

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/52/9

**В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик****ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ  
В ВЕРШИНЕ КРУГОВОГО КОНУСА**

Изучаются ограничения на параметры состояния в вершине кругового конуса под осесимметричной силовой и кинематической нагрузкой, а также когда вершина конуса – внутренняя точка. Результаты исследования найдут применение в постановках задач при изучении параметров состояния вблизи вершины конуса, в частности, при изучении взаимодействия конических инденторов с исследуемым образцом.

**Ключевые слова:** *особые точки, составной конус, круговой конус, внутренняя особая точка, концентрация напряжений, неклассические задачи, представительный объем.*

Элементы конструкций, содержащие особые точки в виде вершин клиньев, конусов, многогранников, пересечений образующих поверхностей (ребер) и т.п., вызывают большой интерес у исследователей. Подавляющее большинство авторов изучение особенности распределения напряжений вблизи особых точек проводят на основе асимптотической идеи (классический подход). Применяются методы операционного исчисления [1–4], функции комплексного переменного [5], функции Эри [6], интегральные уравнения [7, 8], метод граничных состояний [9], разложение по различным функциям [10, 11], метод конечных элементов [12–16], метод граничных элементов [17, 18]. Математическое обоснование асимптотического подхода изложено в работах [5, 19, 20]. Напряженное состояние вблизи вершин конусов с использованием классического подхода рассматривалось авторами статей [21–26]. В работах [27–33] показано, что достоверность решений, получаемых на основе классического подхода, ограничена областью вне малой окрестности особой точки. Это обстоятельство обусловлено принимаемой в данном подходе моделью точки сплошной среды в виде бесконечно малой частицы [34, 35]. Фактически точкой сплошной среды считается точка с нулевым объемом.

В отличие от классического подхода, авторы настоящей статьи точку сплошной среды считают малой частицей в непрерывном пространстве точек (континууме). Геометрическое положение частицы задается точкой континуума (точкой с нулевым объемом), а носителем физических свойств и характеристик состояния (напряжений и деформаций) является присоединенный объем. Присоединенный объем состоит из точек континуума, имеет линейный масштаб, равный характерному размеру представительного объема материала моделируемого элемента конструкции, и обладает физическими свойствами такого представительного объема. Особая точка отождествляется с точкой сплошной среды. В ней становятся определенными параметры состояния. На эти параметры могут быть наложены ограничения (например, граничные условия). Необычность (уникальность) особой точки проявляется в избыточном количестве (по сравнению с обычной точкой границы тела) задаваемых в ней ограничений.

Это обстоятельство делает задачу механики для тела с особой точкой неклассической. Неклассические (в указанном смысле) задачи рассматривались в работах [27, 28] (однородные плоские клинья), [30] (составные плоские клинья), [31] (составные пространственные ребра), [32] (внутренние особые точки в плоских элементах конструкций). Для неклассических задач механики упругих тел с особыми точками справедлива теорема единственности при условии существования решения и разработан численно-аналитический итерационный метод его нахождения [29].

В настоящей работе изучаются ограничения на параметры состояния в особой точке, являющейся вершиной кругового конуса. Рассмотрены случаи, когда вблизи вершины задана поверхностная нагрузка, когда боковая поверхность скользит без трения вдоль жесткой поверхности, когда боковая поверхность жестко закреплена и когда вершина конуса является внутренней точкой.

### 1. Круговой конус, поверхность которого нагружена

Рассматривается круговой конус. Угол при вершине  $A$  в его осевом сечении принимается равным  $2\alpha$  (рис. 1,  $a$ ). Вводится правосторонняя ортонормированная система координат  $x_1, x_2, x_3$  с базисом  $\vec{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Ось  $x_1$  направляется по оси конуса. Через  $\varphi$  обозначен угол, отсчитываемый в плоскости  $x_2, x_3$  от оси  $x_3$  против часовой стрелки (рис. 1,  $b$ ).

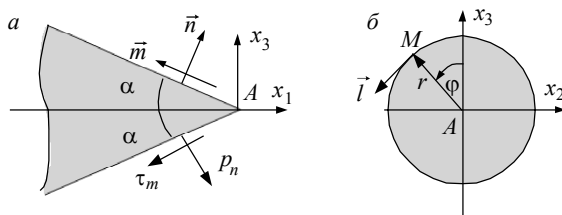


Рис. 1. Осевое ( $a$ ) и поперечное ( $b$ ) сечение конуса  
Fig. 1. ( $a$ ) Axial section and ( $b$ ) cross section of the cone

Для любой точки  $M(x_1, x_2, x_3)$  на поверхности конуса справедливы равенства

$$\cos \varphi = \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{-x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}. \quad (1)$$

Существуют конечные пределы выражений (1) при стремлении точки  $M(x_1, x_2, x_3)$  к вершине конуса вдоль его образующей. В точках поверхности конуса вводится тройка единичных взаимно ортогональных векторов  $\vec{n}, \vec{m}, \vec{l}$ . Вектор  $\vec{n}$  является нормальным к поверхности, а векторы  $\vec{m}$  и  $\vec{l}$  лежат в ее касательной плоскости (рис. 1).

Эти векторы в базисе  $\vec{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеют следующее представление:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \sin \alpha \vec{e}_1 - \cos \alpha \sin \varphi \vec{e}_2 + \cos \alpha \cos \varphi \vec{e}_3, \\ \vec{m} &= -\cos \alpha \vec{e}_1 - \sin \alpha \sin \varphi \vec{e}_2 + \sin \alpha \cos \varphi \vec{e}_3, \\ \vec{l} &= -\cos \varphi \vec{e}_2 - \sin \varphi \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Принимается, что на поверхности конуса задана нагрузка, причем непосредственно в вершине (в особой точке) нагрузка осесимметрична и задана равенством

$$\vec{p}_n = p_n \vec{n} + \tau_m \vec{m} + \tau_l \vec{l}. \quad (3)$$

Напряжения  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) в особой точке удовлетворяют заданным условиям

(3). Это обстоятельство записывается тремя соотношениями:

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha + \sigma_{33} \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi - \sigma_{12} \sin 2\alpha \sin \varphi + \\ &\quad + \sigma_{13} \sin 2\alpha \cos \varphi - \sigma_{23} \sin 2\varphi \cos^2 \alpha = p_n, \\ &-\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \varphi \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{33} \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \varphi + \\ &\quad + \sigma_{12} \cos 2\alpha \sin \varphi - \sigma_{13} \cos 2\alpha \cos \varphi - \sigma_{23} \sin 2\alpha \sin \alpha \cos \varphi = \tau_m, \\ &\sigma_{22} \sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha - \sigma_{33} \sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha - \sigma_{12} \cos \varphi \sin \alpha - \\ &\quad - \sigma_{13} \sin \alpha \sin \varphi - \sigma_{23} \sin \alpha \sin^2 \varphi - \sigma_{32} \cos \alpha \cos^2 \varphi = \tau_l. \end{aligned} \quad (4)$$

Равенства (4) должны выполняться при любых значениях  $\varphi$ . Из этого условия следует, что они совместны лишь в случае, когда компонента нагрузки  $\tau_l$  обращается в нуль, а компоненты напряжений  $\sigma_{ij}$  подчиняются условиям

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33}; \quad (5)$$

$$\sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha = p_n, \quad (6)$$

$$-\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha = \tau_m.$$

Система уравнений (6) имеет решение

$$\sigma_{11} = p_n - \tau_m \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = p_n + \tau_m \operatorname{tg} \alpha. \quad (7)$$

Равенства (5), (7) полностью определяют напряженное состояние в вершине конуса. Задано шесть ограничений на компоненты напряжений. Задача механики деформируемого тела оказывается неклассической, так как в обычной (не особой точке) задаются три ограничения.

Формулы (7) для вычисления напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  могут быть получены также и методом сечений, примененным к элементу конуса с центром в его вершине. Это обстоятельство подтверждает согласованность используемого авторами подхода с классическими приемами исследования напряжений в деформируемых телах.

## 2. Круговой конус, боковая поверхность которого вблизи вершины скользит без трения вдоль жесткой поверхности

Принимается, что боковая поверхность конуса вблизи вершины  $A$  скользит без трения вдоль жесткой поверхности. Для элементарного объема в вершине конуса (особой точки) выполняются условия:

1) сдвиг между линейными элементами, исходящими из вершины в направлении образующих конуса в любом его осевом сечении, обращается в нуль;

2) задаваемые касательные усилия  $\tau_m$  и  $\tau_n$  равны нулю.

Сдвиг  $\gamma$  между указанными в п. 1 направлениями выражается равенством

$$\gamma = \sin 2\alpha (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} \sin^2 \varphi - \varepsilon_{33} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{23} \sin 2\varphi). \quad (8)$$

При построении равенства (8) использовалась формула

$$\gamma \sin \beta = [2\varepsilon_{rp} - (\eta_k + \eta_p)\delta_{rp}]k_r t_p, \quad (9)$$

определяющая сдвиг  $\gamma$  в произвольной точке сплошной среды между направлениями  $\vec{k}$ ,  $\vec{t}$  и углом  $\beta$  между ними. В формуле (9) обозначено  $\eta_k$ ,  $\eta_t$  – относительные удлинения в точке сплошной среды в направлении ортов  $\vec{k}$ ,  $\vec{t}$  соответственно,  $\delta_{rp}$  – координаты метрического тензора. В рассматриваемой задаче  $\sin 2\alpha \neq 0$ , поэтому из равенства (8) следует зависимость между компонентами деформаций:

$$\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} \sin^2 \varphi - \varepsilon_{33} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{23} \sin 2\varphi = 0, \quad (10)$$

которая должна выполняться независимо от  $\varphi$ , вследствие чего справедливы соотношения

$$\varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}. \quad (11)$$

Обратимся к касательным напряжениям  $\tau_m$  и  $\tau_n$ . Эти компоненты через напряжения в вершине выражаются формулами (4). Так как  $\varepsilon_{23} = 0$ , то из физических уравнений следует, что и  $\sigma_{23} = 0$ . Второе из равенств (4) примет вид

$$0.5 \sin 2\alpha (-\sigma_{11} + \sigma_{22} \sin^2 \varphi + \sigma_{33} \cos^2 \varphi) + \cos 2\alpha (\sigma_{12} \sin \varphi - \sigma_{13} \cos \varphi) = 0. \quad (12)$$

Это равенство должно выполняться при любых значениях  $\varphi$ , вследствие чего получаем

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}. \quad (13)$$

Третье равенство (4) при выполнении равенств (13) удовлетворяется тождественно. Равенства (13) и (11) задают пять независимых ограничений в вершине конуса. Задача механики деформируемого тела является неклассической.

Первое из условий (4) определяет компоненты вектора напряжений

$$p_n = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}.$$

**Пример.** Рассматривается круговой конус, закрепленный так, что его боковая поверхность и основание могут скользить без трения вдоль жесткой поверхности. Конус подвергается однородной температурной нагрузке  $\Delta T$ . Приняты обозначения  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\omega$  – коэффициент температурной деформации. Перемещения  $u_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  ( $u_i$  – компоненты вектора перемещений) и значения напряжений

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{\omega \Delta T E}{1 - 2\nu} \quad (14)$$

во всех точках конуса, включая вершину, удовлетворяют всем уравнениям линейной термоупругости и граничным условиям, т.е. являются решением данной задачи, что согласуется с приведенными выше результатами.

### 3. Круговой конус с заземленной боковой поверхностью

Пусть боковая поверхность кругового конуса вблизи вершины жестко заземлена. Тогда в представительном объеме (особой точке) выполняются условия:

1) относительное удлинение линейного элемента вдоль любой образующей конуса обращается в нуль;

2) сдвиг между линейными элементами в направлении образующих в любом осевом сечении конуса равен нулю.

Условие 1) запишется равенством

$$\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi + \varepsilon_{33} \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \\ + \varepsilon_{12} \sin 2\alpha \sin \varphi - \varepsilon_{13} \sin 2\alpha \cos \varphi - \varepsilon_{23} \sin^2 \alpha \sin 2\varphi = 0. \quad (15)$$

Равенство (15) должно выполняться независимо от значения  $\varphi$ , что возможно лишь при условиях

$$\varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0. \quad (16)$$

Условие 2) совпадает с равенством (10), из которого следует выполнение зависимости (11). Из равенств (11) и (16) получаем, что в особой точке выполняются соотношения

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, деформированное состояние в вершине конуса полностью определено. Задача механики деформируемого тела является неклассической. В частности, при температурной нагрузке из физических уравнений получаем напряжения в особой точке:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{\omega \Delta T E}{1 - 2\nu}, \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (i \neq j). \quad (18)$$

### 4. Составной конус (внутренняя коническая точка)

Рассматриваются два конуса 1 и 2 с общей вершиной  $A$  (рис. 2). Конусы скреплены по боковым поверхностям. Приняты обозначения:  $\sigma_{ij}^{(k)}, \dots, E_k, \dots$  ( $k = 1, 2$ ).

Индекс « $k$ » указывает конус, которому отвечает данный параметр.

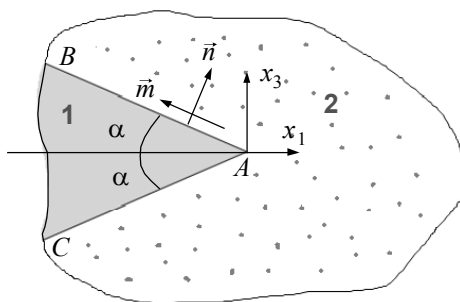


Рис. 2. Осевое сечение составного конуса  
Fig. 2. Axial section of the composite cone

Параметры состояния представительных объемов (особых точек) в вершинах конусов подчиняются ограничениям:

1) относительные удлинения линейных элементов, исходящих из точки  $A$  в направлении общей образующей конусов, совпадают при любом  $\varphi$  (вводится на рис. 1, б):

$$\eta_m^{(1)} = \eta_m^{(2)}; \quad (19)$$

2) суммарное изменение углов  $BAC$  (острого  $\gamma_1$  и тупого  $\gamma_2$ ) в любом осевом сечении конуса равно нулю:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0; \quad (20)$$

3) касательные и нормальные напряжения на площадках, ориентируемых ортом  $\vec{n}$ , совпадают при любом значении  $\varphi$ :

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)}, \quad \tau_m^{(1)} = \tau_m^{(2)}, \quad \tau_l^{(1)} = \tau_l^{(2)}. \quad (21)$$

Далее вводятся обозначения:

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)} = \xi_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} = \zeta_{ij}, \quad (22)$$

с использованием которых условие (19) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \xi_{11} \cos^2 \alpha + \xi_{22} \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi + \xi_{33} \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \\ & + \xi_{12} \sin 2\alpha \sin \varphi - \xi_{13} \sin 2\alpha \cos \varphi - \xi_{23} \sin^2 \alpha \sin 2\varphi = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Равенство (23) должно выполняться при любых значениях угла  $\varphi$ , вследствие чего из него следуют условия для деформаций:

$$\xi_{12} = 0, \quad \xi_{13} = 0, \quad \xi_{23} = 0, \quad \xi_{22} = \xi_{33}, \quad \xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} = 0. \quad (24)$$

Условие (20) с использованием формулы (9) и обозначений (22) запишется равенством

$$\xi_{11} - \xi_{22} \sin^2 \varphi - \xi_{33} \cos^2 \varphi + \xi_{23} \sin 2\varphi = 0. \quad (25)$$

Это равенство должно выполняться независимо от  $\varphi$ , поэтому из него дополнительно к (24) следует

$$\xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{33}. \quad (26)$$

Из равенств (24) и (26) получаем, что в вершине конуса все параметры  $\xi_{ij}$  обращаются в нуль. Это означает, что все компоненты деформаций в вершине конуса непрерывны.

Первые два условия (21) с использованием обозначений (22) приводятся к виду

$$\begin{aligned} & \zeta_{11} \sin^2 \alpha + \zeta_{22} \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha + \zeta_{33} \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi - \\ & - \zeta_{12} \sin 2\alpha \sin \varphi + \zeta_{13} \sin 2\alpha \cos \varphi - \zeta_{23} \sin 2\varphi \cos^2 \alpha = 0, \\ & -\zeta_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \zeta_{22} \sin^2 \varphi \sin \alpha \cos \alpha + \zeta_{33} \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \varphi - \\ & - \zeta_{12} \cos 2\alpha \sin \varphi - \zeta_{13} \cos 2\alpha \cos \varphi - \zeta_{23} \sin 2\alpha \sin \alpha \cos \varphi = 0, \end{aligned}$$

Вследствие того, что эти равенства должны выполняться при любых значениях  $\varphi$ , из них следует

$$\zeta_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (27)$$

т.е. напряжения в вершине конуса непрерывны так же, как и деформации. Третье из равенств (21) не накладывает новых ограничений на компоненты напряжений.

С применением физических уравнений условия непрерывности деформаций в особых точках запишем через напряжения:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \sigma_{11} - \left( \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{22} - \left( \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{33} &= Q, \\ - \left( \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \sigma_{22} - \left( \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{33} &= Q, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} - \left( \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{11} - \left( \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{22} + \left( \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \sigma_{33} &= Q, \\ \left( \frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2} \right) \sigma_{12} = 0, \quad \left( \frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2} \right) \sigma_{13} = 0, \quad \left( \frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2} \right) \sigma_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

В этих равенствах  $G_k$ ,  $\omega_k$  ( $k = 1, 2$ ) – модули сдвига скрепляемых конусов и коэффициенты температурной деформации,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) вследствие непрерывности напряжений в вершине конусов,  $Q = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T$ .

Изучим решения систем уравнений (28), (29). Определитель матрицы системы уравнений (28) вычисляется по формуле

$$\Delta = \left( \frac{1}{E_1 E_2} \right)^3 [E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2)]^2 [E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)]. \quad (30)$$

В зависимости от сочетания материальных параметров возможны варианты.

1.  $\Delta \neq 0$ . Из этого условия следует, что  $G_1 \neq G_2$ , поэтому уравнения (28), (29) имеют единственное решение

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{QE_1 E_2}{E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2)}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (31)$$

При этом напряженное состояние в вершине конусов полностью определено. Видим, что в дополнение к условиям (27), вытекающим из принимаемых в классической постановке условий непрерывности (21), дополнительно в вершине составного конуса должны выполняться равенства (31). Следовательно, рассматриваемая задача механики деформируемого тела является неклассической.

Из решения (31) видно, что сочетание параметров

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0 \quad (32)$$

является критическим, так как в этом случае напряжения  $\sigma_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) обращаются в бесконечность.

2.  $\Delta = 0$ . Причем

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) \neq 0. \quad (33)$$

Ранг системы уравнений (28) равен двум. Ранг расширенной матрицы равен двум, если  $Q = 0$ , и трем, если  $Q \neq 0$ . Поэтому реализуются варианты:

а)  $Q = 0$ . Напряжения  $\sigma_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) подчинены ограничениям (так как в данном случае  $G_1 \neq G_2$ )

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (34)$$

Эти ограничения на компоненты напряжений оказываются дополнительными к ограничениям (27), поэтому задача механики деформируемого тела в данном случае является неклассической.

б)  $Q \neq 0$ . Уравнения (28) несовместны. При температурной нагрузке выполнение равенств (33) обуславливает сингулярное поведения решения в вершине конусов.

3.  $\Delta = 0$ . Причем

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) \neq 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) = 0. \quad (35)$$

Ранг матрицы системы уравнений (28) равен рангу расширенной матрицы и равен единице. Уравнения совместны. Между напряжениями справедлива зависимость

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -\frac{QE_1E_2}{E_2\nu_1 - E_1\nu_2}.$$

Это ограничение на компоненты напряжений является дополнительным к ограничениям (27), задача механики деформируемого тела неклассическая.

В данном случае  $G_1 = G_2$ , поэтому каких-либо ограничений на компоненты  $\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) не накладывается.

4.  $\Delta = 0$ . Причем,

$$E_2(1 - 2\nu_1) - E_1(1 - 2\nu_2) = 0, \quad E_2(1 + \nu_1) - E_1(1 + \nu_2) = 0. \quad (36)$$

В этом случае модули Юнга и коэффициенты Пуассона конусов совпадают. Ранг системы уравнений (28) равен нулю. Ранг расширенной матрицы зависит от значений коэффициентов температурной деформации. Если материалы конусов идентичны, особая точка отсутствует. Дополнительных условий на компоненты напряжений не существует. Задача механики деформируемого тела является классической. Когда ранг расширенной матрицы равен единице, уравнения (28) несовместны. Особая точка является точкой сингулярного поведения решения.

### Заключение

На основе представления точки сплошной среды в виде малой частицы, определяемой точкой континуума и присоединенным объемом, изучены ограничения на компоненты напряжений в вершине кругового конуса. Рассмотрены случаи, когда конус проскальзывает без трения вдоль жесткой поверхности, контактирует с жесткой поверхностью без проскальзывания или подвергается силовому воздействию вблизи вершины. Показано, что во всех случаях количество ограничений на параметры состояния в вершине конуса превышает количество ограничений в обычных граничных точках. В частности, при любой поверхностной нагрузке на-



пряжения в вершине полностью определены. Это означает, что задачи механики деформируемого тела для кругового конуса должны рассматриваться как неклассические. Установлены ограничения на компоненты нагрузки, обеспечивающие корректность постановки таких задач. Изучены особенности напряженного состояния в вершине конуса, когда она является внутренней особой точкой среды. Показано, что параметры состояния во внутренней особой точке непрерывны. Приведенные результаты найдут применение при постановке неклассических задач в исследованиях напряженного состояния вблизи вершины кругового конуса. В частности, при изучении взаимодействия конических инденторов с образцами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension // *J. App. Mech.* 1952. V. 19. P. 526–528.
2. *Bogy D.B.* Two Edge-bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction // *Trans. ASME. Ser.E.* 1971. V. 38. No. 2. P. 87–96. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3408786>.
3. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis // *App. Mech. Rev.* 2004. V. 57. No. 4. P. 251–297.
4. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // *App. Mech. Rev.* 2004. V. 57. No. 4. P. 385–439.
5. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
6. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
7. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1967. 402 с.
8. *Андреев А.В.* Суперпозиция степенно-логарифмических и степенных сингулярных решений в двумерных задачах теории упругости // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* 2014. № 1. С. 5–30.
9. *Рязанцева Е.А.* Метод граничных состояний в задачах теории упругости с сингулярностями физического и геометрического характера: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Липецк, 2015. 215 с.
10. *Коваленко М.Д., Галаджиев С.В., Гоголева О.С., Трубников Д.В.* Особенности напряженного состояния в конечных областях вблизи угловых точек границы // *Механика композиционных материалов и конструкций.* 2011. Т. 17. № 1. С. 53–60.
11. *He Z., Kotousov A.* On evaluation of stress intensity factor from in-plane and transverse surface displacements // *Experim. Mech.* 2016. V. 56. No. 8. P. 1385–1393. DOI: 10.1007/s11340-016-0176-8
12. *Koguchi H., Muramoto T.* The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints // *Int. J. Solids and Struc.* 2000. V. 37. No. 35. P. 4737–4762. [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00159-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00159-6)
13. *Barut A., Guven I., Madenci E.* Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // *Int. J. Solid and Struc.* 2001. V. 38. No. 50-51. P. 9077–9109.
14. *Федоров А.Ю.* Исследование и оптимизация напряженного состояния в окрестности особых точек упругих тел : дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Пермь, 2016. 157 с.
15. *Lee Y., Jeon I., Im S.* The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite // *Int. J. Solids and Stru.* 2006. V. 43. No. 9. P. 2710–2722. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.050>.
16. *Xu W., Tong Z., Leung A.Y.T., Xu X., Zhou Z.* Evaluation of the stress singularity of an interface V-notch in a bimaterial plate under bending // *Eng. Frac. Mech.* 2016. V. 168. P. 11–25. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.09.009>.

17. Wu Z. A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity // Eng. Fract. Mech. 2006. V. 73. No. 7. P. 953–962. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.10.010>.
18. Hideo Koguchi, Joviano Antonio da Costa. Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface // Int. J. Solids and Structures. 2010. V. 47. P. 3131–3140. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015>.
19. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
20. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // ДАН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С.33–36.
21. Parihar K.S., Keer L.M. Elastic stress singularities at conical inclusions // Int. J. Solids Struct. 1978. V. 14. P. 261–263.
22. Будаев Б.В., Морозов Н.Ф., Нарбут М.А. Кручение кругового конуса при статическом и динамическом нагружении // ПММ. 1994. Т. 58. № 6. С. 152–156.
23. Picu C.R. Stress singularities at vertices of conical inclusions with freely sliding interfaces // Int. J. Solids Structures. 1996. V. 33. No. 17. P. 2453–2457.
24. Денисюк И.Т. Напряжения вблизи конической тоски поверхности раздела сред // МТТ. 2001. № 3. С. 68–77.
25. Nkemzi B. On solution of Lamé equations in axisymmetric domains with conical points // Math. Methods Appl. Sciences. 2005. V. 28. No. 1. P. 29–41.
26. Корепанова Т.О., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Аналитические построения собственных решений для изотропных конических тел и их приложения для оценки сингулярности напряжений // ДАН. 2014. Т. 457. № 3. С. 286–291. DOI: 10.7868/s0869565214210105.
27. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Напряженное состояние вблизи особой точки составной конструкции в плоской задаче // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 4(24). С. 78–87.
28. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Нестандартные задачи для однородных элементов конструкций с особенностями в виде клиньев в условиях плоской задачи // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1(27). С. 95–109.
29. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Итерационный конечно-элементный алгоритм исследования напряженного состояния элементов конструкций с особыми точками и его реализация // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2015. № 4. С. 171–187. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.11.
30. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины составного клина с жестко защемленными образующими // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 3. С. 131–147. DOI:10.15593/perm.mech/2016.3.09.
31. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs // Mechanics of Composite Materials. 2015. V. 51. No. 4. P. 489–504.
32. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure // Mechanics of Composite Materials. 2017. V. 53. No. 1. P. 107–116. DOI 10.1007 / s11029-017-9644-1.
33. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 576 с.
34. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
35. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface // Latin American J. Solids and Structures. 2017. V. 14. No. 11. P. 2067–2088. <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78253826>.

Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2018) RESTRICTIONS ON STRESS COMPONENTS IN THE TOP OF ROUND CONE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 89–101

DOI 10.17223/19988621/52/9

The stress state at a vertex of homogeneous or composite cone is studied using the concept of the point of deformed body considered as an elementary volume contractible to this point. Elementary volume represents an assembly of continuum points with a linear characteristic dimension equal to that of representative volume element of the material of modeled body. Elementary volume is a carrier of physical properties and state characteristics of continuous medium. The state characteristics are uniform in such a volume and, therefore, the values retain constant while the volume is being contracted to the vertex of the cone. The accepted concepts about singular point – the vertex of a cone – allow one to formulate restrictions on the state parameters in it. These restrictions are imposed in the cases when the cone is under an axisymmetric load, its generator slides without friction along a rigid surface or it is clamped, and also when the vertex of the cone is an internal point. The number of restrictions at a singular point is more than that imposed at typical surface points in the classical problem. This circumstance makes it necessary to consider the problem for a body containing singular point as non-classical problem. The proposed concept was used to define the conditions for material and geometric parameters under which the stress state at the vertex of the cone is completely determined. The cases of singular behavior of stresses in the vicinity of the cone vertex are found. The limits for load components providing a correctness of considered problem formulation are obtained. It is shown that the stresses and strains are continuous at the internal singular point.

The presented results will find an application in the formulation of non-classical problems of studying state parameters near the cone vertex. In particular, they will be useful in researching interaction of conical indenters with a test sample.

Keywords: singular points, composite cone, internal singular point, stress concentration, non-classical problems, representative volume element.

*PESTRENIN Valery Mikhaylovich* (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: pestreninVM@mail.ru

*PESTRENINA Irena Vladimirovna* (Candidate of Technical Science, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: IPestrenina@gmail.com

*LANDIK Lidiya Vladimirovna* (Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

## REFERENCES

1. Williams M.L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension. *J. of App. Mech.* 19. pp. 526–528.
2. Bogy D.B. (1971) Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. *Trans. ASME. Ser.E.* 38(2). pp. 87–96. DOI: 10.1115/1.3408786.
3. Sinclear G.B. (2004) Stress singularities in classical elasticity–I: Removal, interpretation and analysis. *App. Mech. Rev.* 57(4). pp. 251–297. DOI: 10.1115/1.1762503.
4. Sinclear G.B. (2004) Stress singularities in classical elasticity–II: Asymptotic identification. *App. Mech. Rev.* 57(4). pp. 385–439. DOI: 10.1115/1.1767846.
5. Parton V.Z., Perlin P.I. (1984) *Mathematical Methods of the Theory of Elasticity*. Moscow: Mir.
6. Chobanyan K.S. (1987) *Napryazheniya v sostavnykh uprugikh telakh* [Stress state in compound elastic bodies]. Erevan: Armenian Academy of Sciences Press.
7. Uflyand Ya.S. (1967) *Integral'nye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti* [Integral transforms in problems of the theory of elasticity]. Moscow; Leningrad: AN SSSR Publ.

8. Andreev A.V. (2014) Superpozitsiya stepenno-logarifmicheskikh i stepennykh singulyarnykh resheniy v dvumernykh zadachakh teorii uprugosti [Superposition of power-logarithmic and power singular solutions in two-dimensional elasticity problems]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 1. pp. 5–30.
9. Ryazantseva E.A. (2015) *Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti s singulyarnostyami fizicheskogo i geometricheskogo kharaktera* [Method of boundary conditions in the problems of elasticity theory with physical and geometrical singularities]. Dissertation. Lipetsk.
10. Kovalenko M.D., Galadzhiev S.V., Gogoleva O.S., Trubnikov D.V. (2011) Osobennosti napryazhennogo sostoyaniya v konechnykh oblastiakh vblizi uglovyykh tochek granitsy [Features of stress condition for finite regions near to angular points of a boundary]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy – Mechanics of composite materials and structures*. 17(1). pp. 53–60.
11. He Z., Kotousov A. (2016) On evaluation of stress intensity factor from in-plane and transverse surface displacements. *Experim. Mech.* 56(8). pp. 1385–1393. DOI: 10.1007/s11340-016-0176-8.
12. Koguchi H., Muramoto T. (2000) The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints. *Int. J. Solids and Structures*. 37(35). pp. 4737–4762. DOI: 10.1016/S0020-7683(99)00159-6.
13. Barut A., Guven I., Madenci E. (2001) Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading. *Int. J. Solids and Structures*. 38(50,51). pp. 9077–9109. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00206-2.
14. Fedorov A.Yu. (2016) *Issledovanie i optimizatsiya napryazhennogo sostoyaniya v okrestnosti osobykh tochek uprugikh tel* [Investigation and optimization of the stress state near singularities of elastic bodies]. Dissertation. Perm.
15. Lee Y., Jeon I., Im S. (2006) The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite. *Int. J. Solids and Structures*. 43(9). pp. 2710–2722. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.050.
16. Xu W., Tong Zh., Leung A.Y.T., Xu X., Zhou Zh. (2016) Evaluation of the stress singularity of an interface V-notch in a bimaterial plate under bending. *Eng. Frac. Mech.* 168(A). pp. 11–25. DOI: 10.1016/j.engfractmech.2016.09.009.
17. Wu Zh. (2006) A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity. *Eng. Fract. Mech.* 73(7). pp. 953–962. DOI: 10.1016/j.engfractmech.2005.10.010.
18. Koguchi H., da Costa J.A. (2010) Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface. *Int. J. Solids and Structures*. 47(22-23). pp. 3131–3140. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015.
19. Kondrat'ev V.A. (1967) Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastiakh s konicheskimi ili uglovymi tochkami [Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points]. *Tr. Mosk. Mat. Obs.* 16. pp. 209–292.
20. Maz'ya V.G., Plamenevskiy B.A. (1976) O koeffitsientakh v asimptotike resheniy ellipticheskikh kraevykh zadach vblizi rebra [About coefficients in the solution asymptotic for elliptic boundary value problems near the edge]. *DAN SSSR*. 229(1). pp. 33–36.
21. Parihar K.S., Keer L.M. (1978) Elastic stress singularities at conical inclusions. *Int. J. Solids and Structures*. 14(4). pp. 261–263. DOI: 10.1016/0020-7683(78)90036-7.
22. Budaev B.V., Morozov N.F., Narbut M.A. (1994) Torsion of a circular cone with static and dynamic loading. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 58(6). pp. 1097–1100. DOI: 10.1016/0021-8928(94)90128-7.
23. Picu C.R. (1996) Stress singularities at vertices of conical inclusions with freely sliding interfaces. *Int. J. Solids Structures*. 33(17). pp. 2453–2457. DOI: 10.1016/0020-7683(95)00164-6.
24. Denisyuk I.T. (2001) Napryazheniya vblizi konicheskoy tochki poverkhnosti razdela sred [Stress values near conical point of an interface]. *MTT*. 3. pp. 68–77.

25. Nkemzi B. (2005) On solution of Lamé equations in axisymmetric domains with conical points. *Math. Methods Appl. Sciences*. 28(1). pp. 29–41. DOI: 10.1002/mma.547.
26. Korepanova T.O., Matveenkov V.P., Shardakov I.N. (2014) Analiticheskie postroeniya sobstvennykh resheniy dlya izotropnykh konicheskikh tel i ikh prilozheniya dlya otsenki singulyarnosti napryazheniy [Analytical constructions of eigensolutions for isotropic conical bodies and their applications for estimating stress singularity]. *DAN*. 457(3). pp. 286–291. DOI: 10.7868/s0869565214210105.
27. Pestrenin V. M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2013) The stress state near a singular point of a flat composite design. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 24(4). pp. 78–87.
28. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2014) Non-standard problems of homogeneous structural elements with wedge shape features in the plane case. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 27(1). p. 95–109.
29. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2015) Iterative finite element algorithm and its implementation for stress state of structural elements with singular points. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 4. pp. 171–187. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.11.
30. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2016) Stress-strain state near the wedge top with rigidly fastened sides. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 3. pp. 131–147. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.09.
31. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2015) Nonstandard problems for structural elements with spatial composite ribs. *Mechanics of Composite Materials*. 51(4). pp. 489–504. DOI: 10.1007/s11029-015-9520-9.
32. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. (2017) Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure. *Mechanics of Composite Materials*. 53(1). pp. 107–116. DOI: 10.1007 / s11029-017-9644-1.
33. Sedov L.I. (1973) *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. V.1. Moscow: Nauka.
34. Rabotnov Yu.N. (1979) *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids]. Moscow: Nauka.
35. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2017) Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface. *Latin American J. Solids and Structures*. 14(11). pp. 2067–2088. DOI: 10.1590/1679-78253826.