ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Математика и механика № 53

УДК 514.76 MSC 53C15: 53C50; 53C30; 53C25; 53C38
DOI 10.17223/19988621/53/3

Н.К. Смоленцев

О ПОЧТИ (ПАРА) КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУРАХ КЭЛИ НА СФЕРАХ $S^{2,4}$ И $S^{3,3}$

Изучаются почти комплексные и почти пара-комплексные структуры Кэли на шестимерных псевдоримановых сферах в пространстве чисто мнимых октав расщепляемой алгебры Кэли **Ca′**. Показано, что структуры Кэли неинтегрируемы, вычислены их основные геометрические характеристики. В отличие от обычной римановой сферы $\mathbf{S}^6$, на рассматриваемых псевдосферах существуют (интегрируемые) комплексные структуры пара-комплексные структуры.

Ключевые слова: *алгебра Кэли, расщепляемая алгебра Кэли, группа G_2, сплит-октонионы, векторное произведение, почти комплексная структура, почти пара-комплексная структура, шестимерные псевдоримановы сферы.*

1. Введение

Почти комплексные структуры на обычной шестимерной сфере $\mathbf{S}^6$ изучаются давно и активно, (см., например, библиографию и исторический обзор по этой теме в статьях [1 и 2]). В 1958 г. LeBrun показал, что ортогональные почти комплексные структуры J на $\mathbf{S}^6$ не интегрируемы, а в 1999 г. Bor и Hernandez-Lamoneda показали, что неинтегрируемыми будут почти комплексные структуры J, ортогональные не только относительно стандартной метрики g_0, но и для метрик, близких к стандартной. Однако вопрос о существовании на $\mathbf{S}^6$ интегрируемых почти комплексных структур не решен до сих пор. Среди ортогональных почти комплексных структур J на $(\mathbf{S}^6, g_0)$ особое место занимает почти комплексная структура Кэли J_0, которая получается при помощи векторного произведения в объемлющем пространстве $\mathbf{R}^7$ чисто мнимых октав Кэли. Структура Кэли J_0 является инвариантной относительно действия компактной особой группы G_2, при этом $S^6 \cong G_2 / SU(3)$. В работе [3] для структуры Кэли J_0 на $\mathbf{S}^6$ получены аналитические выражения фундаментальной формы и ее внешнего дифференциала через калибровки пространства $\mathbf{R}^7$, найден тензор Нейенхейса через тройное векторное произведение и показано, что фундаментальная 2-форма ω является собственной для оператора Лапласа. Классификация инвариантных почти комплексных структур на однородных многообразиях размерности 6 с полупростой группой изотропии представлена в работе [4].

Как известно [5], существует расщепляемая алгебра Кэли **Ca′**, которая получается из кватернионов процедурой удвоения Кэли – Диксона с использованием «мнимого» числа $\boldsymbol{e}$, такого, что $\boldsymbol{e}^2 = +1$. Алгебра Кэли **Ca′** имеет псевдоевклидово скалярное произведение сигнатуры (4,4), определенное квадратичной формой $|x\overline{x}|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2$. Группой автоморфизмов алгебры **Ca′**

является некомпактная особая группа G_2^*. Пространство чисто мнимых сплит-октонионов наследует квадратичную форму g сигнатуры (3,4) и является поэтому псевдоевклидовым пространством $\mathbf{R}^{3,4}$. Существуют два типа сфер в пространстве $\mathbf{R}^{3,4}$: действительного и мнимого радиуса. Псевдосфера $\mathbf{S}^{2,4}$ действительного радиуса является однородным псевдоримановым многообразием $\mathrm{S}^{2,4} \cong G_2^* / SU(1,2)$ сигнатуры (2,4). Псевдосфера $\mathbf{S}^{3,3}(i)$ мнимого радиуса является однородным псевдоримановым многообразием $\mathrm{S}^{3,3} \cong G_2^* / SL(3,\mathrm{R})$ сигнатуры (3,3).

Умножение в алгебре $\mathbf{Ca'}$ определяет в пространстве $\mathbf{R}^{3,4}$ чисто мнимых октав векторное произведение, инвариантное относительно G_2^*. Это позволяет определить на сфере $\mathbf{S}^{2,4} \subset \mathbf{R}^{3,4}$ ортогональную почти комплексную структуру Кэли J через умножение касательных векторов на вектор нормали.

В данной работе показано, что такая структура не интегрируема и вычислен ее тензор Нейенхейса через тройное векторное произведение. Найдено выражение фундаментальной 2-формы ω почти эрмитовой структуры на $\mathbf{S}^{2,4}$ и показано, что 2-форма ω является собственной для оператора Лапласа. В отличие от обычной римановой сферы $\mathbf{S}^6$, на $\mathbf{S}^{2,4}$ существуют интегрируемые почти комплексные структуры.

На сфере $\mathbf{S}^{3,3}(i) \subset \mathbf{R}^{3,4}$ мнимого радиуса векторное произведение в $\mathbf{R}^{3,4}$ определяет почти пара-комплексную структуру P. Показано, что она не интегрируема, вычислен тензор Нейенхейса через тройное векторное произведение. Найдено выражение фундаментальной 2-формы ω на $\mathbf{S}^{3,3}(i)$ и показано, что ω является собственной 2-формой оператора Лапласа. В отличие от обычной римановой сферы $\mathbf{S}^6$, на $\mathbf{S}^{3,3}(i)$ существуют интегрируемые почти пара-комплексные структуры, которые легко строятся с использованием стереографической проекции.

2. Предварительные сведения

2.1. Алгебры Кэли

Пусть $\mathbf{H}$ – алгебра кватернионов $w = x^0 + x^1 \boldsymbol{e}_1 + x^2 \boldsymbol{e}_2 + x^3 \boldsymbol{e}_3$. Алгебра $\mathbf{Ca}$ чисел Кэли получается процедурой удвоения Кэли – Диксона. Для этого вводится еще одна мнимая единица $\boldsymbol{e}$ и образуются числа Кэли в виде $x = a + b\boldsymbol{e}$, где a и b – кватернионы. Умножение таких чисел определяется по формуле $xy = (a+be)(c+de) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})e$. Группой автоморфизмов алгебры Кэли $\mathbf{Ca}$ является простая особая компактная группа G_2.

Известен другой вариант процедуры удвоения Кэли – Диксона. В этом случае дополнительная «единица» $\boldsymbol{e}$ обладает свойством $\boldsymbol{e}^2 = +1$. Тогда мы получаем так называемые сплит-октонионы (split-octonions) в виде $x = a + b\boldsymbol{e}$, где a и b – кватернионы. Умножение таких чисел определяется по формуле

$$xy = (a+be)(c+de) = (ac + \bar{d}b) + (da + b\bar{c})e .$$

В результате получается неассоциативная алгебра $\mathbf{Ca'}$, которая называется расщепляемой (split) алгеброй Кэли. В дальнейшем удобно ввести обозначения: $\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}_5 = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}_6 = \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}_7 = \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}$. Отметим, что $\boldsymbol{e}_i^2 = -1$ при $i = 1, 2, 3$ и $\boldsymbol{e}_j^2 = +1$ при $j = 4, 5, 6, 7$. Каждое сплит-число Кэли записывается в виде $x = x^0 + x^1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + x^7 \boldsymbol{e}_7$, где $x_\alpha \in \mathbf{R}$, а числа $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_7$ – мнимые единицы. Имеют место следующие правила их перемножения (первый сомножитель в столбце слева, а второй – в строке сверху):

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$+1$	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	e_1	$+1$	e_3	$-e_2$
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	e_2	$-e_3$	$+1$	e_1
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	e_3	e_2	$-e_1$	$+1$

Напомним основные свойства алгебры **Ca′**, подробнее об этом см. [5]. Сопряжение сплит-октонионов задается обычным образом, $\bar{x} = x_0 - x_1\boldsymbol{e}_1 - \ldots - x_7\boldsymbol{e}_7$, и обладает свойством $\overline{xy} = \bar{y}\,\bar{x}$. Алгебра Кэли **Ca′** имеет квадратичную форму $N(x) = x\bar{x} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2$ и соответствующее псевдоевклидово скалярное произведение $\langle x, y\rangle = (x\bar{y} + y\bar{x})/2$ сигнатуры (4,4). Поэтому алгебру **Ca′** мы будем часто рассматривать как псевдоевклидово пространство $\mathbf{R}^{4,4}$. Алгебра **Ca′** является композиционной [5], поскольку выполняется равенство $N(xy) = N(x)\,N(y)$.

Алгебра **Ca′** неассоциативна, т.е. $(xy)z \neq x(yz)$. *Ассоциатором* называется выражение $[x,y,z] = (xy)z - x(yz)$. Расщепленная алгебра **Ca′** является альтернативной, т.е. выполняются свойства

- $(xx)y = x(xy)$, $x(yy) = (xy)y$, $\forall\, x,y \in$ **Ca′**.

Это название такие алгебры получили потому, что ассоциатор кососимметричен (альтернативен) по всем аргументам. В частности, свойство альтернативности записывается через ассоциатор следующим образом: $[x,x,y] = 0$, $[x, y, y] = 0$. Отметим еще ряд свойств алгебры **Ca′**:

- $x(yx) = (xy)x$;
- $(x\bar{x})y = x(\bar{x}y)$, $x(\bar{y}y) = (x\bar{y})y$, т.е. $[x,\bar{x},y] = 0$ и $[x,\bar{y},y] = 0$;
- $(xxy)x = xx(yx)$, т.е. $[xx, y, x] = 0$;
- $((xy)z)y = x(yzy)$, $(xyx)z = x(y(xz))$, $(xy)(zx) = x(yz)x$.

2.2. Группа G_2^*

Комплексная исключительная простая группа Ли $\boldsymbol{G}_2$ имеет две вещественных формы. Одна из них, компактная, обозначается символами G_2^c или G_2 и хорошо известна [6]. Вторая, некомпактная, вещественная форма обозначается G_2^*, ее описание можно найти в [7]. Эта группа G_2^* может быть определена как группа автоморфизмов расщепляемой алгебры **Ca′**. Поэтому $G_2^* \subset SO(4,3)$. Группу G_2^* можно также понимать, как стабилизатор векторного произведения на семимерном псевдоевклидовом пространстве V сигнатуры (3,4). Выберем в псевдоевклидовом пространстве V базис $(e_1, e_2, \ldots, e_7)$, в котором квадратичная форма принимает вид $g = -2(e^1\cdot e^5 + e^2\cdot e^6 + e^3\cdot e^7) - (e^4)^2$. Тогда группа G_2^* является стабилизатором следующей 3-формы на V: $\Omega_0 = \sqrt{2}(e^{123} - e^{567}) + e^4 \wedge (e^{15} + e^{26} + e^{37})$.

2.3. Векторное произведение

Векторным (r-местным) произведением на вещественном n-мерном векторном пространстве V с невырожденной билинейной формой $\langle x,y\rangle$ называется [8] полилинейное отображение $P{:}V^r \to V$ $(1 \le r \le n)$, которое обладает свойствами

$$\langle P(x_1,\ldots,x_r),x_i\rangle = 0, \quad 1 \le i \le r \quad \text{и} \quad \| P(x_1,\ldots,x_r)\|^2 = \det\left(\left\langle x_i,x_j\right\rangle\right).$$

Одноместные векторные произведения – это ортогональные комплексные структуры J на четномерном векторном пространстве V. Двухместное векторное произведение существует только в размерности 3 и 7. На семимерном векторном пространстве V они описываются следующим образом [8]. Пусть W – композиционная алгебра и V – ортогональное дополнение к единице $\boldsymbol{e}$ в алгебре W. Определим $P{:}V{\times}V \to V$ формулой $P(x,y) = xy + \langle x,y\rangle\boldsymbol{e}$. Тогда P является двухместным векторным произведением и, наоборот, каждое такое векторное произведение возникает таким образом. Если $\dim W = 8$, мы получаем 2-местное векторное произведение на 7-мерном пространстве V. Билинейная форма, ассоциированная с таким векторным произведением, имеет сигнатуру (0, 7) или (4, 3). Группа автоморфизмов есть либо G_2 (компактная форма), либо G_2^* (некомпактная форма). Любые два двуместных векторных произведения являются изоморфными.

Трехместные векторные произведения. Пусть V – композиционная алгебра и $\langle x,y\rangle$ – соответствующая билинейная форма. Определим $P_1,P_2{:}V{\times}V \to V$ формулами [8]:

$$P_1(x,y,z) = \varepsilon(-x(\overline{y}z) + < x,y > z + < y,z > x - < z,x > y),$$

$$P_2(x,y,z) = \varepsilon(-(x\overline{y})z + < x,y > z + < y,z > x - < z,x > y),$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Тогда P_1 и P_2 представляют собой трехместные векторные произведения на V относительно билинейной формы $\varepsilon\langle x,y\rangle$ и обратно каждое трехместное векторное произведение возникает таким образом.

Алгебра Кэли $\mathbf{Ca'}$ является композиционной с билинейной формой сигнатуры (4,4), поэтому на ней определены трехместные векторные произведения P_1 и P_2. Операция сопряжения определяет антиизоморфизм этих векторных произведений. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать на $\mathbf{Ca'}$ только второе векторное произведение P:

$$P(x,y,z) = -(x\overline{y})z + < x,y > z + < y,z > x - < z,x > y.$$

Отметим, что если векторы x, y, z взаимно ортогональны, то $P(x,y,z) = -(x\overline{y})z$.

2.4. Псевдосферы в пространстве $\mathbf{R}^{3,4}$

Рассмотрим семимерное пространство $\mathbf{R}^7$ чисто мнимых элементов $X = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_7\boldsymbol{e}_7$ расщепляемой алгебры $\mathbf{Ca'}$. Оно наследует квадратичную форму g сигнатуры (3,4) и является поэтому псевдоевклидовым пространством $\mathbf{R}^{3,4}$. В пространстве $\mathbf{R}^{3,4}$ можно определить два вида (псевдо)сфер:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 = r^2$$

и

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 = -r^2.$$

Первая псевдосфера $\mathbf{S}^{2,4}(r)$ имеет действительный радиус $r > 0$, она пересекает оси Ox_1, Ox_2, Ox_3. Касательные плоскости являются псевдоевклидовыми сигнатуры (2,4). Скалярные квадраты векторов нормалей к $\mathbf{S}^{2,4}(r)$ положительны, а их квадраты в алгебре Кэли $\mathbf{Ca'}$ – отрицательны. Группа G_2^* действует транзитивно и изометрично на $\mathbf{S}^{2,4}(r)$, а ее группа изотропии совпадает с $SU(1,2)$. Поэтому сфера $\mathbf{S}^{2,4}(r)$ является однородным пространством: $\mathrm{S}^{2,4} \cong G_2^* / SU(1,2)$. Отметим также, что $\mathrm{S}^{2,4} \cong SO(3,4)/SO(2,4)$.

Вторая псевдосфера $\mathbf{S}^{3,3}(ir)$ мнимого радиуса ir, она пересекает оси $Ox_4, \ldots, Ox_7$. Касательные плоскости являются псевдоевклидовыми сигнатуры (3,3). Скалярные квадраты векторов нормалей к $\mathbf{S}^{3,3}(ir)$ отрицательны, а их квадраты в алгебре Кэли $\mathbf{Ca'}$ – положительны. Группа G_2^* действует транзитивно и изометрично на $\mathbf{S}^{3,3}(ir)$, а ее группа изотропии совпадает с $SL(3,\mathbf{R})$. Поэтому сфера $\mathbf{S}^{3,3}(ir)$ является однородным пространством: $\mathrm{S}^{3,3} \cong G_2^* / SL(3,\mathrm{R})$.

2.5. Почти пара-комплексные структуры

Почти пара-комплексной структурой на $2n$-мерном многообразии M называется [9] поле P эндоморфизмов касательного расслоения TM, таких, что $P^2 = Id$ и ранги собственных распределений $T^{\pm}M := \ker(Id \mp P)$ равны. Почти пара-комплексная структура P называется *интегрируемой*, если распределения $T^{\pm}M$ инволютивны. В этом случае P называется пара-комплексной структурой. *Тензор Нейенхейса* N_P почти пара-комплексной структуры P определяется равенством

$$N_P(X,Y) = 2([X,Y] + [PX, PY] - P[PX,Y] - P[X, PY])$$

для всех векторных полей X, Y на M. Как и в комплексном случае, пара-комплексная структура P интегрируема тогда и только тогда, когда $N_P = 0$. В работе [9] представлен обзор теории и подробно рассмотрены инвариантные пара-комплексные и пара-кэлеровы структуры на группах Ли.

3. Векторное произведение в $\mathbf{R}^{3,4} = \mathrm{Im}\,(\mathbf{Ca'})$

Пусть $\mathbf{Ca'}$ – расщепляемая алгебра Кэли. Как обычно, числа вида $x = x^0$ будем называть действительными, а числа $X = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x^7\boldsymbol{e}_7$ – чисто мнимыми. Будем записывать сплит-октонионы в виде суммы $x = x^0 + X$. Пространство $\mathbf{R}^{3,4} = \mathrm{Im}(\mathbf{Ca'})$ мнимых октав наследует из $\mathbf{Ca'}$ скалярное произведение $g(X,Y) = \langle X,Y\rangle$ сигнатуры (3,4). Пусть $x = X$, $y = Y$ – два чисто мнимых сплит-октониона. Определим векторное произведение элементов X, $Y \in \mathrm{Im}(\mathbf{Ca'})$ как мнимую часть их произведения в алгебре $\mathbf{Ca'}$:

$$X \times Y = \mathrm{Im}(XY).$$

Легко видеть, что

$$X \times Y = XY + g(X,Y).$$

Также легко видеть, что данное векторное произведение $X \times Y$ билинейно, кососимметрично и ортогонально каждому их сомножителей. Умножение в алгебре $\mathbf{Ca'}$ выражается через векторное произведение следующим образом: для $x = x^0 + X$ и $y = y^0 + Y$ имеем $xy = (x_0\ y_0 - \langle X,Y\rangle) + x_0Y + y_0X + X \times Y$. Для любых векторов X, $Y \in \mathrm{Im}(\mathbf{Ca'})$ имеет место следующее равенство:

$$X \times (X \times Y) = -\,g(X,X)Y + g(X,Y)X.$$

В частности, если $\boldsymbol{n}$ – вектор единичной длины, то для любого $Y \in \mathbf{R}^{3,4}$ выполняется равенство

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times Y) = -Y + g(\boldsymbol{n},Y)\boldsymbol{n}.$$

Смешанное произведение определяется равенством $(XYZ) = g(X,Y\times Z) = g(X\times Y,Z)$ и представляет собой кососимметричную 3-форму Ω на $\mathbf{R}^{3,4}$,

$$\Omega(X,Y,Z) = g(X\times Y,Z).$$

В обозначениях $\omega^{pqr} = dx^p\wedge dx^q \wedge dx^r$ 3-форма Ω имеет следующее выражение:

$$\Omega = \omega^{123} - \omega^{145} + \omega^{167} - \omega^{246} - \omega^{257} - \omega^{347} + \omega^{356}.$$

Поскольку на $\mathbf{R}^{3,4}$ имеется псевдориманова метрика и соответствующая форма объема $\mu = \sqrt{|\det(g)|}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^7 = \omega^{1234567}$, то определен оператора Ходжа $*: \Lambda^k(\mathbf{R}^{3,4}) \to \Lambda^{7-k}(\mathbf{R}^{3,4})$. Поэтому на пространстве $\mathbf{R}^{3,4} = \mathrm{Im}\,(\mathbf{Ca}')$ определена внешняя 4-форма $\Psi = *\Omega$,

$$\Psi = \omega^{4567} - \omega^{2367} + \omega^{2345} - \omega^{1357} - \omega^{1346} - \omega^{1256} + \omega^{1247}.$$

Очевидно, что $\Omega = *\Psi$. Вычисляя значения Ψ на векторах базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_7$, легко видеть, что имеет место следующее выражение на векторах $X,Y,Z,W \in \mathbf{R}^{3,4}$:

$$\Psi(X,Y,Z,W) = g(X,(Y\times Z)\times W) = -g(X,Y\times(Z\times W)).$$

Лемма 1. *На пространстве* $\mathbf{R}^{3,4} = \mathrm{Im}(\mathbf{Ca}')$ *мнимых октав ассоциатор* $[X,Y,Z]$ *может быть выражен следующей формулой*:

$$[X,Y,Z] = 2(X\times Y)\times Z + 2g(Y,Z)X - 2g(Z,X)Y.$$

Доказательство. Используя кососимметричность 3-формы Ω и ассоциатора $[X,Y,Z]$, а также формулу $XY = X\times Y - g(X,Y)$, получаем

$$[X,Y,Z] = (XY)Z - X(YZ) = (X\times Y)\times Z - X\times(Y\times Z) - g(X\times Y, Z) + g(X,Y\times Z) -$$
$$- g(X,Y)Z + g(Y,Z)X = (X\times Y)\times Z - X\times(Y\times Z) - g(X,Y)Z + X\cdot g(Y,Z).$$

Теперь используем это выражение в следующей сумме и получаем необходимую формулу:

$$[X,Y,Z] = [X,Y,Z] + [Z,X,Y] + [X,Z,Y] = 2(X\times Y)\times Z + 2g(Y,Z)X - 2g(Z,X)Y.$$

Следствие. Имеет место следующая формула:

$$(X\times Y)\times Z - g(X,Z)Y + g(Y,Z)X = - X\times(Y\times Z) + g(X,Z)Y - g(X,Y)Z.$$

Доказательство. Следует из равенства $[X,Y,Z] = -[Z,Y,X]$.

Нам потребуются также свойства векторного произведения, которые сразу следуют из предыдущего равенства:

- Если $\boldsymbol{n},Y,Z \in \mathbf{R}^{3,4}$ и если $Y,Z \perp \boldsymbol{n}$, то

$$(\boldsymbol{n}\times Y)\times Z = - \boldsymbol{n}\times(Y\times Z) - g(Y,Z)\boldsymbol{n}.$$

- Если $\boldsymbol{n}$ – вектор единичной длины, то для любых $Y,Z \in \mathbf{R}^{3,4}$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times Z) = -Z + g(\boldsymbol{n},Z)\boldsymbol{n}, \quad g(\boldsymbol{n}\times Y, \boldsymbol{n}\times Z) = g(Y,Z) - g(Y, \boldsymbol{n})\, g(Z, \boldsymbol{n}).$$

- Если же $g(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}) = -1$, то для любых $Y,Z \in \mathbf{R}^{3,4}$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times Z) = Z + g(\boldsymbol{n},Z)\boldsymbol{n}, \quad g(\boldsymbol{n}\times Y, \boldsymbol{n}\times Z) = -g(Y,Z) - g(Y, \boldsymbol{n})\, g(Z, \boldsymbol{n}).$$

4. Почти комплексная структура на $\mathbf{S}^{2,4}(r)$

Рассмотрим сферу $\mathbf{S}^{2,4} = \mathbf{S}^{2,4}(1)$ единичного радиуса в пространстве $\mathbf{R}^{3,4} = \mathrm{Im}(\mathbf{Ca}')$ мнимых сплит-октав Кэли. Касательные плоскости $T_x\mathbf{S}^{2,4}$ к сфере являются псевдоевклидовыми сигнатуры (2,4). Скалярные квадраты векторов нормалей $\boldsymbol{n}(x) = x$ к сфере $\mathbf{S}^{2,4}$ положительны. Рассмотрим векторное умножение касательных векторов $Y \in T_x\mathbf{S}^{2,4}$ на вектор нормали $\boldsymbol{n}(x) = x$. Легко видеть, что эта операция переводит касательное пространство в себя: если $Y \in T_x\mathbf{S}^{2,4}$, т.е., $g(Y,\boldsymbol{n}) = 0$, то

$$g(\boldsymbol{n}\times Y,\boldsymbol{n}) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \boldsymbol{n}\times Y \in T_x\mathbf{S}^{2,4}.$$

Из свойства векторного произведения следует

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times Y) = -g(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})Y + g(\boldsymbol{n},Y)\boldsymbol{n} = -Y.$$

Это означает, что оператор $J_x(Y) = \boldsymbol{n}\times Y$ левого умножения касательных векторов в точке $x\in \mathbf{S}^{2,4}$ на вектор нормали $\boldsymbol{n}(x) = x$ к сфере $\mathbf{S}^{2,4}$ определяет на $T_x\mathbf{S}^{2,4}$ комплексную структуру. Поскольку такая операция определена в каждой точке $x\in \mathbf{S}^{2,4}$, то мы получаем, что единичная сфера $\mathbf{S}^{2,4}$ имеет естественную почти комплексную структуру J, которую мы будем называть *структурой Кэли*:

$$J_x\colon T_x\mathbf{S}^{2,4} \to T_x\mathbf{S}^{2,4}, \quad J_x(Y) = \boldsymbol{n}(x)\times Y.$$

Из равенства $g(\boldsymbol{n}\times X,\ \boldsymbol{n}\times Y) = g(X,Y) - g(X,\boldsymbol{n})g(Y,\boldsymbol{n})$ сразу следует ее ортогональность.

Пусть $\omega(X,Y) = g(JX,Y)$ – фундаментальная 2-форма, соответствующая J. Поскольку $g(X\times Y,Z) = \Omega(X,Y,Z)$, то легко видеть, что

$$\omega(X,Y) = g(\boldsymbol{n}\times X,Y) = \Omega(\boldsymbol{n},X,Y) = \Omega(X,Y,\boldsymbol{n}) = g(X\times Y,\boldsymbol{n}) = g(\boldsymbol{n},X\times Y).$$

Лемма 2. *Форма Ω при ее ограничении на сферу обладает свойством*

$$\Omega(JX,Y,Z) = \Omega(X,JY,Z) = \Omega(X,Y,JZ).$$

Доказательство. Используем формулу $(\boldsymbol{n}\times Y)\times Z = -\,\boldsymbol{n}\times(Y\times Z) - g(Y,Z)\boldsymbol{n}$ и равенство $g(X,Y\times Z) = g(X\times Y,Z)$:

$$\Omega(Z, JX,Y) = g(Z, JX\times Y) = g(Z, (\boldsymbol{n}\times X)\times Y) = g(Z, -\boldsymbol{n}\times(X\times Y) - g(X,Y)\boldsymbol{n}) = g(Z, -\boldsymbol{n}\times(X\times Y)) = -\,g(Z\times\boldsymbol{n}, X\times Y) = g(\boldsymbol{n}\times Z, X\times Y) = g(JZ, X\times Y) = \Omega(JZ,X,Y).$$

Лемма 3. *Для любых $X,Y,Z \in T_x\mathbf{S}^{2,4}$ имеет место равенство*

$$i_{\boldsymbol{n}}\Psi(X,Y,Z) = -\Omega(JX,Y,Z),$$

где $i_{\boldsymbol{n}}$ – внутреннее произведение с вектором нормали $\boldsymbol{n}(x)$.

Доказательство. $i_{\boldsymbol{n}}\Psi(X,Y,Z) = -g(\boldsymbol{n}, X\times(Y\times Z)) = -\,g(\boldsymbol{n}\times X,Y\times Z) = -\Omega(JX,Y,Z)$.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_6$ – ортонормированный базис пространства $T_x\mathbf{S}^{2,4}$, в котором $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ являются пространственноподобными, а остальные – времениподобны. Тогда $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{n}(x)$, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_6$ – ортонормированный базис пространства $\mathbf{R}^{3,4} = \mathbf{R}x \oplus T_x\mathbf{S}^{2,4}$. Пусть $\mu = \boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^1\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{e}^6$ – элемент объема $\mathbf{R}^{3,4}$ и $\mu_S = \boldsymbol{e}^1\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{e}^6$ – элемент объема сферы $\mathbf{S}^{2,4}$ (в точке x). Очевидно, $\mu_S = i_{\boldsymbol{n}}\mu$, где $i_{\boldsymbol{n}}$ – внутреннее произведение с вектором нормали $\boldsymbol{n}(x)$. Пусть $*_S$ и $*_R$ – операторы Ходжа на сфере и на $\mathbf{R}^{3,4}$ соответственно. Символом $\theta|_S$ будем обозначать ограничение дифференциальной формы θ в $\mathbf{R}^{3,4}$ на подмногообразие $\mathbf{S}^{2,4}$, а символом $\theta|_n$ – нормальную компоненту формы θ вдоль $\mathbf{S}^{2,4}$, то есть, $\theta|_n = \boldsymbol{n}\wedge\tilde{\theta}$.

Лемма 4. *Пусть θ – k-форма на $\mathbf{R}^{3,4}$* и $\theta|_S$ *– ее ограничение на касательное пространство $T_x\mathbf{S}^{2,4} \subset \mathbf{R}^{3,4}$. Тогда для операторов Ходжа $*_S$ и $*_R$ на сфере и на $\mathbf{R}^{3,4}$ соответственно выполняются равенства*

$$*_R\theta = (-1)^k\boldsymbol{n}\wedge *_S\theta, \qquad *_S(\theta|_S) = (-1)^k i_{\boldsymbol{n}}(*_R\theta).$$

Доказательство. Форму θ можно записать в виде $\theta = \theta|_S + \boldsymbol{n} \wedge \tilde{\theta}$, где $\tilde{\theta}$ – форма степени k–1, которая выражается через $\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^6$. Очевидно, что $i_{\boldsymbol{n}}(*_{R}(\boldsymbol{n} \wedge \tilde{\theta})) = 0$. Поэтому достаточно доказать лемму для $\theta = \theta|_S$. Для любой k-формы ν на $\mathbf{S}^{2,4}$ имеем $\nu \wedge *_S\theta = g(\nu, \theta)\mu_S$ Из этого равенства, с учетом того, что $\mu = \boldsymbol{n}\wedge\mu_S$, получаем $\boldsymbol{n}\wedge\nu \wedge *_S\theta = g(\nu,\theta)\boldsymbol{n}\wedge\mu_S = g(\nu,\theta)\mu$ или, что то же самое, $(-1)^k\nu\wedge\boldsymbol{n}\wedge *_S\theta = g(\nu,\theta)\mu = \nu\wedge *_R\theta$. Последнее равенство верно не только для форм ν на $T_x\mathbf{S}^{2,4}$, но и для любых k-форм $\nu = \nu|_S + \boldsymbol{n} \wedge \tilde{\nu}$ на $\mathbf{R}^7$. На второй компоненте $\boldsymbol{n} \wedge \tilde{\nu}$ обе части равенства обращаются в нуль. Поэтому мы получаем равенство $(-1)^k\boldsymbol{n}\wedge *_S\theta = *_R\theta$. Применяя внутреннее произведение $\boldsymbol{i_n}$ к обеим частям последнего равенства, получаем утверждение леммы.

Теорема 1. *Фундаментальная форма* ω *почти комплексной структуры Кэли* J *на* $\mathbf{S}^{2,4}$ *и ее внешний дифференциал* $d\omega$ *обладают свойствами:*

(1) $$\omega = \boldsymbol{i_n}\Omega, \quad d\omega = 3\Omega|_S,$$

(2) $$*_S\omega = \Psi|_S, \quad *_S d\omega = -3\boldsymbol{i_n}\Psi,$$

(3) $$d\omega(X,Y,Z) = 3\boldsymbol{i_n}\Psi(JX,Y,Z),$$

(4) $$d\omega(JX,Y,Z) = d\omega(X,JY,Z) = d\omega(X,Y,JZ),$$

(5) $$d\omega(X,JY,JZ) = -d\omega(X,Y,Z),$$

(6) $$\omega\wedge d\omega = 0.$$

Доказательство. Первое равенство вытекает из определения ω и Ω: $\boldsymbol{i_n}\Omega(X,Y) = g(\boldsymbol{n},X\times Y) = \omega(X,Y)$ для любых X,Y, касательных к сфере. Во втором равенстве мы считаем, что векторное поле $\boldsymbol{n}(x) = x$ определено на всем $\mathbf{R}^7$. Тогда, поскольку 3-форма Ω с постоянными коэффициентами в $\mathbf{R}^7$, является замкнутой, поэтому $d\boldsymbol{i_n}\Omega = L_{\boldsymbol{n}}\Omega = 3\Omega$, где $L_{\boldsymbol{n}} = d\cdot\boldsymbol{i_n} + \boldsymbol{i_n}\cdot d$ – производная Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{n}(x) = x$ на $\mathbf{R}^7$. Следовательно, $d\omega = d\boldsymbol{i_n}\Omega = L_{\boldsymbol{n}}\Omega = 3\Omega$. Вторая пара равенств получается из лемм 2 и 3 и из первых свойств, $*_S\omega = *_S(\boldsymbol{i_n}\Omega)|_S = \boldsymbol{i_n}*_R(i_n\Omega)$. Подробнее, пусть $\mathbf{e}_{\boldsymbol{n}}$ – оператор внешнего умножения на 1-форму, дуальную векторному полю $\boldsymbol{n}(x) = x$. Как известно, на k-формах ν операторы $\boldsymbol{i_n}$ и $\mathbf{e}_{\boldsymbol{n}}$ связаны соотношением $\boldsymbol{i_n}*_R = (-1)^k*_R\mathbf{e}_{\boldsymbol{n}}$. Поэтому

$$*_S\omega = \boldsymbol{i_n}*_R(i_n\Omega) = *_R\mathbf{e}_{\boldsymbol{n}}(i_n\Omega) = *_R(\Omega|_n) = \Psi|_S.$$

Далее, $*_S d\omega = 3*_S\Omega|_S = -3\boldsymbol{i_n}*_R\Omega = -3\boldsymbol{i_n}\Psi$. Равенство (3) вытекает из (1) и из леммы 2. Свойства (4), (5) следуют из (1) и леммы 1. Последнее равенство следует из (1) и из $\boldsymbol{i_n}(\Omega\wedge\Omega) = 0$.

Замечание. Фундаментальная 2-форма ω на $\mathbf{S}^{2,4}$ является козамкнутой $\delta\omega = 0$. Действительно, 4-форма Ψ на $\mathbf{R}^7$ имеет постоянные коэффициенты, поэтому $d\Psi = 0$. Хорошо известно, что на k-формах кодифференциал δ имеет выражение: $\delta = (-1)^k *^{-1}d* = (-1)^{kn+n+1+\eta} *d*$, где η – число «минусов» метрического тензора g. В нашем случае $\eta = 4$ и $n = 6$. Следовательно, $\delta = -*d*$. Поэтому

$$\delta\omega = -*d*\omega = -*d\,(\Psi|_S) = -*(d\,\Psi)|_S = 0.$$

В работе [10] Хитчин определил понятие *невырожденности* (стабильности) для 3-форм Φ на шестимерном вещественном векторном пространстве V и построил для 3-формы Φ линейный оператор K_Φ, квадрат которого пропорционален тождественному оператору: $K_\Phi{}^2 = \lambda(\Phi)Id$. Если $\lambda(\Phi) < 0$, то K_Φ определяет на V комплексную структуру, а если $\lambda(\Phi)>0$, то пара-комплексную структуру. Пусть μ

– форма объема на V. Оператор K_Φ определяется следующей формулой: $\iota_{K_\Phi(X)}\mu = \iota_X\Phi\wedge\Phi$.

Для фундаментальной формы ω почти комплексной структуры Кэли на $\mathbf{S}^{2,4}$ 3-форма $d\omega$ имеет вид $d\omega = 3\Omega|_S$, где $\Omega = \omega^{123} - \omega^{145} + \omega^{167} - \omega^{246} - \omega^{257} - \omega^{347} + \omega^{356}$. Найдем оператор Хитчина [5] $K_{d\omega}$ для 3-формы $d\omega$ на сфере $\mathbf{S}^{2,4}$. Рассмотрим сначала точку $x = e_1 \in \mathbf{S}^{2,4}$. Касательное пространство $T_x\mathbf{S}^{2,4}$ имеет ортонормированный базис векторов $\boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_7$ и форму объема $\mu = \omega^{234567}$. 2-форма $d\omega$ на $T_x\mathbf{S}^{2,4}$ имеет вид

$$d\omega_x = 3(-\omega^{246} - \omega^{257} - \omega^{347} + \omega^{356}).$$

2-форма $d\omega_x$ является инвариантной при действии на $T_x\mathbf{S}^{2,4}$ подгруппы изотропии $SU(1,2) \subset G_2^*$.

Поэтому достаточно вычислить $K_{d\omega}$ на одном векторе, например $K_{d\omega}(\boldsymbol{e}_2)$:

$$\iota_{e_2} d\omega_x \wedge d\omega_x = 9(-\omega^{46} - \omega^{57})(-\omega^{246} - \omega^{257} - \omega^{347} + \omega^{356}) =$$
$$= 9(\omega^{46}\wedge\omega^{257} + \omega^{57}\wedge\omega^{246}) = -18\omega^{24567} = 18\iota_{e_3}\omega^{234567} = 18\iota_{e_3}\mu.$$

Поэтому $K_{d\omega}(\boldsymbol{e}_2) = 18\boldsymbol{e}_3 = 18\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 = 18J(\boldsymbol{e}_2)$. Отсюда следует, что $I_{d\omega} = J_x$. Из инвариантности почти комплексной структуры Кэли J и формы Ω относительно группы G_2^*, действующей транзитивно на $\mathbf{S}^{2,4}$, мы получаем, что равенство $I_{d\omega} = J_x$ имеет место во всех точках псевдосферы $\mathbf{S}^{2,4}$.

Вывод. *3-форма $d\omega$ на $\mathbf{S}^{2,4}$ является всюду невырожденной и определяет почти комплексную структуру $I_{d\omega}$ на $\mathbf{S}^{2,4}$, которая совпадает с почти комплексной структурой Кэли J.*

Вычислим тензор Нейенхейса $N(X,Y) = 2([JX,JY] - [X,Y] - J[JX,Y] - J[X,JY])$ почти комплексной структуры J [11]. Для этого найдем ковариантную производную тензора J. Поскольку $\boldsymbol{n}(x) = x$, то для любого касательного вектора $X \in T_x\mathbf{S}^{2,4}$ имеем $D\boldsymbol{n}_x(X) = X$. Будем считать, что касательные векторы $X,Y \in T_x\mathbf{S}^{2,4}$ продолжены на пространство $\mathbf{R}^7$ как постоянные векторные поля и $\boldsymbol{n}(x) = x$ также определено на $\mathbf{R}^7\backslash\{0\}$. Тогда имеют место равенства $(\nabla_X J)Y = \mathrm{pr}_x(D_X(JY)) = \mathrm{pr}_x(D_X(\boldsymbol{n}\times Y)) = \mathrm{pr}_x(X\times Y)$, где pr – ортогональная в $\mathbf{R}^{3,4}$ проекция на касательное пространство $T_x\mathbf{S}^{2,4}$, $\mathrm{pr}_x(Z) = Z - g(Z,\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$. Получаем

(7) $$(\nabla_X J)Y = X\times Y - g(\boldsymbol{n}, X\times Y)\boldsymbol{n} = X\times Y - \omega(X,Y)\boldsymbol{n}.$$

Замечание. Из полученного выражения $\nabla_X J$ сразу вытекает кососимметричность оператора $\nabla_X J$ и, в частности, свойство $\nabla_X(J)X = 0$ приближенной псевдокэлеровости многообразия $\mathbf{S}^{2,4}$ и равенство $\nabla_{JX}J = -J\nabla_X J$.

Теорема 2. *Тензор Нейенхейса $N(X,Y)$ почти комплексной структуры Кэли J на $\mathbf{S}^{2,4}$ имеет вид*

$$N(X,Y) = -8\boldsymbol{n}\times(X\times Y).$$

Доказательство. В книге [11] приведена формула

$$4g((\nabla_Z J)X,Y) = 6\boldsymbol{d}\Phi(Z,JX,JY) - 6\boldsymbol{d}\Phi(Z,X,Y) + g(N(X,Y),JZ),$$

где $\Phi(X,Y) = g(X,JY)$ – фундаментальная форма. В нашем случае фундаментальная форма $\omega(X,Y) = g(JX,Y) = -\Phi(X,Y)$. Кроме того, в [6] берется другое определение внешнего умножения. Поэтому формула для внешнего дифференциала тоже меняется. Внешний дифференциал $\boldsymbol{d}$ в [11] берется с коэффициентом 1/3: $\boldsymbol{d}\omega = d\omega/3$. Учитывая это, имеем в нашем случае $4g((\nabla_Z J)X,Y) = -2d\omega(Z,JX,JY) + 2d\omega(Z,X,Y) + g(N(X,Y),JZ)$, поэтому $g(N(X,Y),JZ) = 4g((\nabla_Z J)X,Y) + 2d\omega(Z,JX,JY) - 2d\omega(Z,X,Y)$. Тогда, учитывая, что $d\omega(X,Y,Z) = 3g(X,Y\times Z)$, имеем

$$g(N(X,Y),JZ) = 4g((\nabla_Z J)X,Y) + 2d\omega(Z,JX,JY) - 2d\omega(Z,X,Y) =$$
$$= 4g(Z\times X - 2\omega(Z,X)\boldsymbol{n},Y) - 2d\omega(X,Y,Z) - 2d\omega(Z,X,Y) =$$
$$= 4g(Z\times X,Y) - 12g(X,Y\times Z) = 4g(Z, X\times Y) - 12g(X\times Y,Z) =$$
$$= -8g(\boldsymbol{n}\times(X\times Y), \boldsymbol{n}\times Z) = -8g(\boldsymbol{n}\times(X\times Y), JZ).$$

Теорема 3. *Фундаментальная 2-форма* ω *почти комплексной структуры Кэли на* $\mathbf{S}^{2,4}$ *является собственной для оператора Лапласа:* $\Delta\omega = 12\omega$.

Доказательство. Лапласиан, действующий на дифференциальных формах, определяется формулой $\Delta = d\delta + \delta d$, где δ – кодифференциал. Хорошо известно, что на k-формах кодифференциал δ имеет выражение $\delta = (-1)^k *^{-1} d* = (-1)^{kn+n+1+\eta} *d*$, где η – число «минусов» метрического тензора g. В нашем случае $\eta = 4$ и $n = 6$. Следовательно, $\delta = -*d*$. Для формы ω известно, что $\delta\omega = 0$. Поэтому достаточно вычислить $\delta d\omega$. Будем обозначать внешний дифференциал в пространстве $\mathbf{R}^7$ с индексом d_{R}. Используем свойство $*_{\mathrm{S}}(\theta|_{\mathrm{S}}) = (-1)^k i_{\boldsymbol{n}}(*_{\mathrm{R}}\theta)$, установленное в лемме 4, и результаты теоремы 1:

$$\delta d\omega = - *_{\mathrm{S}} d *_{\mathrm{S}}(d\omega) = -3 *_{\mathrm{S}} d *_{\mathrm{S}}(\Omega|_{\mathrm{S}}) = -3(-1)^3 *_{\mathrm{S}} d(\boldsymbol{i_n} *_{\mathrm{R}}\Omega) =$$
$$= 3*_{\mathrm{S}}(d_{\mathrm{R}}\boldsymbol{i_n}(\Psi))|_{\mathrm{S}} = 3*_{S}(L_n\Psi)|_{\mathrm{S}} = 12*_{\mathrm{S}}(\Psi|_{\mathrm{S}}) = 12\boldsymbol{i_n}*_{\mathrm{R}}\Psi = 12\, \boldsymbol{i_n}\Omega = 12\omega.$$

В этих вычислениях мы использовали производную Ли $L_{\boldsymbol{n}} = d\cdot\boldsymbol{i_n} + \boldsymbol{i_n}\cdot d$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{n}(x) = x$ на $\mathbf{R}^7\backslash\{0\}$. 4-форма Ψ с постоянными коэффициентами в $\mathbf{R}^7$ является замкнутой, поэтому $d\boldsymbol{i_n}\Psi = L_{\boldsymbol{n}}\Psi$. Кроме того, поле $\boldsymbol{n}(x) = x$ задает растяжение $\mathbf{R}^7\backslash\{0\}$, следовательно, для 4-формы Ψ с постоянными коэффициентами выполняется равенство $L_{\boldsymbol{n}}\Psi = 4\Psi$. Теорема доказана.

Комплексная структура на $\mathbf{S}^{2,4}(r)$. В этом пункте мы покажем, что на псевдосфере $\mathbf{S}^{2,4}$ существуют интегрируемые комплексные структуры. Рассмотрим стереографическую проекцию $\mathbf{S}^{2,4}$ из точки начала координат $\mathbf{R}^7$ на часть цилиндра $\mathbf{S}^2\times D^4$, где $\mathbf{S}^2$ – стандартная единичная сфера в пространстве $\mathbf{R}^3$ с координатами (x_1, x_2, x_3) и D^4 – единичный шар в пространстве $\mathbf{R}^4$ с координатами (x_4, x_5, x_6, x_7), $x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 < 1$. Прямая, проходящая через начало координат и точку $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)$ псевдосферы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 = 1$, пресекает цилиндр $\mathbf{S}^2\times D^4$ в точке y с координатами

$$y_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, 7\,.$$

Ясно, что первые переменные (y_1, y_2, y_3) описывают двумерную сферу $\mathbf{S}^2$ в $\mathbf{R}^3$. Остальные координаты меняются в единичном шаре D^4 в пространстве $\mathbf{R}^4$. Действительно, пусть $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. На псевдосфере $r^2 \geq 1$. Тогда из уравнения псевдосферы следует, что

$$\frac{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1 - \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \text{ или } 0 \leq y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 + y_7^2 = 1 - \frac{1}{r^2} < 1\,.$$

Через каждую точку $(y_4, y_5, y_6, y_7)\in D^4$, при фиксированной точке $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{S}^2$, проходит единственная прямая, пересекающая псевдосферу в точке $x_i = r\cdot y_i$, $i = 1, 2, \dots, 7$, при $r = 1/\sqrt{1 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2}$ и, наоборот, каждая прямая, проходящая через начало координат и точку $x\in \mathbf{S}^{2,4}$, пересекает шар D^4 при определенных $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{S}^2$.

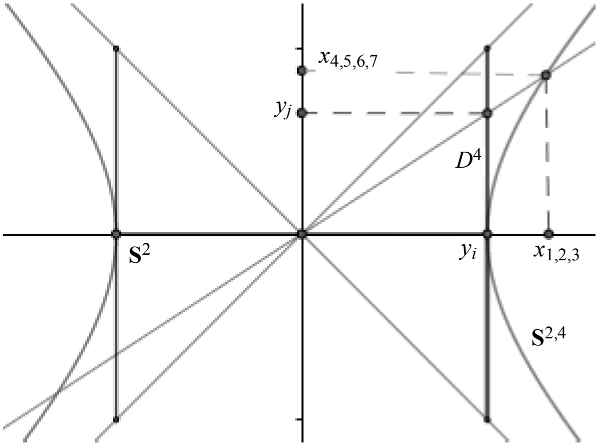

Рис. 1. Стереографическая проекция
Fig. 1. Stereographic projection

Поскольку прямое произведение $\mathbf{S}^2{\times}D^4$ допускает комплексные структуры, то диффеоморфизм стереографической проекции f: $\mathbf{S}^{2,4} \to \mathbf{S}^2{\times}D^4$ позволяет перенести комплексные структуры с $\mathbf{S}^2{\times}D^4$ на сферу $\mathbf{S}^{2,4}$. Отметим, что по построению $\mathbf{S}^2{\times}D^4$ является псевдоримановым сигнатуры (2,4).

5. Почти пара-комплексная структура на $\mathbf{S}^{3,3}(\boldsymbol{i})$

Результаты этой части аналогичны тем, что были получены для сферы $\mathbf{S}^{2,4}$, однако имеются и некоторые отличия.

Рассмотрим сферу $\mathbf{S}^{3,3} = \mathbf{S}^{3,3}(i)$ чисто мнимого единичного радиуса в пространстве $\mathbf{R}^{3,4} = \mathrm{Im}(\mathbf{Ca}')$ мнимых сплит-октав Кэли. Касательные плоскости к сфере $T_x\mathbf{S}^{3,3}$, $\forall\ x\in \mathbf{S}^{3,3}$, являются псевдоевклидовыми сигнатуры (3,3). Скалярные квадраты векторов нормалей $\boldsymbol{n}(x) = x$ к сфере $\mathbf{S}^{3,3}$ отрицательны, $g(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}) = -1$.

Векторное умножение касательных векторов $Y \in T_x\mathbf{S}^{3,3}$ на вектор нормали $\boldsymbol{n}(x) = x$ переводит касательное пространство в себя: если $Y \in T_x\mathbf{S}^{3,3}$, то есть, $g(Y,\boldsymbol{n}) = 0$, то

$$g(\boldsymbol{n}{\times}Y,\boldsymbol{n}) = 0,\ \text{т.е. } \boldsymbol{n}{\times}Y \in T_x\mathbf{S}^{3,3}.$$

Из свойства векторного произведения следует, что

$$\boldsymbol{n}{\times}(\boldsymbol{n}{\times}Y) = -g(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})Y + g(\boldsymbol{n},Y)\boldsymbol{n} = Y.$$

Это означает, что $(P_x)^2 = Id$. Оператор $P_x(X) = \boldsymbol{n}{\times}X$ кососимметричен, $g(\boldsymbol{n}{\times}X,Y) = -g(X,\boldsymbol{n}{\times}Y)$, но не ортогонален: $g(P_xX,P_xY) = g(\boldsymbol{n}{\times}X,\boldsymbol{n}{\times}Y) = -g(X,Y)$, $\forall\ X,Y\in T_x\mathbf{S}^{3,3}$. Оператор P_x пространственноподобные векторы переводит во времениподобные векторы. Собственные подпространства оператора P_x являются трехмерными изотропными подпространствами, касательными к $\mathbf{S}^{3,3}$. Поэтому оператор $P_x(Y) = \boldsymbol{n}{\times}Y$ умножения касательных векторов на вектор нормали $\boldsymbol{n}(x) = x$ к сфере $\mathbf{S}^{3,3}$ определяет на $T_x\mathbf{S}^{3,3}$ пара-комплексную структуру. Такая операция определена в каждой точке $x\in \mathbf{S}^{3,3}$, следовательно, мы получаем, что единичная псевдориманова сфера $\mathbf{S}^{3,3}$ имеет естественную почти пара-комплексную структуру P, которую мы будем называть *почти пара-комплексной структурой Кэли*:

$$P_x\colon T_x\mathbf{S}^{3,3} \to T_x\mathbf{S}^{3,3},\quad P_x(Y) = \boldsymbol{n}(x){\times}Y,\quad \forall x\in \mathbf{S}^{3,3},\ \forall\ Y \in T_x\mathbf{S}^{3,3}.$$

Пусть $\omega(X,Y)=g(PX,Y)$ – фундаментальная 2-форма, соответствующая P, и пусть $\Omega(X,Y,Z)=g(X\times Y,Z)$. Тогда легко видеть, что

$$\omega(X,Y)=g(\boldsymbol{n}\times X,Y)=\Omega(\boldsymbol{n},X,Y)=\Omega(X,Y,\boldsymbol{n})=g(X\times Y,\boldsymbol{n})=g(\boldsymbol{n},X\times Y).$$

Напомним, что на пространстве $\mathbf{R}^{3,4}=\mathrm{Im}\ (\mathbf{Ca'})$ определена внешняя 4-форма $\Psi=*\Omega$.

Пусть $*_S$ и $*_R$ – операторы Ходжа на сфере и на $\mathbf{R}^{3,4}$ соответственно. Символом $\theta|_S$ будем обозначать ограничение дифференциальной формы θ в $\mathbf{R}^{3,4}$ на подмногообразие $\mathbf{S}^{3,3}$, а символом $\theta|_{\boldsymbol{n}}$ – нормальную компоненту формы θ вдоль $\mathbf{S}^{3,3}$, то есть, $\theta\big|_n=\boldsymbol{n}\wedge\tilde{\theta}$.

Для почти пара-комплексной структуры Кэли совершенно аналогично доказываются все результаты, установленные в разделе 3.2 для почти комплексных структур Кэли:

1. *Форма* Ω *при ее ограничении на сферу обладает свойством*

$$\Omega(PX,Y,Z)=\Omega(X,PY,Z)=\Omega(X,Y,PZ).$$

2. *Для любых* $X,Y,Z\in T_x\mathbf{S}^{3,3}$ *имеет место равенство*

$$\boldsymbol{i_n}\Psi(X,Y,Z)=-\Omega(PX,Y,Z).$$

3. *Пусть* θ – *k-форма на* $\mathbf{R}^{3,4}$ и $\theta|_S$ *– ее ограничение на касательное пространство* $T_x\mathbf{S}^{3,3}\subset\mathbf{R}^{3,4}$. *Тогда*

$$*_R\theta=(-1)^k\boldsymbol{n}\wedge *_S\theta,\quad *_S(\theta|_S)=(-1)^k\boldsymbol{i_n}(*_R\theta).$$

4. *Фундаментальная форма* ω *почти пара-комплексной структуры Кэли P на* $\mathbf{S}^{3,3}$ *и ее внешний дифференциал* $d\omega$ *обладают свойствами:*

$$\omega=\boldsymbol{i_n}\Omega,\quad d\omega=3\Omega|_S,\quad *_S\omega=\Psi|_S,\quad *_Sd\omega=-3\boldsymbol{i_n}\Psi,\quad \omega\wedge d\omega=0,$$

$$d\omega(X,Y,Z)=3\boldsymbol{i_n}\Psi(PX,Y,Z),\quad d\omega(X,Y,Z)=3g(X,Y\times Z),$$

$$d\omega(PX,Y,Z)=d\omega(X,PY,Z)=d\omega(X,Y,PZ),\ d\omega(X,PY,PZ)=-d\omega(X,Y,Z).$$

Для фундаментальной формы ω почти пара-комплексной структуры Кэли на $\mathbf{S}^{3,3}$ 3-форма $d\omega$ имеет вид $d\omega=3\Omega|_S$, где $\Omega=\omega^{123}-\omega^{145}+\omega^{167}-\omega^{246}-\omega^{257}-$ $-\omega^{347}+\omega^{356}$. Найдем оператор Хитчина [10] $K_{d\omega}$ для сферы $\mathbf{S}^{3,3}$. Рассмотрим сначала точку $x=e_4\in\mathbf{S}^{3,3}$. Касательное пространство $T_x\mathbf{S}^{3,3}$ имеет ортонормированный базис и форму объема $\mu=\omega^{123567}$. 2-форма $d\omega$ на $T_x\mathbf{S}^{3,3}$ имеет вид

$$d\omega_x=3(\omega^{123}+\omega^{167}-\omega^{257}+\omega^{356}).$$

Вследствие инвариантности формы $d\omega_x$ относительно подгруппы изотропии $SL(3,\mathbf{R})\subset G_2^{\ *}$, действующей на $T_x\mathbf{S}^{3,3}$, достаточно вычислить $K_{d\omega}$ на одном векторе, например $K_{d\omega}(\boldsymbol{e}_1)$:

$$\begin{aligned}\iota_{e_1}d\omega_x\wedge d\omega_x&=9(\omega^{23}+\omega^{67})(\omega^{123}+\omega^{167}-\omega^{257}+\omega^{356})=\\&=9(\omega^{12367}+\omega^{12367})=18\omega^{12367}=-18\iota_{e_5}\omega^{123567}=-18\iota_{e_5}\mu\end{aligned}.$$

Поэтому $K_{d\omega}(\boldsymbol{e}_1)=-18\boldsymbol{e}_5=18\boldsymbol{e}_4\times\boldsymbol{e}_1=18P(\boldsymbol{e}_1)$. Отсюда следует, что $I_{d\omega}=P_x$. Из инвариантности почти пара-комплексной структуры Кэли P и формы Ω относительно группы $G_2^{\ *}$, действующей транзитивно на $\mathbf{S}^{3,3}$, получаем, что равенство $I_{d\omega}=P_x$ имеет место во всех точках псевдосферы $\mathbf{S}^{3,3}$.

Вывод. 3-*форма* $d\omega$ *на* $\mathbf{S}^{3,3}$ *является всюду невырожденной и определяет почти пара-комплексную структуру* $I_{d\omega}$ *на* $\mathbf{S}^{3,3}$, *которая совпадает с почти пара-комплексной структурой Кэли P.*

Вычислим тензор Нейенхейса [9] почти пара-комплексной структуры P:

$$N_P(X,Y) = 2([X,Y] + [PX,PY] - P[PX,Y] - P[X,PY]).$$

Для этого найдем ковариантную производную тензора P. Поскольку $\boldsymbol{n}(x) = x$, то для любого касательного вектора $X \in T_x\mathbf{S}^{3,3}$ имеем $D\boldsymbol{n}_x(X) = X$. Будем считать, что касательные векторы $X,Y \in T_x\mathbf{S}^{3,3}$ продолжены на пространство $\mathbf{R}^7$ как постоянные векторные поля и $\boldsymbol{n}(x) = x$ также определено на $\mathbf{R}^7\backslash\{0\}$.

Тогда имеют место равенства $(\nabla_X P)Y = \mathrm{pr}_x(D_X(PY)) = \mathrm{pr}_x(D_X(\boldsymbol{n}\times Y)) = \mathrm{pr}_x(X\times Y)$, где $\mathrm{pr}_x(Z) = Z+g(Z,\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ – ортогональная в $\mathbf{R}^{3,4}$ проекция на касательное пространство $T_x\mathbf{S}^{3,3}$, здесь мы учитываем, что $g(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}) = -1$. Получаем

$$(\nabla_X P)Y = X\times Y + g(\boldsymbol{n},X\times Y)\boldsymbol{n} = X\times Y + \omega(X,Y)\boldsymbol{n}.$$

Замечание. Из полученного выражения $\nabla_X P$ сразу вытекает кососимметричность оператора $\nabla_X P$ и, в частности, свойство $\nabla_X(P)X = 0$ приближенной пара-кэлеровости многообразия $\mathbf{S}^{3,3}$ и равенство $\nabla_{PX}P = -P\nabla_X P$.

Теорема 4. *Тензор Нейенхейса $N_P(X,Y)$ почти пара-комплексной структуры Кэли P на $\mathbf{S}^{3,3}$ имеет вид*

$$N_P(X,Y) = -8\boldsymbol{n}\times(X\times Y).$$

Доказательство. Прямое вычисление с использованием формулы $(\nabla_X P)Y = X\times Y + \omega(X,Y)\boldsymbol{n}$ и равенства $(\boldsymbol{n}\times X)\times Y = -\,\boldsymbol{n}\times(X\times Y) - g(X,Y)\boldsymbol{n}$ для $X,Y \perp \boldsymbol{n}$:

$$N_P(X,Y)/2 = [X,Y] + [PX,PY] - P[PX,Y] - P[X,PY] =$$

$$= \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) + \nabla_{PX}(PY) - \nabla_{PY}(PX) - P\nabla_{PX}(Y) + P\nabla_Y(PX) - P\nabla_X(PY) + P\nabla_{PY}(X) =$$

$$= \nabla_{PX}(P)Y - \nabla_{PY}(P)X + P\nabla_Y(P)X - P\nabla_X(P)Y =$$

$$= (PX)\times Y + \omega(PX,Y)\boldsymbol{n} - ((PY)\times X + \omega(PY,X)\boldsymbol{n}) + P(Y\times X + \omega(Y,X)\boldsymbol{n}) - P(X\times Y + \omega(X,Y)\boldsymbol{n}) =$$

$$= (\boldsymbol{n}\times X)\times Y - (\boldsymbol{n}\times Y)\times X + \boldsymbol{n}\times(Y\times X) - \boldsymbol{n}\times(X\times Y) = -4\,\boldsymbol{n}\times(X\times Y)$$

Теорема 5. *Фундаментальная 2-форма ω почти пара-комплексной структуры Кэли на $\mathbf{S}^{3,3}$ является собственной для оператора Лапласа:* $\Delta\omega = -12\omega$.

Доказательство. Полностью повторяет доказательство теоремы 3 с одним отличием: $\delta = +{*}d{*}$. Действительно, на k-формах кодифференциал δ имеет выражение $\delta = (-1)^k {*}^{-1}d{*} = (-1)^{kn+n+1+\eta}{*}d{*}$, где η – число «минусов» метрического тензора g. В нашем случае $\eta = 3$ и $n = 6$. Следовательно, $\delta = +{*}d{*}$.

Пара-комплексная структура на $\mathbf{S}^{3,3}(\boldsymbol{i})$. На псевдосфере $\mathbf{S}^{3,3}$ существуют интегрируемые пара-комплексные структуры. Это следует из того, что $\mathbf{S}^{3,3}$ диффеоморфно прямому произведению трехмерных многообразий. Рассмотрим стереографическую проекцию $\mathbf{S}^{3,3}$ из точки начала координат $\mathbf{R}^7$ на часть цилиндра $D^3\times\mathbf{S}^3$, где $\mathbf{S}^3$ – стандартная единичная сфера в пространстве $\mathbf{R}^4$ с координатами (x_4, x_5, x_6, x_7) и D^3 – единичный шар в пространстве $\mathbf{R}^3$ с координатами (x_1, x_2, x_3), $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$. Прямая, проходящая через начало координат и точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_7)$ псевдосферы $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 = 1$, пресекает цилиндр $D^3\times\mathbf{S}^3$ в точке y с координатами

$$y_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}}, \quad i = 1,2,\ldots,7\,.$$

Ясно, что последние переменные (y_4, y_5, y_6, y_7) описывают трехмерную сферу $\mathbf{S}^3$. Остальные координаты меняются в единичном шаре D^3 в пространстве $\mathbf{R}^3$. Действительно, пусть $\rho^2 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2$. На псевдосфере $\rho^2 \geq 1$. Тогда из уравнения псевдосферы следует, что

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2} = 1 - \frac{1}{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2} \text{ или } 0 \leq y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 - \frac{1}{\rho^2} < 1.$$

Через каждую точку $(y_1, y_2, y_3) \in D^3$, при фиксированной точке $(y_4, y_5, y_6, y_7) \in \mathbf{S}^3$, проходит единственная прямая, пересекающая псевдосферу в точке $x_i = \rho \cdot y_i$, $i = 1, 2, \ldots, 7$ при $\rho = 1/\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2}$ и, наоборот, каждая прямая, проходящая через начало координат и точку $x \in \mathbf{S}^{3,3}$, пересекает шар D^3 при определенных (y_1, y_2, y_3).

Поскольку прямое произведение $D^3 \times \mathbf{S}^3$ естественно допускает пара-комплексные структуры, то диффеоморфизм стереографической проекции f: $\mathbf{S}^{3,3} \to D^3 \times \mathbf{S}^3$ позволяет перенести пара-комплексные структуры с прямого произведения трехмерных многообразий $D^3 \times \mathbf{S}^3$ на сферу $\mathbf{S}^{3,3}$. Отметим, что по построению, $D^3 \times \mathbf{S}^3$ является псевдоримановым сигнатуры (3,3).

6. Почти комплексная и почти пара-комплексная структуры на алгебре Кэли

Пространство $\mathbf{R}^7 = \mathbf{R}^{3,4}$ чисто мнимых чисел $X = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_7\boldsymbol{e}_7$ разбивается конусом $N_0(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - \cdots - x_7^2 = 0$ на два открытых множества $\mathbf{R}^{7+}$ и $\mathbf{R}^{7-}$ элементов, для которых $N_0(X) > 0$ и $N_0(X) < 0$ соответственно. Рассмотрим прямые произведения этих множеств с вещественной прямой $\mathbf{R}_0$ алгебры Кэли:

$$\mathbf{R}^{8+} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7+} \quad \text{и} \quad \mathbf{R}^{8-} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7-}.$$

В данном разделе мы определим неинтегрируемую почти комплексную структуру на открытом множестве $\mathbf{R}^{8+}$ и неинтегрируемую пара-комплексную структуру на $\mathbf{R}^{8-}$.

Почти комплексная структура Кэли. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^{8+} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7+}$ и определим на нем неинтегрируемую почти комплексную структуру J. На пространстве $\mathbf{R}_0$ определено единичное векторное поле $n_1 = \boldsymbol{e}_0 = 1$. Определим единичное векторное поле $n_2(u)$ на $\mathbf{R}^{8+}$ формулой $n_2(u) = U / \| U \|$, где $\| U \| = \sqrt{N_0(U)} > 0$, $u = u_0 + U \in \mathbf{R}^{8+} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7+}$. Отметим, что $\langle n_2, n_2 \rangle = 1$, а $n_2 n_2 = -1$. Определим оператор J: $\mathbf{R}^8 \to \mathbf{R}^8$ в точке $u = u_0 + U \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7+}$ формулой

$$J(y) = n_2(u) \cdot y = \frac{U}{\| U \|} y.$$

Поскольку $n_2 n_2 = -1$, то $J^2 = -Id$ и получаем почти комплексную структуру в точке $u = u_0 + U \in \mathbf{R}^{8+}$.

Фундаментальная форма $\omega(X,Y) = g(JX,Y)$, соответствующая J, легко вычисляется с учетом свойства $n_2 \times Y = n_2 Y + \langle n_2, Y \rangle$:

$$\begin{aligned} \omega(y,z) &= \langle J(y), z \rangle = \langle n_2 y, z \rangle = \langle n_2 (y_0 + Y), z_0 + Z \rangle = \\ &= y_0 \langle n_2, z_0 + Z \rangle + \langle n_2 Y, z_0 + Z \rangle = y_0 \langle n_2, z \rangle + \langle n_2 \times Y, Z \rangle - \langle n_2, y \rangle z_0 = \\ &= n_1^* \wedge n_2^*(y,z) + \langle n_2 \times Y, Z \rangle. \end{aligned}$$

Также легко вычисляется производная $D_x(J)$ тензорного поля J в направлении вектора $x = x_0 + X \in \mathbf{R}^{8+}$. Поскольку пространство $\mathbf{R}^{8+}$ является открытым подмножеством в $\mathbf{R}^8$, то можно считать векторы x,y с параллельными векторными полями на $\mathbf{R}^{8+}$ и тогда $D_x(J)(y) = D_x(n_2)y$.

Векторное поле $n_2(u)$ не зависит от переменной u_0, поэтому его производная в направлении вектора $x = \boldsymbol{e}_0$ равна нулю. Поэтому достаточно вычислить $D_x(n_2)$ только в направлении вектора $x = X \in \mathbf{R}^{7+}$. Эта производная находится простым дифференцированием единичного векторного поля $n_2(u)$. Если $u = u_0+U \in \mathbf{R}^{8+}$, то $n_2(u) = U / \| U \|$. Поэтому из формулы $D_x(J)(y) = D_x(n_2)y$ получаем следующее выражение для производной почти комплексной структуры Кэли J на $\mathbf{R}^{8+}$ в точке $u = u_0+U$ в направлении вектора $x = x_0 + X$:

$$D_x(J)y = (d_X n_2)y = \frac{1}{\| U \|}\big(X - \langle X, n_2(u)\rangle n_2(u)\big)\cdot y.$$

Используя это выражение, можно легко вычислить (так же, как и в теореме 4) тензор Нейенхейса $N(x,y)$ для векторов x,y, ортогональных $n_2(u)$. Вычислим внешний дифференциал 2-формы ω в точке $u = u_0+U$ с использованием полученной формулы для $D_x(J)$:

$$d\omega(x,y,z) = x\omega(y,z) + y\omega(z,x) + z\omega(x,y) = \langle D_x(J)y, z\rangle + \langle D_y(J)z, x\rangle + \langle D_z(J)x, y\rangle =$$

$$= \frac{1}{\| U \|}\big(3\langle X\times Y, Z\rangle - \langle X, n_2(u)\rangle \omega(Y,Z) - \langle Y, n_2(u)\rangle \omega(Z,X) - \langle Z, n_2(u)\rangle \omega(X,Y)\big) =$$

$$= \frac{1}{\| U \|}\Big(3\Omega(X,Y,Z) - (n_2^* \wedge \omega)(X,Y,Z)\Big).$$

Почти пара-комплексная структура Кэли. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^{8-} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7-}$ и определим неинтегрируемую почти пара-комплексную структуру P. На прямой $\mathbf{R}_0$ определено единичное векторное поле $n_1 = \boldsymbol{e}_0 = 1$. Определим единичное векторное поле $n_2(u)$ на $\mathbf{R}^{8-}$ формулой $n_2(u) = U / \| U \|$, где $\| U \| = \sqrt{-N_0(U)} > 0$, $u = u_0+U \in \mathbf{R}^{8-} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7-}$. Отметим, что $\langle n_2, n_2\rangle = -1$ и $n_2 n_2 = +1$. Определим оператор P: $\mathbf{R}^8 \to \mathbf{R}^8$ в точке $u = u_0+U \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7-}$ такой же формулой

$$P(y) = n_2(u)\cdot y = \frac{U}{\| U \|} y\,.$$

Легко видеть, что $P^2 = Id$. Поэтому мы получаем неинтегрируемую почти пара-комплексную структуру на $\mathbf{R}^{8-}$. Совершенно аналогично вычисляются $D_x(P)$, фундаментальная форма $\omega(X,Y) = g(PX,Y)$, соответствующая P, и ее внешний дифференциал в точке $u = u_0+U$. Они имеют точно такой же вид, как и в случае почти комплексной структуры на $\mathbf{R}^{8+}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Agricola I., Bazzoni G., Goertsches J., et al.* On the history of the Hopf problem // Diff. Geom. and Appl. 2018. V. 57. P. 1–9. DOI: doi.org/10.1016/j.difgeo.2017.10.014 (arXiv: 1708.01068 [math.HO]).
2. *Agricola I., Borówka A., Friedrich T.* S6 and the geometry of nearly Kähler 6-manifolds // Diff. Geom. and Appl. 2018. V. 57. P. 75–86. DOI: 10.1016/j.difgeo.2017.10.007 (arXiv: 1707.08591 [math.DG], 2017, 12 pages).

3. *Смоленцев Н.К.* О почти комплексных структурах на шестимерных произведениях сфер // Ученые записки Казанского государственного университета. 2009. Т. 151. Кн. 4. С. 116–135.
4. Alekseevsky D.V., Kruglikov B.S., Winther H. Homogeneous almost complex structures in dimension 6 with semi-simple isotropy // Ann. Glob. Anal. Geom. 2014. V. 46. P. 361–387. DOI: doi.org/10.1007/s10455-014-9428-y (arXiv:1401.8187v2 [math.DG]).
5. *Жевлаков К., Слинько А., Шестаков И., Ширшов А.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
6. *Yokota I.* Exceptional Lie groups. arXiv:0902.0431v1 [math.DG] 2009. DOI: doi = 10.1.1.401.8095&rep = rep1&type = pdf
7. *Yokota I.* Non-compact Simple Lie Group G_2' of Type G_2 // J. Fac. Sci. Shinshu University. 1977. V. 12. No. 1. P. 45–52.
8. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans AMS. 1969. V. 141. P. 465–504. DOI: doi.org/10.1090/S0002-9947-1969-0243469-5.
9. *Алексеевский Д.В., Медори К., Томассини А.* Однородные пара-кэлеровы многообразия Эйнштейна // УМН. 2009. Т. 64. Вып. 1(385). С. 3–50. DOI: https://doi.org/10.4213/rm9262.
10. *Hitchin N.J.* The geometry of three-forms in six dimensions // J. Diff. Geom. 2000. V. 55. P. 547–576.
11. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1 и 2. М.: Наука, 1981.

Статья поступила 14.02.2018 г.

Smolentsev N.K.(2018) ON ALMOST (PARA)COMPLEX CAYLEY STRUCTURES ON SPHERES $S^{2,4}$ AND $S^{3,3}$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 22–38

DOI 10.17223/19988621/53/3

Keywords: Cayley algebra, split Cayley algebra, G2 group, split-octonions, vector product, almost complex structure, almost para-complex structure, six-dimensional pseudo-Riemannian spheres.

It is well known that almost complex structures exist on the six-dimensional sphere $\mathbf{S}^6$ but the question of the existence of complex (ie, integrable) structures has not been solved so far. The most known almost complex structure on the sphere $\mathbf{S}^6$ is the Cayley structure which is obtained by means of the vector product in the space $\mathbf{R}^7$ of the purely imaginary octaves of Cayley **Ca**. There is another, split Cayley algebra **Ca′**, which has a pseudo-Euclidean scalar product of signature (4,4). The space of purely imaginary split octonions is the pseudo-Euclidean space $\mathbf{R}^{3,4}$ with a vector product. In the space $\mathbf{R}^{3,4}$, there are two types of spheres: pseudospheres $\mathbf{S}^{2,4}$ of real radius and pseudo sphere $\mathbf{S}^{3,3}$ of imaginary radius. In this paper, we study the Cayley structures on these pseudo-Riemannian spheres. On the first sphere $\mathbf{S}^{2,4}$, the Cayley structure defines an orthogonal almost complex structure J; on the second sphere, $\mathbf{S}^{3,3}$, the Cayley structure defines an almost para-complex structure P. It is shown that J and P are nonintegrable. The main characteristics of the structures J and P are calculated: the Nijenhuis tensors, as well as fundamental forms and their differentials. It is shown that, in contrast to the usual Riemann sphere $\mathbf{S}^6$, there are (integrable) complex structures on $\mathbf{S}^{2,4}$ and para-complex structures on $\mathbf{S}^{3,3}$.

AMS Mathematical Subject Classification: 53C15: 53C50; 53C30; 53C25; 53C38

SMOLENTSEV Nikolay Konstantinovich (Dr. Sci. in Physics and Mathematics, professor of Fundamental Mathematics department of Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: smolennk@yandex.ru

REFERENCES

1. Agricola I., Bazzoni G., Goertsches J., Konstantis P., Rollenske S. (2018) On the history of the Hopf problem. *Diff. Geom. and Appl*. 57. pp. 1–9. DOI: doi.org/10.1016/j.difgeo. 2017.10.014 (arXiv:1708.01068 [math.HO]).
2. Agricola I., Borówka A., Friedrich T. (2018) S6 and the geometry of nearly Kähler 6-manifolds. *Diff. Geom. and Appl*. 57. pp. 75–86. DOI: 10.1016/j.difgeo.2017.10.007 (arXiv: 1707.08591 [math.DG], 2017, 12 pages.).
3. Smolentsev N.K. (2009) O pochti kompleksnykh strukturakh na shestimernykh proizvedeniyakh sfer [On almost complex structures on six-dimensional products of spheres]. *Scientific Notes of Kazan State University*. 151(4). pp. 116–135.
4. Alekseevsky D.V., Kruglikov B.S., Winther H. (2014) Homogeneous almost complex structures in dimension 6 with semi-simple isotropy. *Ann. Glob. Anal. Geom*. 46. pp. 361–387. DOI: doi.org/10.1007/s10455-014-9428-y (arXiv:1401.8187v2 [math.DG]).
5. Zhevlakov K., Slin’ko A., Shestakov I., Shirshov A. (1978) *Kol'tsa, blizkie k assotsiativnym* [Rings close to associative]. Moscow: Nauka.
6. Yokota I. (2009) Exceptional Lie groups. *arXiv:0902.0431v1 [math.DG]*. doi: 10.1.1.401.8095&rep=rep1&type = pdf.
7. Yokota I. Non-compact Simple Lie Group G_2' of Type G_2 (1977) *Jour. Fac. Sci. Shinshu University*. 12(1). pp. 45–52.
8. Gray A. (1969) Vector cross products on manifolds. *Trans. AMS*. 141. pp. 465–504. DOI: doi.org/10.1090/S0002-9947-1969-0243469-5.
9. Alekseevsky D.V., Medori C., Tomassini A. (2009) Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds. *Russ. Math. Surv*. 64(1). pp. 1–43. DOI: https://doi.org/10.1070/ RM2009v064n01ABEH004591.
10. Hitchin N.J. (2000) The geometry of three-forms in six dimensions. *J. Diff. Geom*. 55. pp. 547–576.
11. Kobayashi S., Nomizu K. (1963) *Foundations of Differential Geometry. Vol. 1 and 2*. New York, London: Interscience Publ.