения условия (18) и невыполнения условия (17). Это означает, что происходит режим чистого скольжения, т.е. движение без вращения. Более крупные частицы движутся с вращением. Стационарное значение угловой скорости увеличивается с увеличением диаметра частиц вплоть до 200 мкм. С дальнейшим ростом диаметра частиц угловая скорость уменьшается. Уменьшение ω_{st} для крупных частиц можно объяснить из следующих соображений. С увеличением диаметра частицы увеличивается как линейная, так и угловая скорости частицы, что приводит к росту подъемных сил, Сафмана и Магнуса и, как следствие этого, уменьшается давление на опору. Это приводит к уменьшению вращательного момента, создаваемого силой трения. Таким образом, возрастает поступательная часть движения, связанная со скольжением. При этом, для $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 45^\circ$ движение крупных частиц $d_p > 1000$ мкм характеризуется скольжением по поверхности. Для малых размеров частицы ее движение на начальном участке характеризуется качением без скольжения, однако затем переходит в режим проскальзывания (рис. 4).

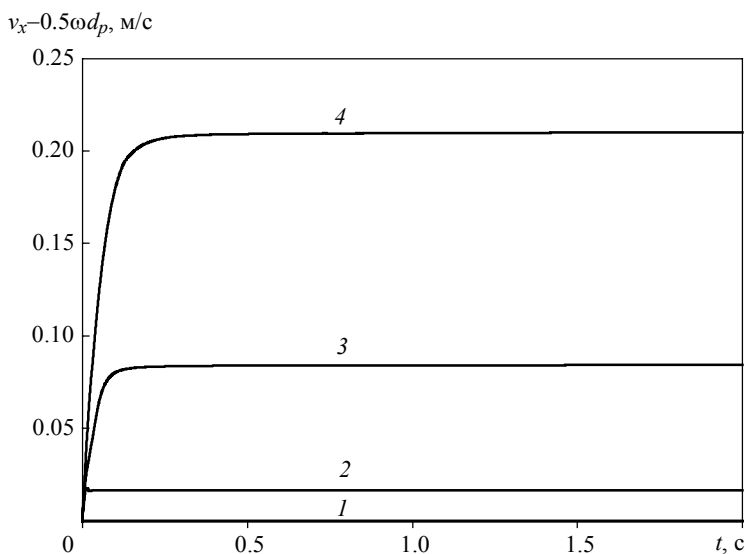


Рис. 4. Изменение скорости проскальзывания частицы со временем для разных значений ее диаметра $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$: 1 – $d_p = 50$, 2 – 100, 3 – 200, 4 – 500, 5 – 1000 мкм

Fig. 4. Variation in the slip velocity of the particle with time for various diameters at $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$: $d_p = (1) 50$, (2) 100, (3) 200, (4) 500, and (5) 1000 μm

Влияние наклона поверхности характеризуют рис. 5 – 8. С увеличением угла α скорость частицы увеличивается, достаточно быстро выходя на стационарный режим (рис. 5), так что закон движения близок к линейному.

Угловая скорость увеличивается до угла наклона поверхности $\alpha = 13^\circ$, после чего уменьшается с увеличением угла наклона поверхности (рис. 6).

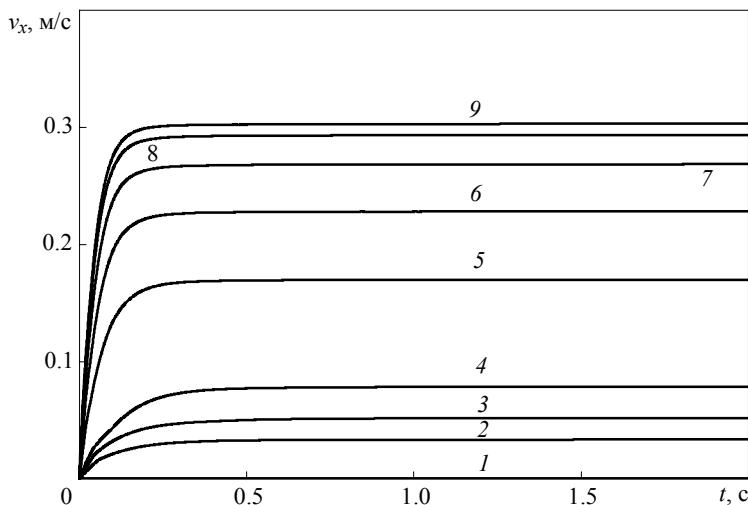


Рис. 5. Изменение скорости центра масс частицы со временем для разных значений угла наклона поверхности $d_p = 100$ мкм, $\gamma = 1$ с⁻¹: 1 – $\alpha = 0$, 2 – 10° , 3 – 12.5° , 4 – 15° , 5 – 30° , 6 – 45° , 7 – 60° , 8 – 75° , 9 – 87°
Fig. 5. Variation in the velocity of particle center of mass with time for various surface inclination angle at $d_p = 100$ μm , $\gamma = 1$ s⁻¹: $\alpha = (1)$ 0, (2) 10° , (3) 12.5° , (4) 15° , (5) 30° , (6) 45° , (7) 60° , (8) 75° , and (9) 87°

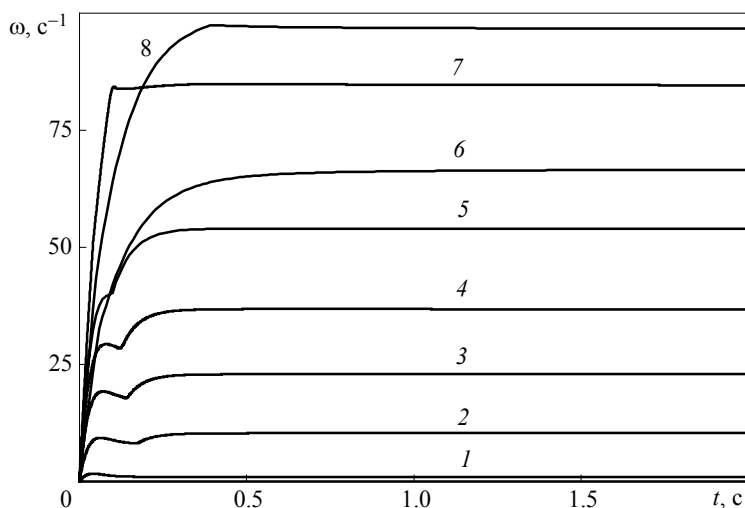


Рис. 6. Изменение угловой скорости частицы со временем для разных значений угла наклона поверхности $d_p = 100$ мкм, $\gamma = 1$ с⁻¹: 1 – $\alpha = 0$, 2 – 10° , 3 – 12.5° , 4 – 15° , 5 – 30° , 6 – 45° , 7 – 60° , 8 – 75° , 9 – 87°
Fig. 6. Variation in the angular velocity of the particle with time for various surface inclination angle at $d_p = 100$ μm , $\gamma = 1$ s⁻¹: $\alpha = (1)$ 0, (2) 10° , (3) 12.5° , (4) 15° , (5) 30° , (6) 45° , (7) 60° , (8) 75° , and (9) 87°

Рис. 7 характеризует скорость проскальзывания частиц. Из рисунка видно, что для угла $\alpha < 15^\circ$ движение частицы на начальном участке характеризуется качением без скольжения, однако затем переходит в режим проскальзывания. Для больших α режим качения без скольжения отсутствует и наблюдается проскальзывание.

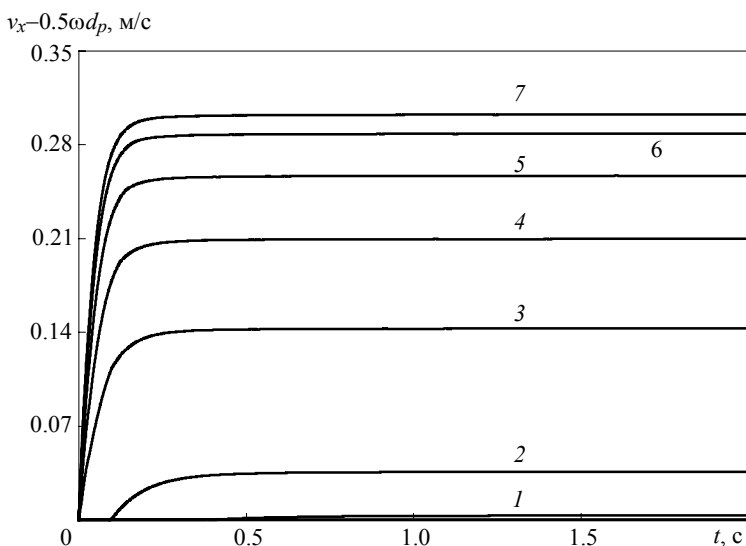


Рис. 7. Изменение скорости проскальзывания частицы со временем для разных значений угла наклона поверхности: $d_p = 100$ мкм, $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$: 1 – $\alpha = 12.5^\circ$, 2 – 15° , 3 – 30° , 4 – 45° , 5 – 60° , 6 – 75° , 7 – 87°

Fig. 7. Variation in the slip velocity of the particle with time for various surface inclination angle at $d_p = 100 \text{ }\mu\text{m}$, $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$: $\alpha =$ (1) 12.5° , (2) 15° , (3) 30° , (4) 45° , (5) 60° , (6) 75° , and (7) 87°

На рис. 8 показано влияние интенсивности обдува для различных γ на изменение скорости по времени. Как следует из рисунков, скорость при больших временах выходит на стационарное значение. Однако при $t < 0.6$ с изменение скорости носит достаточно сложный характер. При значительных отрицательных γ сила сопротивления превосходит силу тяжести и частица движется вверх и влево, в сторону отрицательных значений x . При $\gamma = -1 \text{ с}^{-1}$ сила сопротивления не достаточна для преодоления силы тяжести, поэтому на начальном участке скорость имеет положительное значение. В результате действия гидравлического момента происходит торможение движение частицы, что приводит к остановке частицы при $t > 0.6$ с. Для $\gamma \geq 0$ наблюдается достаточно быстрый выход скорости на постоянное значение, однако такой режим движения не является окончательным. Гидравлический момент меняет свой знак и начинает тормозить вращение частицы, в результате наблюдается резкое уменьшение скорости с последующим выходом на новое стационарное значение.

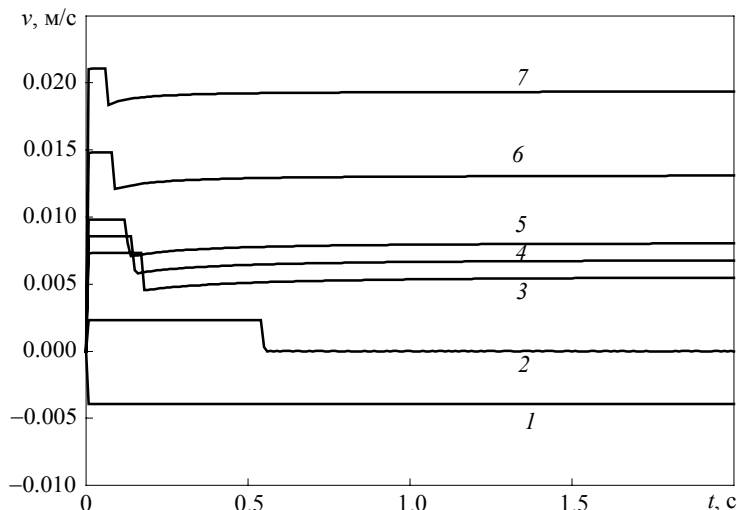


Рис. 8. Изменение скорости центра масс частицы со временем для разных значений интенсивности обдува $\alpha = 12.5^\circ$, $d_p = 100$ мкм: 1 – $\gamma = -10$ с⁻¹, 2 – (-5), 3 – (-1), 4 – 0, 5 – 1, 6 – 5, 7 – 10

Fig. 8. Variation in the velocity of particle center of mass with time for various blowing at $\alpha = 12.5^\circ$, $d_p = 100$ μm : $\gamma = (1) -10$, (2) -5, (3) -1, (4) 0, (5) 1, (6) 5, (7) 10 s⁻¹

Заключение

Проведенные расчеты показали, что в исследуемом диапазоне параметров $10 \leq d_p \leq 1000$ мкм, $\gamma < 10$ с⁻¹:

- отрыва частицы от поверхности не происходит;
- при движении по наклонной поверхности, обдуваемой воздушным потоком, скорость центра масс частиц увеличивается с увеличением ее диаметра, при этом скорость частиц быстро уходит на стационарное значение;
- изменение угловой скорости ω характеризуется на начальном этапе резким ее возрастанием, после чего качение частицы происходит с постоянной угловой скоростью;
- для малых размеров частицы ее движение частицы на начальном участке характеризуется качением без скольжения, однако затем переходит в режим проскальзывания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Crowe C., Sommerfeld M., Tsuji Ya. Multiphase Flows with Droplets and Particles. N.Y.: CRC Press, 1998. 472 p.
2. Кутепов А.М., Полянин Л.Д., Запрынов З.Д. и др. Химическая гидродинамика: справочное пособие. М.: Бюро Квантум. 1996. 336 с.
3. Островский Г.М. Прикладная механика неоднородных сред. СПб.: Наука, 2000. 359 с.
4. Матвиенко О.В., Евтюшкин Е.В. Математическое исследование сепарации дисперсной фазы в гидроциклоне при очистке вязкопластических буровых растворов // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84. № 2. С. 230–238.
5. Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. 351 с.

6. Архипов В.А., Усанина А.С. Режимы осаждения консолидированной системы твердых сферических частиц // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 5. С. 74–85.
7. Архипов В.А., Усанина А.С. Гравитационное осаждение совокупности твердых сферических частиц в режиме частично продуваемого облака // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 5. С. 1118–1125.
8. Матвиенко О.В., Андропова А.О. Исследование движения частицы в потоке жидкости вблизи подвижной стенки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4. С. 85–92.
9. Gondret P., Lance M., Petit L. Bouncing motion of spherical particles in fluids // Physics of fluids. V. 14. No. 2. 2002. P. 643–652.
10. Матвиенко О.В., Данейко А.М. Исследование ударного взаимодействия частиц в потоке // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 9/3. С. 190–192.
11. Feuillebois F., Gensdarmes F., Mana Z., et al. Three-dimensional motion of particles in a shear flow near a rough wall // Journal of Aerosol Science. 2016. V. 96. P. 69–95.
12. Базилевский А.В., Рожков А.Н. Движение сферы по наклонной плоскости в потоке вязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 4. С. 100–112.
13. Матвиенко О.В., Евтюшкин Е.В. Теоретическое исследование процесса очистки загрязненной нефтью почвы в гидроциклонных аппаратах // Инженерно-физический журнал. 2007. Т. 80. № 3. С. 72–80.
14. Матвиенко О.В., Дик И.Г. Численное исследование сепарационных характеристик гидроциклона при различных режимах загрузки твердой фазы // Теоретические основы химической технологии. 2006. Т. 40. № 2. С. 216–221.
15. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media. Prentice-Hall, 1965.
16. Матвиенко О.В., Андропова А.О., Агафонцева М.В. Исследование влияния режимов течения из гидроциклона на его сепарационные характеристики // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 1. С. 23–34.
17. Rubinow S.I., Keller J.B. The transverse force on spinning sphere moving in a viscous fluid // J. of Fluid Mech. 1961. V. 11. Iss. 3. P. 447–459.
18. Clift R., Grace J.R., Weber M.E. Bubbles, drops and particles. N.Y.: Academ Press, 1978. 380 p.
19. Беркович И.И., Громаковский Д.Г. Трибология. Физические основы, механика и технические приложения: учебник для вузов. Самара: Самарский гос. техн. ун-т, 2000. 268 с.
20. Böttner C.U., Sommerfeld M. Numerical calculation of powder painting using the Euler/Lagrange approach Powder Technology. 2002. V. 125. P. 206–216.

Статья поступила 24.12.2017 г.

Matvienko O.V., Andropova A.O., Andriasyan A.V., Mamadramova N.A. (2018) MATHEMATICAL MODELLING OF THE SPHERICAL PARTICLE MOTION ALONG AN INCLINED SURFACE IN THE SHEAR FLOW. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 75–88

DOI 10.17223/19988621/52/8

In this paper, the motion of a spherical particle along an inclined surface in the shear flow is studied. Different modes of the particle motion in the flow such as rolling, slipping, and sliding are analyzed. Investigation results show that the velocity of particle center of mass increases with an increase in particle diameter and the particle velocity becomes stationary rapidly. Variation in the angular velocity is characterized by an abrupt increase at the initial time instant which is followed by the particle rolling at a constant angular velocity. Initially, the motion of small particles is characterized by rolling without sliding but then it transfers into a slip mode.

Keywords: fluid mechanics, dispersed phase, suspension, rolling, sliding.

MATVIENKO Oleg Viktorovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk State University of Architecture and Building Tomsk, Russian Federation). E-mail: matvolegv@mail.ru

ANDROPOVA Antonina Olegovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: a.o.andropova@gmail.com

ANDRIASYAN Alina Valer'evna (Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russian Federation). E-mail: alina-andriasyan@yandex.ru

MAMADRAIMOVA Nazira Abdiraimovna (Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mamadraimova96@mail.ru

REFERENCES

1. Crowe C., Sommerfeld M., Tsuji Ya. (1998) *Multiphase Flows with Droplets and Particles*. New York: CRC Press.
2. Kutepov A.M., Polyatin L.D., Zapryanov Z.D. et al. (1996) *Khimicheskaya gidrodinamika: spravochnoe posobie* [Chemical hydrodynamics: a textbook]. Moscow: Byuro Kvantum.
3. Ostrovskiy G.M. (2000) *Prikladnaya mekhanika neodnorodnykh sred* [Applied mechanics of heterogeneous media]. Saint Petersburg: Nauka.
4. Matvienko O.V., Evtyushkin E.V. (2011) Mathematical study of hydrocyclone dispersed phase separation in clearing viscoplastic drilling fluids. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 84(2). pp. 241–250. DOI: 10.1007/s10891-011-0466-z.
5. Fuchs N.A. (1964) *The Mechanics of Aerosols*. New York: Macmillan.
6. Arkhipov V.A., Usanina A.S. (2017) Regimes of sedimentation of a consolidated system of solid spherical particles. *Fluid Dynamics*. 52(5). pp. 666–677. DOI: 10.1134/S0015462817050088.
7. Arkhipov V.A., Usanina A.S. (2017) Gravity sedimentation of a set of solid spherical particles in the regime of a partially blown cloud. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 90(5). pp. 1061–1068. DOI: 10.1007/s10891-017-1657-z.
8. Matvienko O.V., Andropova A.O. (2015) Issledovanie dvizheniya chastitsy v potoke zhidkosti vblizi podvizhnoy stenki [Studying the particle motion in a fluid flow in the vicinity of a movable wall]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(36). pp. 85–92. DOI: 10.17223/19988621/36/10.
9. Gondret P., Lance M., Petit L. (2002) Bouncing motion of spherical particles in fluids. *Physics of fluids*. 14(2). pp. 643–652. DOI: 10.1063/1.1427920.
10. Matvienko O.V., Daneyko A.M. (2013) Issledovanie udarnogo vzaimodeystviya chastits v potoke [Investigation of the shock interaction between particles in a stream]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika. – Russian Physical Journal*. 56(9-3). pp. 190–192.
11. Feuillebois F., Gensdarmes F., Mana Z., Ricciardi L. et al. (2016) Three-dimensional motion of particles in a shear flow near a rough wall. *Journal of Aerosol Science*. 96. pp. 69–95. DOI: 10.1016/j.jaerosci.2015.10.004.
12. Bazilevskiy A.V., Rozhkov A.N. (2009) Motion of a sphere down an inclined plane in a viscous flow. *Fluid Dynamics*. 44(4). pp. 566–576. DOI: 10.1134/S0015462809040103.
13. Matvienko O.V., Evtyushkin E.V. (2007) Theoretical investigation of the process of cleaning oil-polluted soil in hydrocyclone apparatuses. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 80(3). pp. 502–510. DOI: 10.1007/s10891-007-0066-0.
14. Matvienko O.V., Dueck J. (2006) Numerical study of the separation characteristics of a hydrocyclone under various conditions of loading of the solid phase. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 40(2). pp. 203–208. DOI: 10.1134/S0040579506020138.
15. Happel J., Brenner H. (1965) *Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media*. Prentice-Hall.
16. Matvienko O.V., Andropova A.O., Agafontseva M.V. (2014) Influence of the regime of flow of particles from a hydrocyclone on its separation characteristics. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 87(1). pp. 24–37. DOI: 10.1007/s10891-014-0981-9.

17. Rubinow S.I., Keller J.B. (1961) The transverse force on spinning sphere moving in a viscous fluid. *J. of Fluid Mech.* 11(3). pp. 447–459. DOI: 10.1017/S0022112061000640.
18. Clift R., Grace J.R., Weber M.E. (1978) *Bubbles, drops, and particles*. New York: Academ Press.
19. Berkovich I.I., Gromakovskiy D.G. (2000) *Tribologiya. Fizicheskie osnovy, mekhanika i tekhnicheskie prilozheniya* [Tribology. Physical bases, mechanics, and technical applications]. Samara: Samara State Technical University.
20. Böttner C.U., Sommerfeld M. (2002) Numerical calculation of electrostatic powder painting using the Euler/Lagrange approach. *Powder Technology*. 125(2-3). pp. 206–216. DOI: 10.1016/S0032-5910(01)00508-3.