М.Е. Завгородняя

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПРОДЛЕВАЮЩИМСЯ МЕРТВЫМ ВРЕМЕНЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

Рассматривается однородный поток событий, функционирующий в условиях продлевающегося мертвого времени, порождаемого каждым текущим событием с заданной плотностью распределения вероятностей интервала между соседними событиями. Полагается, что длительность мертвого времени также имеет заданную плотность распределения вероятностей. В данной работе получены преобразования Лапласа для интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке и общего периода мертвого времени. Приведены примеры для некоторых типов распределения.

Ключевые слова: поток событий; интервал между соседними событиями; продлевающееся мертвое время; плотность распределения вероятностей; функция распределения вероятностей; преобразование Лапласа.

Потоки однородных событий являются распространенными математическими моделями многих физических процессов и явлений. Такие модели применяются при исследовании информационных потоков сообщений в телекоммуникационных системах, спутниковых сетях связи, оптических и лазерных системах, функционирующих в режиме счета фотонов и т.п. В большинстве публикаций авторы рассматривают математические модели потоков событий, когда события потока доступны наблюдению. Однако на практике возникают ситуации, когда наступившее событие влечет за собой ненаблюдаемость последующих событий. Причиной ненаблюдаемости выступает мертвое время регистрирующих приборов [1, 2], в течение которого зарегистрированное событие обрабатывается; другие же события, поступившие в этот период, теряются. Регистрирующие приборы при этом делятся на два вида: с непродлевающимся мертвым временем, и продлевающимся [1, 2]. Задачи по оценке параметров и состояний потока событий в условиях наличия мертвого времени фиксированной длительности рассматривались в работах [3–33]. При этом в [3, 4, 6–8, 10, 12–16, 18–31] получены результаты для непродлевающегося мертвого времени, в [5, 9, 11, 17] – для продлевающегося.

Задачи по оценке параметров в условиях наличия непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности решены в [3, 4] для пуассоновского потока, в [6] для синхронного альтернирующего потока, в [7, 8, 10] для асинхронного альтернирующего потока, в [12] для синхронного потока, в [13–15] для асинхронного потока, в [16, 18] для полусинхронного потока, в [19–21] для обобщенного асинхронного потока, в [22, 23] для обобщенного полусинхронного потока, в [24, 25] для МАР-потока, в [26, 27] для модулированного синхронного потока, в [28, 29] для модулированного обобщенного полусинхронного потока, в [30–33] для модулированного МАР-потока; при продлеваемом мертвом времени фиксированной длительности – в [5] для пуассоновского потока, в [9] для альтернирующего асинхронного потока, в [11] для синхронного потока, в [17] для полусинхронного потока.

Задачи по оценке параметров пуассоновского потока, функционирующего в условиях наличия непродлевающегося мертвого времени случайной длительности, рассматривались в работах [34, 35]. В настоящей статье рассматривается однородный поток событий, функционирующий в условиях продлевающегося мертвого времени специального типа.

1. Математическая модель наблюдаемого потока

Рассматривается поток однородных событий с заданной плотностью или функцией распределения вероятностей интервала между соседними событиями (входящий поток событий). После каждого зарегистрированного события во входящем потоке наступает период мертвого времени случайной длительности θ_i , с заданной плотностью или функцией распределения вероятностей, в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. В то же время, хотя события и не наблюдаются в течение мертвого времени, они вызывают продление периода ненаблюдаемости на случайную длительность, имеющую те же вероятностные характеристики, как и предыдущий период ненаблюдаемости, но при этом предыдущий период мертвого времени в этот момент заканчивается (обрезается), так что наблюдаться будет лишь то событие потока, которое наступит после окончания последнего периода ненаблюдаемости. Таким образом, создается общий период мертвого времени. По окончании общего периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени случайной длительности и т.д. Полагается, что длительность мертвого времени имеет заданную плотность или функцию распределения вероятностей. Вариант возникновения ситуации приведен на рис. 1, где прямоугольниками обозначены периоды мертвого времени, t_1, t_2 – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Необходимо найти вероятностные характеристики интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке и общего периода мертвого времени, такие как преобразование Лапласа для плотности распределения вероятностей в общем случае и плотности распределения вероятностей в частных случаях.

2. Преобразование Лапласа интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке

Обозначим через $\tau_i, i=1,2,\dots$ длительность i -го интервала между соседними событиями входящего потока событий с заданной плотностью или функцией распределения вероятностей, через $\theta_i, i=1,2,\dots$ – длительность i -го периода мертвого времени с заданной плотностью или функцией распределения вероятностей.

Введем две вспомогательные случайные величины:

$$\beta_i = \tau_i \cdot \chi(\tau_i > \theta_i), \quad \gamma_i = \tau_i \cdot \chi(\tau_i \leq \theta_i), \quad i \geq 1, \quad (1)$$

где $\chi(A)$ – индикатор множества A и функции:

$$\begin{aligned} F_\beta(x) &= P(0 < \tau_i < x, \tau_i \geq \theta_i), & f_\beta(x) &= F'_\beta(x), \\ F_\gamma(x) &= P(0 < \tau_i < x, \tau_i < \theta_i), & f_\gamma(x) &= F'_\gamma(x), \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим через момент ν :

$$\nu = \min\{i \geq 1 : \gamma_i = 0\}. \quad (3)$$

Тогда длительность интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке τ , учитывая (1)–(3), определяется следующим образом:

$$\tau = \sum_{i=1}^{v-1} \gamma_i + \beta_v. \quad (4)$$

Теорема 1. Преобразование Лапласа $\Phi_\tau(s)$ для плотности вероятностей $f_\tau(x)$ интервала τ между соседними событиями в наблюдаемом потоке из (4) имеет вид:

$$\Phi_\tau(s) = \frac{\Phi_\beta(s)}{1 - \Phi_\gamma(s)}, \quad (5)$$

где $\Phi_\beta(s)$, $\Phi_\gamma(s)$ – преобразования Лапласа для функций $f_\beta(x)$ и $f_\gamma(x)$ соответственно.

Доказательство. Обозначим через $F_n(x)$ функцию

$$F_n(x) = P(\gamma_1 + \dots + \gamma_n < x, \gamma_1 > 0, \dots, \gamma_n > 0), \quad f_n(x) = F'_n(x).$$

Тогда

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(u) f_\gamma(x-u) du, \quad n \geq 2. \quad (6)$$

Найдем распределение τ :

$$\begin{aligned} P(\tau < x) &= P(0 < \beta_1 < x) + P(\gamma_1 + \beta_2 < x, \gamma_1 > 0, \beta_2 > 0) + P(\gamma_1 + \gamma_2 + \beta_3 < x, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, \beta_3 > 0) + \dots = \\ &= \int_0^x f_\beta(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x f_n(t) dt \int_0^{x-t} f_\beta(s) ds = \int_0^x f_\beta(t) dt + \int_0^x g(t) dt \int_0^{x-t} f_\beta(s) ds, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t). \quad (8)$$

Дифференцируя равенство (7), получим, что плотность распределения вероятностей $f_\tau(x)$ интервала τ определяется соотношением:

$$f_\tau(x) = f_\beta(x) + \int_0^x g(t) f_\beta(x-t) dt, \quad x > 0. \quad (9)$$

Суммируя (6) по $n = \overline{2, \infty}$ и учитывая соотношение (8), получим уравнение для нахождения $g(t)$:

$$g(x) = f_\gamma(x) + \int_0^x g(t) f_\gamma(x-t) dt. \quad (10)$$

Применяя преобразование Лапласа для (10), получаем уравнение

$$G(s) = \Phi_\gamma(s) + G(s) \cdot \Phi_\gamma(s),$$

разрешая которое относительно $G(s)$, получим

$$G(s) = \frac{\Phi_\gamma(s)}{1 - \Phi_\gamma(s)}. \quad (11)$$

Применяя преобразование Лапласа для плотности распределения вероятностей $f_\tau(x)$ из (9) и учитывая (11), находим

$$\Phi_\tau(s) = \Phi_\beta(s) + G(s) \cdot \Phi_\beta(s) = \frac{\Phi_\beta(s)}{1 - \Phi_\gamma(s)}. \quad (12)$$

Полученная формула (12) полностью совпадает с формулой (5). Теорема 1 доказана.

Рассмотрим частные случаи для конкретных видов распределений.

Частный случай 1. Пусть τ_i и θ_i – независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами λ и μ соответственно.

Получим вид функции $F_\beta(x)$ из (2) для этого конкретного случая:

$$F_\beta(x) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \int_t^\infty \mu e^{-\mu s} ds = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\mu t}) dt,$$

тогда

$$f_\beta(x) = F'_\beta(x) = \lambda (e^{-\lambda x} - e^{-(\lambda+\mu)x}), \quad x > 0. \quad (13)$$

Аналогично найдем вид функции $F_\gamma(x)$ из (2)

$$F_\gamma(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \int_t^\infty \mu e^{-\mu s} ds = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} e^{-\mu t} dt,$$

тогда

$$f_\gamma(x) = F'_\gamma(x) = \lambda e^{-(\lambda+\mu)x}, \quad x > 0. \quad (14)$$

Получим преобразования Лапласа $\Phi_\beta(s)$, $\Phi_\gamma(s)$ для функций $f_\beta(x)$ и $f_\gamma(x)$ соответственно из (13)–(14) в виде:

$$\Phi_\beta(s) = \lambda \left(\frac{1}{\lambda + s} - \frac{1}{\lambda + \mu + s} \right) = \frac{\lambda \cdot \mu}{(\lambda + s) \cdot (\lambda + \mu + s)}, \quad (15)$$

$$\Phi_\gamma(s) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu + s}. \quad (16)$$

Используя результат (5) теоремы 1 и формулы (15)–(16), находим преобразование Лапласа $\Phi_\tau(s)$ для плотности вероятностей $f_\tau(x)$:

$$\Phi_\tau(s) = \frac{\Phi_\beta(s)}{1 - \Phi_\gamma(s)} = \frac{\lambda \cdot \mu}{(\lambda + s) \cdot (\mu + s)} = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda - \mu} \left(\frac{1}{\mu + s} - \frac{1}{\lambda + s} \right), \quad \lambda \neq \mu. \quad (17)$$

С помощью обратного преобразования Лапласа получим явный вид плотности вероятностей $f_\tau(x)$ интервала τ между соседними событиями в наблюдаемом потоке:

$$f_\tau(x) = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda - \mu} (e^{-\mu x} - e^{-\lambda x}), \quad x > 0. \quad (18)$$

Замечание. Стоит отметить интересный факт: формула (18) совпала с результатом, полученным в статье [34]. Действительно, продлевающееся мертвое время в таком варианте для экспоненциальных распределений сводится к непродлевающемуся мертвому времени, что достаточно просто объясняется в вероятностном смысле.

Частный случай 2. Пусть τ_i – независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами λ , а $\theta_i \equiv T$, где $T = \text{const}$.

Тогда функции $f_\beta(x)$ и $f_\gamma(x)$ из (2) для этого конкретного случая имеют вид:

$$f_\beta(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > T, \\ 0, & x \leq T, \end{cases} \quad f_\gamma(x) = \begin{cases} 0, & x \leq T, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > T. \end{cases} \quad (19)$$

Получим преобразования Лапласа $\Phi_\beta(s)$, $\Phi_\gamma(s)$ для функций $f_\beta(x)$ и $f_\gamma(x)$ соответственно из (19) в виде:

$$\Phi_\beta(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} e^{-(\lambda+s)T}, \quad \Phi_\gamma(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} (1 - e^{-(\lambda+s)T}). \quad (20)$$

Используя результат (5) теоремы 1 и формулы (20), находим преобразование Лапласа $\Phi_\tau(s)$ для плотности вероятностей $f_\tau(x)$:

$$\Phi_\tau(s) = \frac{\Phi_\beta(s)}{1 - \Phi_\gamma(s)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda + s} e^{-(\lambda+s)T}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda + s} (1 - e^{-(\lambda+s)T})}. \quad (21)$$

3. Преобразование Лапласа длительности общего периода ненаблюдаемости

Введем две вспомогательные случайные величины:

$$\tilde{\beta}_i = \theta_i \cdot \chi(\tau_i > \theta_i), \quad \gamma_i = \tau_i \cdot \chi(\tau_i \leq \theta_i), \quad i \geq 1, \quad (22)$$

где $\chi(A)$ – индикатор множества A и функции:

$$\begin{aligned} F_{\tilde{\beta}}(x) &= P(0 < \tau_i < x, \tau_i \geq \theta_i), \quad f_{\tilde{\beta}}(x) = F'_{\tilde{\beta}}(x), \\ F_{\gamma}(x) &= P(0 < \tau_i < x, \tau_i < \theta_i), \quad f_{\gamma}(x) = F'_{\gamma}(x), \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Обозначим через момент v :

$$v = \min\{i \geq 1 : \gamma_i = 0\}. \quad (24)$$

Тогда длительность общего периода ненаблюдаемости θ , учитывая (22)–(24), определяется следующим образом:

$$\theta = \sum_{i=1}^{v-1} \gamma_i + \tilde{\beta}_v. \quad (25)$$

Теорема 2. Преобразование Лапласа $\Phi_{\theta}(s)$ для плотности вероятностей $f_{\theta}(x)$ общего периода ненаблюдаемости θ из (25) имеет вид

$$\Phi_{\theta}(s) = \frac{\Phi_{\tilde{\beta}}(s)}{1 - \Phi_{\gamma}(s)}, \quad (26)$$

где $\Phi_{\tilde{\beta}}(s)$, $\Phi_{\gamma}(s)$ – преобразования Лапласа для функций $f_{\tilde{\beta}}(x)$ и $f_{\gamma}(x)$ соответственно.

Так как вывод формулы (26) аналогичен выводу формулы (5), то приводить доказательство теоремы 2 не будем.

Частный случай. Пусть τ_i и θ_i независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами λ и μ соответственно.

Получим вид функции $F_{\tilde{\beta}}(x)$ из (22) для этого конкретного случая:

$$F_{\tilde{\beta}}(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu t} dt \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} ds = \int_0^x \mu e^{-(\lambda+\mu)t} dt,$$

тогда

$$f_{\tilde{\beta}}(x) = F'_{\tilde{\beta}}(x) = \mu e^{-(\lambda+\mu)x}, \quad x > 0. \quad (27)$$

Для функции $f_{\gamma}(x)$ справедлива формула (14).

Получим преобразование Лапласа $\Phi_{\tilde{\beta}}(s)$ для функций $f_{\tilde{\beta}}(x)$ из (27) в виде:

$$\Phi_{\tilde{\beta}}(s) = \frac{\mu}{\lambda + \mu + s}. \quad (28)$$

Преобразование Лапласа для функций $f_{\gamma}(x)$ из (14) имеет вид (16).

Используя результат (26) теоремы 2 и формулы (28), (16), находим преобразование Лапласа $\Phi_{\theta}(s)$ для плотности вероятностей $f_{\theta}(x)$:

$$\Phi_{\theta}(s) = \frac{\Phi_{\tilde{\beta}}(s)}{1 - \Phi_{\gamma}(s)} = \frac{\mu}{\mu + s}. \quad (29)$$

С помощью обратного преобразования Лапласа для формулы (29) получим явный вид плотности вероятностей $f_{\theta}(x)$ общего периода ненаблюдаемости θ :

$$f_{\theta}(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x > 0. \quad (30)$$

Замечание. Стоит отметить, что плотность вероятностей $f_{\theta}(x)$ общего периода ненаблюдаемости (30) совпала с плотностью вероятностей длительности θ_i мертвого времени, что достаточно просто объясняется в вероятностном смысле.

Заключение

Для потока однородных событий с заданной плотностью или функцией распределения вероятностей интервала между соседними событиями в схеме с продлевающимся мертвым временем

специального типа, подробно описанным в разд. 1 настоящей статьи и наглядно представленным на рис. 1, длительность которого имеет также заданную плотность или функцию распределения вероятностей, получены вероятностные характеристики для интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке и общего периода мертвого времени, такие как преобразования Лапласа для плотностей распределения вероятностей в общем случае и плотностей распределения вероятностей в частных случаях.

Автор выражает признательность доктору физико-математических наук С.Э. Воробейчикову и доктору технических наук, профессору А.М. Горцеву за обсуждение вопросов, связанных с написанием данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курочкин С.С. Многомерные статистические анализаторы. М. : Атомиздат, 1968. 446 с.
2. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
3. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of intensity of the Poisson stream of events for condition under which it is partially unobservable // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1992. V. 47, No. 1. P. 33–38.
4. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1993. V. 48, No. 10. P. 40–45.
5. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow // *Radiotekhnika*. 1996. No. 2. P. 8–11.
6. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // *Вестник Томского государственного университета*. 2003. № 6. С. 232–239.
7. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени // *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2005. № 10. С. 35–49.
8. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишнего события // *Вестник Томского государственного университета*. 2004. № 284. С. 137–145.
9. Gortsev A.M., Parshina M.E. Estimation of parameters of an alternate stream of events in “dead” time conditions // *Russian Physics Journal*. 1999. V. 42, No. 4. P. 373–378.
10. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // *Оптика атмосферы и океана*. 1997. Т. 10, № 3. С. 273–280.
11. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // *Automation and Remote Control*. 2008. V. 69, No. 9. P. 1517–1533.
12. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // *Радиотехника*. 2004. № 10. С. 8–16.
13. Vasileva L.A., Gortsev A.M. Estimation of the dead time of an asynchronous double stochastic flow of events under incomplete observability // *Automation and Remote Control*. 2003. V. 64, No.12. P. 1890–1898.
14. Vasileva L.A., Gortsev A.M. Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability // *Automation and Remote Control*. 2002. V. 63, No. 3. P. 511–515.
15. Горцев А.М., Куснатдинов Р.Т. Оценивание состояний МС-потока событий при его частичной наблюдаемости // *Известия высших учебных заведений. Физика*. 1998. № 4. С. 22–30.
16. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // *Measurement Techniques*. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
17. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Semisynchronous double stochastic flow of events when the dead time is prolonged // *Vychislitel'nye tekhnologii*. 2008. V. 13, No. 1. P. 31–41.
18. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // *Вестник Томского государственного университета*. 2000. № 269. С. 95–98.
19. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
20. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
21. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
22. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2015. № 1 (30). С. 27–37.

23. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.
24. Gortsev A.M., Solov'ev A.A. Joint probability density of interarrival interval of a flow of physical events with unextendable dead time period // Russian Physics Journal. 2014. V. 57, No. 7. P. 973–983.
25. Горцев А.М., Соловьев А.А. Оценка максимального правдоподобия длительности непродлеваемого мертвого времени в потоке физических событий // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58, № 11. С. 141–149.
26. Сиротина М.Н., Горцев А.М. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1 (34). С. 50–64.
27. Gortsev A., Sirotina A. Joint probability density function of modulated synchronous flow interval duration under conditions of fixed dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 41–52.
28. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1 (26). С. 13–24.
29. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 13–27.
30. Nezhelskaya L. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 342–350.
31. Нежелская Л.А. Условия рекуррентности потока физических событий при непродлеваемом мертвом времени // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58, № 12. С. 168–175.
32. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
33. Nezhel'skaya L. Estimation of the unextendable dead time period in a flow of physical events by the method of maximum likelihood // Russian Physics Journal. 2016. V. 59, No. 5. P. 651–662.
34. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценивание параметра непродлеваемого мертвого времени случайной длительности в пуассоновском потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 40. С. 32–40.
35. Завгородняя М.Е., Шитина А.А. Исследование простейшего потока событий в условиях непродлеваемого мертвого времени // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы V Междунар. молодежной науч. конф. / под общ. ред. И.С. Шмырина. Томск : Издательский Дом ТГУ, 2017. С. 128–133.

Поступила в редакцию 12 января 2018 г.

Zavgorodnyaya M.E. (2018) PROBABILISTIC CHARACTERISTICS OF THE FLOW OF EVENTS WITH PROLONGING DEAD TIME OF SPECIAL TYPE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 43. pp. 33–41

DOI: 10.17223/19988605/43/4

The flow of events with dead times is studied. Denote τ_i , $i=1,2,\dots$, the time intervals between events of the flow with known distribution function. The arrival of event is followed by the period of random length with known distribution function when the events of the flow are unobservable (dead time). If a next event arrives during this period, then the current dead time period is finished but a new period is generated (prolonging dead time). Denote θ_i , $i=1,2,\dots$, the duration of dead times. To study the characteristics of the process, we introduce the random values

$$\beta_i = \tau_i \cdot \chi(\tau_i > \theta_i), \quad \gamma_i = \tau_i \cdot \chi(\tau_i \leq \theta_i), \quad i \geq 1,$$

where $\chi(A)$ is the indicator of a set A and the functions:

$$\begin{aligned} F_\beta(x) &= P(0 < \tau_i < x, \tau_i \geq \theta_i), \quad f_\beta(x) = F'_\beta(x), \\ F_\gamma(x) &= P(0 < \tau_i < x, \tau_i < \theta_i), \quad f_\gamma(x) = F'_\gamma(x), \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Define the time v

$$v = \min\{i \geq 1 : \gamma_i = 0\}.$$

Taking the time interval τ between observed events is defined in the following way:

$$\tau = \sum_{i=1}^{v-1} \gamma_i + \beta_v.$$

Theorem 1. The Laplace transformation $\Phi_\tau(s)$ of the probability density $f_\tau(x)$ of a time interval τ between observed events has the form

$$\Phi_\tau(x) = \frac{\Phi_\beta(s)}{1 - \Phi_\gamma(s)},$$

where $\Phi_\beta(s)$, $\Phi_\gamma(s)$ are the Laplace transformations of the functions $f_\beta(x)$ and $f_\gamma(x)$ respectively.

To find the characteristics of the time interval θ when the events cannot be observable, we introduce the auxiliary random variables

$$\tilde{\beta}_i = \theta_i \cdot \chi(\tau_i > \theta_i), \quad \gamma_i = \tau_i \cdot \chi(\tau_i \leq \theta_i), \quad i \geq 1,$$

and functions:

$$F_{\tilde{\beta}}(x) = P(0 < \tau_i < x, \tau_i \geq \theta_i), \quad f_{\tilde{\beta}}(x) = F'_{\tilde{\beta}}(x), \\ F_{\gamma}(x) = P(0 < \tau_i < x, \tau_i < \theta_i), \quad f_{\gamma}(x) = F'_{\gamma}(x), \quad i \geq 1.$$

Denote the time v :

$$v = \min\{i \geq 1: \gamma_i = 0\}$$

Taking the time interval θ is defined as follows:

$$\theta = \sum_{i=1}^{v-1} \gamma_i + \tilde{\beta}_v.$$

Theorem 2. The Laplace transformation $\Phi_{\theta}(s)$ of the density function $f_{\theta}(x)$ of time interval θ has the form

$$\Phi_{\theta}(s) = \frac{\Phi_{\tilde{\beta}}(s)}{1 - \Phi_{\gamma}(s)},$$

where $\Phi_{\tilde{\beta}}(s)$, $\Phi_{\gamma}(s)$ are the Laplace transformations of functions $f_{\tilde{\beta}}(x)$ and $f_{\gamma}(x)$, respectively.

Examples of using Theorem 1 and Theorem 2 for some types of distribution are given.

Thus, for a flow of homogeneous events with a given density or probability distribution function of the interval between observed events in a flow with prolonging dead time of special type, the duration of which also has a given probability distribution function, the Laplace transformations for the probability density distribution in the General case and the probability density distribution in particular cases are obtained.

Keywords: flow of events; time interval between observed events; prolonged dead time; probability density; distribution function; Laplace transformation.

ZAVGORODNYAYA Maria Evgenievna (Candidate of Technical Sciences, Tomsk State University, National Research Russian Federation).
E-mail: mari.zavgor@mail.ru

REFERENCES

1. Kurochkin, S.S. (1968) *Mnogomernyye statisticheskiye analizatory* [Multivariate statistical analyzers]. Moscow: Atomizdat.
2. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoye.
3. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1992) Estimation of intensity of the Poisson stream of events for condition under which it is partially unobservable. *Telecommunications and Radio Engineering – Telecommunications and Radio Engineering*. 47(1). pp. 33–38. (In Russian).
4. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1993) Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events. *Telecommunications and Radio Engineering – Telecommunications and Radio Engineering*. 48(10). pp. 40–45. (In Russian).
5. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1996) Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow. *Radiotekhnika – Radioengineering*. 2. pp. 8–11.
6. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Otsenivaniye dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobyitiy [Dead time period and parameter estimation of synchronous alternating flow of events]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 6. pp. 232–239.
7. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2005) Otsenivaniye dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobyitiy pri neprodlevayushchemsya mertvom vremeni [Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 10. pp. 35–49.
8. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) The estimation of the dead time period and parameters of the asynchronous alternating event flow with extra event initiation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 284. pp. 137–145. (In Russian).
9. Gortsev, A.M. & Parshina, M.E. (1999) Estimation of parameters of an alternate stream of events in “dead” time conditions. *Russian Physics Journal*. 42(4). pp. 373–378. (In Russian).
10. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (1997) Otsenka parametrov al'terniruyushchego potoka sobyitiy pri uslovii yego chastichnoy na-blyudayemosti [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of particulate observability]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 10(3). pp. 273–280.
11. Bushlanov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 69(9). pp. 1517–1533. DOI: 10.1134/S0005117908090075
12. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Otsenivaniye dlitel'nosti “mertvogo vremeni” i intensivnostey sinkhronnogo dvazhdyy stokhasticheskogo potoka sobyitiy [Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow]. *Radiotekhnika – Radioengineering*. 10. pp. 8–16.

13. Vasileva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002a) Estimation of the dead time of an asynchronous double stochastic flow of events under incomplete observability. *Automation and Remote Control*. 64(12). pp. 1890–1898. DOI: 10.1023/B:AURC.0000008427.99676.df
14. Vasileva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002b) Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability. *Automation and Remote Control*. 63(3). pp. 511–515. DOI: 10.1023/A:1014718921138
15. Gortsev, A.M. & Kusnatdinov, R.T. (1998) Otsenivaniye sostoyaniy MS-potoka sobytiy pri yego chastichnoy nablyudayemosti [Estimation of states of the MC-flow of events under its partial observation]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 4. pp. 22–30.
16. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536–545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
17. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semisynchronous double stochastic flow of events when the dead time is prolonged. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(1). pp. 31–41. (In Russian).
18. Nezhelskaya, L.A. (2000) The optimum estimation of states of the half-synchronous event flow in conditions of its partial observability. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95–98. (In Russian).
19. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized asynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(21). pp. 14–25. (In Russian).
20. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54–63. (In Russian).
21. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32–42. (In Russian).
22. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27–37. (In Russian).
23. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19–29. (In Russian).
24. Gortsev, A.M. & Soloviev, A.A. (2014) Joint probability density of interarrival interval of a flow of physical events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal*. 57(7). pp. 973–983. DOI: 10.1007/s11182-014-0333-4
25. Gortsev, A.M. & Soloviev, A.A. (2015) Maximum likelihood estimation of fixed dead time in physical flow of events. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 58(11). pp. 141–149. (In Russian).
26. Sirotina, M.N. & Gortsev, A.M. (2016) Maximum likelihood estimator of dead time duration in modulated synchronous twice stochastic flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(34). pp. 50–64. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/34/6
27. Gortsev, A. & Sirotina, A. (2015) Joint probability density function of modulated synchronous flow interval duration under conditions of fixed dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 41–52. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_4
28. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2014) Optimal states estimation of the modulated semisynchronous integrated flow of events in the condition of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(26). pp. 13–24. (In Russian).
29. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2015) Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 13–27. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
30. Nezhelskaya, L. (2014) Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 342–350. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_39
31. Nezhelskaya, L.A. (2015) Usloviya rekurrentnosti potoka fizicheskikh sobytiy pri neprodlevayushchemsya mertvom vremeni [Conditions for recurrence of flow of physical events with unextendable dead time period]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 58(12). pp. 168–175.
32. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_12
33. Nezhelskaya, L. (2016) Estimation of the unextendable dead time period in a flow of physical events by the method of maximum likelihood. *Russian Physics Journal*. 59(5). pp. 651–662. DOI: 10.1007/s11182-016-0818-4
34. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (2017) Otsenivaniye parametra neprodlevayushchegosya mertvogo vremeni sluchaynoy dlitel'nosti v puassonovskom potoke sobytiy [Optimal states estimation of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in the condition of constant dead time]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 40. pp. 32–40. DOI: 10.17223/19988605/40/4
35. Zavgorodnyaya, M.Ye. & Shitina, A.A. (2017) [Investigation of the simplest flow of events under conditions of an unextended dead time]. *Matematicheskoye i programnoye obespecheniye informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software support of information, technical and economic systems]. Proc. of the Fifth International Conference. Tomsk. May 19, 2017. Tomsk. pp. 128–133. (In Russian).