

УДК 539.39:536-12:519.633
DOI 10.17223/19988621/54/9

Е.С. Парфенова, А.Г. Князева

НАЧАЛЬНАЯ СТАДИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПЕРЕХОДНОГО СЛОЯ МЕЖДУ ПЛЕНКОЙ И ПОДЛОЖКОЙ ПРИ НАГРЕВЕ СИЛЬНОТОЧНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ¹

Работа посвящена математическому моделированию начальной стадии формирования переходного слоя между пленкой и основным материалом при нагреве сильноточным электронным пучком. Подробно описаны математическая постановка задачи и переход к безразмерным переменным. Разработанный численный алгоритм основан на неявной разностной схеме. Приведены примеры решения связанной задачи для двух систем покрытие – подложка – Mo(Ni), Ni(Cu). Выявлены особенности взаимодействия процессов разной физической природы – распространение механических возмущений и диффузии материала пленки.

Ключевые слова: математическое моделирование, электронно-лучевой нагрев, диффузия, напряжения, деформация, время релаксации, покрытие.

В настоящее время активно исследуются процессы взаимодействия концентрированных потоков энергии с материалами. Эти методы обработки позволяют разрабатывать новые материалы с уникальными свойствами, которые отвечают современным технологическим требованиям. Наибольший интерес в этой области представляют низкоэнергетические сильноточные электронные пучки, с помощью которых можно формировать твердые растворы, интерметаллиды и нитриды в приповерхностном слое металлов и сплавов, что приводит к значительному улучшению физико-механических и эксплуатационных характеристик без существенного изменения геометрии деталей [1–5]. Кроме того, поверхностная обработка металлов электронными пучками часто используется для модификации предварительно нанесенного покрытия [6] и улучшения адгезии системы покрытие – подложка [1, 7]. Особый интерес сегодня вызывает использование ультратонких покрытий, которые зачастую находятся в наноструктурном состоянии [8, 9]. В основном обработка поверхностей металлических материалов с использованием импульсных низкоэнергетических сильноточных электронных пучков достигается быстрым нагревом до температур, превышающих температуру плавления материала, и быстрым охлаждением поверхностных слоев [3]. Но в работе [10] показано, что изменения в поверхностных слоях и объеме металлических материалов могут происходить и при воздействии на поверхность пучками электронов в режиме отсутствия плавления, т.е. при достаточно низких температурах. Однако при этом наблюдаются значительные изменения состава и структуры.

Установлено, что процесс поверхностной обработки, в частности потоком электронов, сопровождается многочисленными физико-химическими процессами [11]. Кроме таких процессов как нагрев, фазообразование, перемешивание и т.д., в момент взаимодействия потока электронов с поверхностью мишени происходит

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, грант № 16-01-00603.

генерация упругих волн механических возмущений [12]. Все указанные процессы протекают одновременно, поэтому их экспериментальное исследование затруднено. Эксперимент ориентирован на конечный результат воздействия, на анализ структур, которые получаются в поверхностном слое шлифов, которые также есть результат дополнительного воздействия [13]. Известные методы не позволяют исследовать процессы, протекающие на достаточно малых временах. В отличие от экспериментальных работ, математическое моделирование позволяет детально исследовать процесс обработки на всех его стадиях, изучить роль каждого возникающего явления в отдельности и выявить взаимосвязь между интересующими процессами.

В литературе встречаются модели для исследования особенностей термоупругих волн, вызванных воздействием высокоэнергетических источников на поверхности материалов, но стоит отметить, что редко встречаются связанные модели электронно-лучевой обработки, в которых учитываются одновременно протекающие процессы разной физической природы. В работах [14–16], например, представлены математические модели, описывающие эволюцию механических возмущений, возникающих при взаимодействии пучков заряженных частиц с поверхностью металла, но собственно процесс внедрения частиц (начальная стадия обработки) не рассматривается. В [17, 18] обсуждаются механизмы формирования полей механических напряжений в облучаемой мишени, которые представляют собой распространяющуюся со скоростью звука ударную волну, а также локализованные вблизи облучаемой поверхности напряжения, обусловленные неоднородным по объему полем температур. Также показано, что плотность вложенной в мишень энергии и длительность облучения являются главными факторами, определяющими спектр протекающих в веществе процессов. В работе [19] учитывается только один перекрестный эффект – перенос массы под действием градиента температуры и исследуются вязкоупругие напряжения, однако процесс полагается квазистатическим. Без учета динамических эффектов анализируется процесс электронно-лучевого воздействия на систему покрытие – подложка в работах [20–22], где представлены результаты моделирования тепловых полей и формирования новых фаз в процессе обработки. Взаимосвязь разномасштабных процессов – диффузии примеси и распространения упругих волн – изучается в [23]. Показано, что взаимовлияние механических и диффузионных волн приводит не только к затуханию волны деформаций (и напряжений) и искажению ее профиля, но и дает распределение концентрации, не соответствующее чисто диффузионному процессу. Однако в этой работе не учитывается возможное изменение температуры в ходе обработки, а также наличие границ раздела материалов.

При разработке связанных моделей могут возникнуть трудности, связанные с разномасштабностью исследуемых процессов, что приводит к необходимости выбора подходящего метода решения. На примере связанной изотермической задачи термоупругой диффузии, этот вопрос проанализирован в [23–25].

В настоящей работе представлена математическая модель начальной стадии процесса взаимодействия потока электронов с поверхностью металла с предварительно нанесенной тонкой пленкой. Модель позволяет изучать взаимодействие нелинейных волн разной физической природы, распространяющихся совместно в неизотермических условиях. Предполагается, что частицы обладают энергией, достаточной для генерации упругих волн механических возмущений в поверхности мишени, и приводят к изменению температуры.

Математическая постановка задачи

Предположим, что возникающие напряжения – упругие, скорости, ускорения и деформации малы, тогда для описания взаимодействия волн концентрации, тепловых волн и волн напряжений (деформаций) при воздействии потока электронов материалов необходимы уравнение баланса массы, уравнение теплопроводности и уравнение движения. Определяющие соотношения соответствуют теории обобщенной термоупругой диффузии [26–28]. За основу возьмем разработанную ранее модель [25], описывающую процесс внедрения частиц в поверхность мишени с покрытием в приближении одноосного нагружения. Внутренняя граница разделяет материалы с разными свойствами (покрытие – A , подложки – B). Для каждой из областей необходимо записать свои уравнения:

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + t_{Dk} \frac{\partial^2 C_k}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_k \frac{\partial C_k}{\partial x} - \frac{B_k C_k}{\rho_k} \frac{\partial \sigma_k}{\partial x} \right]; \quad (1)$$

$$\rho_k C_{\sigma k} \left[t_{qk} \frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2} + \frac{\partial T_k}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial x} \right] - \alpha_{Tk} T_k \frac{\partial \sigma_k}{\partial t} - t_{qk} \frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha_{Tk} T_k \frac{\partial \sigma_k}{\partial t} \right]; \quad (2)$$

$$\frac{\rho_k}{E_k} \frac{\partial^2 \sigma_k}{\partial t^2} + \rho_k \alpha_{Tk} \frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2} + \rho_k \Delta \alpha_k \frac{\partial^2 C_k}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma_k}{\partial x^2}, \quad (3)$$

где C_k – концентрация диффузанта в покрытии ($k = A$) и в подложке ($k = B$); ρ_k – плотности материалов, кг/м³; σ_k – компонента тензора напряжений в материалах $k = A$ и $k = B$ в направлении облучения; T_k – температура, К; α_{Tk} – коэффициенты теплового расширения, К⁻¹; $C_{\sigma k}$ – теплоемкость, Дж/(кг К); t_{Dk} – время релаксации потока массы к равновесному состоянию, с; t_{qk} – время релаксации потока тепла к равновесному состоянию, с; $B_k = D_k^0 m \Delta \alpha_k / RT_k$ – коэффициент переноса массы под действием напряжений; $D_k^0 = D_{0k} \exp(-E_{ak} / RT_k)$ – коэффициент самодиффузии, м²/с. Очевидно, что $D_A^0 = D_B^0 = D$, $D_{0A} = D_{0B} = D_0$; R – универсальная газовая постоянная, мольная масса, кг/моль; $D_k = Df(C_k)$ – коэффициент диффузии, м²/с; $f(C_k)$ – функция состава; λ_{Tk} – коэффициент теплопроводности, Вт/(м К); E_{ak} – энергия активации самодиффузии, $E_{aA} = E_{aB} = E_a$, Дж/моль; $\Delta \alpha_k = \alpha_k - \alpha_0$ – разность коэффициентов концентрационного расширения диффузанта α_k и основного α_0 материала; E_k – модуль упругости, Па; $k = A, B$.

Вид зависимости коэффициента диффузии от концентрации определяется типом твердого раствора (если он образуется), характером границ, типом примесей и т.п. Для большого класса материалов можно принять зависимость вида

$$f(C_k) = a + bC_k + dC_k^2 > 0.$$

Если b и d равны нулю, то приходим к задаче с коэффициентом диффузии, не зависящим от концентрации. В рамках данной работы принимаем $f(C_k) = 1$.

При записи (1) – (3) учтены (I) связь между деформациями и напряжениями, которая определяется соотношениями теории термоупругой диффузии [26], и (II) уравнения для потоков тепла и массы (учитывающие времена релаксации), которые получаются на основе термодинамики необратимых процессов [26, 29].

В случае одноосного нагружения имеем

$$\sigma_k = E_k (\varepsilon_k - \alpha_{Tk} (T_k - T_0) - \Delta \alpha_k (C_k - C_0)). \quad (4)$$

Для одномерного приближения находим

$$J_k = -\rho_k D_k \frac{\partial C_k}{\partial x} + B_k C_k \frac{\partial \sigma_k}{\partial x} - t_{Dk} \frac{\partial J_k}{\partial t}; \quad (5)$$

$$J_{qk} = -\lambda_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial x} - t_{qk} \frac{\partial J_{qk}}{\partial t}. \quad (6)$$

Граница раздела материала покрытия и подложки находится на расстоянии h от левой границы, соответствующей началу координат. Полагаем, что на границе раздела имеет место идеальный контакт, тогда

$$x = h: u_A = u_B, \sigma_A = \sigma_B, C_A = C_B, J_A = J_B, J_{qA} = J_{qB}, \quad (7)$$

где u_A, u_B – компоненты вектора перемещений в направлении Ox слева и справа от границы.

Оставшиеся граничные и начальные условия имеют вид

$$x = 0: J_A = 0, J_{qA} = q_0 \Phi(t), \sigma_A = \sigma_0 \Phi(t); \quad (8)$$

$$x \rightarrow \infty: C_B = 0, \sigma_B = 0; \quad (9)$$

$$t = 0: C_k = \begin{cases} 1.0, & 0 \leq x \leq h \\ 0.0, & x > h \end{cases}, \sigma_k = 0, T_k = T_0, \frac{\partial C_k}{\partial t} = 0, \frac{\partial \sigma_k}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Для численной реализации модели (1) – (3), (8) – (11) удобнее перейти к безразмерным переменным. Это значительно сократит количество коэффициентов и позволит разработать подходящий алгоритм.

Безразмерные переменные

Используем следующие безразмерные переменные:

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \xi = \frac{x}{x_*}, S = \frac{\sigma}{\sigma_*}, \Theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0}, e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*},$$

где масштабы включают свойства первого слоя A (слой, на который поток частиц действует непосредственно):

$$x_* = \sqrt{D(T_*)t_*}, \sigma_* = E_A \alpha_{TA} (T_* - T_0), t_* = \frac{\rho_A}{E_A} D(T_*),$$

$$\varepsilon_* = \alpha_{TA} (T_* - T_0), T_* = T_0 + \frac{q_0 x_*}{\lambda_{TA}}.$$

Тогда уравнения в первом материале (в пленке) принимают вид

$$\frac{\partial^2 S_A}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Theta_A}{\partial \tau^2} + \gamma \frac{\partial^2 C_A}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 S_A}{\partial \xi^2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial C_A}{\partial \tau} + \tau_{DA} \frac{\partial^2 C_A}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[F(\Theta_A) \frac{\partial C_A}{\partial \xi} \right] - M\omega\gamma \frac{\partial}{\partial \xi} \left(C_A \frac{F(\Theta_A)}{\Theta_A + \sigma_A} \cdot \frac{\partial S_A}{\partial \xi} \right); \quad (12)$$

$$\left[\tau_{qA} \frac{\partial^2 \Theta_A}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \Theta_A}{\partial \tau} \right] = \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 \Theta_A}{\partial \xi^2} - \omega[\sigma_A + \Theta_A] \frac{\partial S_A}{\partial \tau} - \tau_{qA} \omega \frac{\partial}{\partial \tau} \left([\sigma_A + \Theta_A] \frac{\partial S_A}{\partial \tau} \right). \quad (13)$$

Уравнения для материала подложки B :

$$\frac{1}{K_E} \frac{\partial^2 S_B}{\partial \tau^2} + K_{\alpha T} \frac{\partial^2 \Theta_B}{\partial \tau^2} + K_{\alpha} \gamma \frac{\partial^2 C_B}{\partial \tau^2} = \frac{1}{K_p} \frac{\partial^2 S_B}{\partial \xi^2}; \quad (14)$$

$$\frac{\partial C_B}{\partial \tau} + \tau_{DB} \frac{\partial^2 C_B}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(F(\Theta_B) \frac{\partial C_B}{\partial \xi} \right) - \frac{M\omega\gamma K_{\alpha}}{K_p} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{C_B F(\Theta_B)}{[\Theta_B + \sigma_B]} \frac{\partial S_B}{\partial \xi} \right]; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{K_p K_C}{K_{\alpha T}} \tau_{qB} \frac{\partial^2 \Theta_B}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \Theta_B}{\partial \tau} = \\ & = \frac{K_{\lambda}}{Le K_{\alpha T}} \frac{\partial^2 \Theta_B}{\partial \xi^2} - [\Theta_B + \sigma_B] \omega \frac{\partial S_B}{\partial \tau} - \tau_{qB} \omega \frac{\partial}{\partial \tau} \left([\Theta_B + \sigma_B] \frac{\partial S_B}{\partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Граничные и начальные условия:

$$\xi = 0: \bar{J}_A = 0, \bar{J}_q = \mu\varphi(\tau), S_A = S_0\varphi(\tau); \quad (17)$$

$$\xi \rightarrow \infty: C_k = 0, S_k = 0; \quad (18)$$

$$\tau = 0: C_k = \begin{cases} 1.0, & 0 \leq \xi \leq h \\ 0.0, & \xi > h \end{cases}, S_k = 0, \Theta_k = \Theta_0, \frac{\partial C_k}{\partial \tau} = 0, \frac{\partial S_k}{\partial \tau} = 0; \quad (19)$$

$$\xi = H: \bar{u}_A = \bar{u}_B, S_A = S_B, C_A = C_B, \bar{J}_A = \bar{J}_B, J_{qA} = J_{qB}. \quad (20)$$

В решении (в граничных условиях) используются соотношения (4) – (7), также записанные в безразмерных переменных:

$$S_A = (e_A - \Theta_A - \gamma(C_A - C_0)); \quad (21)$$

$$\bar{J}_{qA} = -D(T_*) \frac{\partial C_A}{\partial \xi} + \frac{D(T_*)}{[\Theta_A + \sigma_A]} \gamma C_A M \omega \frac{\partial S_A}{\partial \xi} - \tau_{DA} \frac{\partial J_A}{\partial \tau}; \quad (22)$$

$$S_B = K_E (e_B - K_{\alpha T} \Theta_B - \gamma K_{\alpha} (C_B - C_0)); \quad (23)$$

$$\bar{J}_B = -D(T_*) K_p \frac{\partial C_B}{\partial \xi} + \frac{D(T_*)}{[\Theta_B + \sigma_B]} \gamma C_B M \omega K_{\alpha} \frac{\partial S_B}{\partial \xi} - \tau_{DB} \frac{\partial J_B}{\partial \tau}. \quad (24)$$

Функция $F(\Theta_A) = \exp(-1/\beta(\sigma_k + \Theta_k))$ является фактически безразмерным коэффициентом диффузии. Здесь $\sigma_k = T_0 / (T_* - T_0)$, $\beta = R(T_* - T_0) / E_a$.

Наличие внутренней границы приводит к появлению параметров модели, характеризующих отношение свойств материала покрытия и основного материала:

$$K_E = \frac{E_B}{E_A}, K_{\alpha T} = \frac{\alpha_{TB}}{\alpha_{TA}}, K_{\alpha} = \frac{\Delta\alpha_B}{\Delta\alpha_A}, K_p = \frac{\rho_B}{\rho_A}, K_{\lambda} = \frac{\lambda_{TB}}{\lambda_{TA}}, K_C = \frac{C_{\sigma B}}{C_{\sigma A}}.$$

Все остальные параметры модели приведены в таблице.

Параметры модели

$\tau_{Dk} = \frac{t_{Dk} E_A}{D \rho_A}$	$M = \frac{m C_{\sigma A}}{R}$	$\omega = \frac{\alpha_{TA}^2 E_A}{\rho_A C_{\sigma A}} (T_* - T_0)$	$\mu = \frac{q_0 D(T_*)}{\rho_A} \sqrt{\frac{\rho_A}{E_A}}$
$\tau_{qk} = \frac{t_{qk} E_A}{D \rho_A}$	$\gamma = \frac{\alpha_A - \alpha_0}{\alpha_{TA} (T_* - T_0)}$	$Le = \frac{D(T_*)}{\lambda_{TA} / (\rho_A C_{\sigma A})}$	$S_0 = \frac{\sigma_0 D(T_*)}{\sigma_*} \frac{\rho_A}{E_A}$

В работе представлены варианты расчетов для системы покрытие – подложка: Ni(Cu), Mo(Ni). Используя известные свойства указанных материалов [30], можно определить область изменения параметров, входящих в таблицу: $\omega = [10^{-4}..10^{-1}]$, $\tau_{Dk} = [10^{-5}..10^2]$, $\tau_{qk} = [10^{-7}..10^1]$, $\gamma = [-10..10]$, $Le = [10^{-2}..10^2]$, $\mu = [10^{-4}..0.9]$, $S_0 = [10^{-7}..10^{-2}]$. Видим, что параметры модели варьируются в достаточно широком диапазоне.

Метод решения

Задача (12) – (21) была решена численно по неявной разностной схеме. Например, для уравнения диффузии

$$\frac{\partial C_A}{\partial \tau} + \tau_{DA} \frac{\partial^2 C_A}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[F(\Theta_A) \frac{\partial C_A}{\partial \xi} \right] - M \omega \gamma \frac{\partial W_A}{\partial \xi},$$

где $W_k = C_k \frac{F(\Theta_k)}{\Theta_k + \sigma_k} \frac{\partial S_k}{\partial \xi}$, разностная схема имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{C_{A(i)}^{j+1} - C_{A(i)}^j}{\Delta t} + \tau_{DA} \frac{C_{A(i)}^{j+1} - 2C_{A(i)}^j + C_{A(i)}^{j-1}}{\Delta t^2} = \\ & = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{F_{A(i+1)}^j + F_{A(i)}^j}{2} \frac{C_{A(i+1)}^{j+1} - C_{A(i)}^{j+1}}{\Delta x} - \frac{F_{A(i)}^j + F_{A(i-1)}^j}{2} \frac{C_{A(i)}^{j+1} - C_{A(i-1)}^{j+1}}{\Delta x} \right] - M \omega \gamma \frac{W_{A(i)}^j - W_{A(i-1)}^j}{\Delta x}. \end{aligned}$$

В уравнение движения удобнее перейти от напряжений к деформациям с помощью (21),(23), тогда имеем

$$\frac{\partial^2 e_A}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 e_A}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Theta_A}{\partial \xi^2} - \gamma \frac{\partial^2 C_A}{\partial \xi^2}.$$

Разностная схема имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{e_{A(i)}^{j+1} - 2e_{A(i)}^j + e_{A(i)}^{j-1}}{\Delta t^2} = \\ & = \frac{e_{A(i-1)}^{j+1} - 2e_{A(i)}^j + e_{A(i+1)}^{j-1}}{\Delta x^2} - \frac{\Theta_{A(i+1)}^j - 2\Theta_{A(i)}^j + \Theta_{A(i-1)}^j}{\Delta x^2} - \gamma \frac{C_{A(i+1)}^j - 2C_{A(i)}^j + C_{A(i-1)}^j}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Эти уравнения далее приводятся к виду, удобному для метода прогонки.

Граничные условия также аппроксимируем со вторым порядком аппроксимации. Для этого используем разложения величин в точке, ближайшей к границе, в ряд Тейлора относительно граничных точек. С условиями на границе раздела между материалами поступаем аналогично. Однако разложения в ряд Тейлора строим слева и справа от границы. Вторые производные при этом находим из соответствующих дифференциальных уравнений.

Разработанный численный алгоритм устойчив во всей области изменения параметров модели. Сходимость проверяли, используя экстраполяцию на нулевой шаг. Во всех расчетах контролировалось выполнение закона сохранения массы.

Анализ результатов

Полагаем, что граница раздела материалов соответствует точке $h = 0.025$; на поверхность мишени действует одиночный синусоидальный импульс:

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 0.02 \sin\left(\frac{\pi\tau}{\tau_{\text{imp}}}\right), & \tau \leq \tau_{\text{imp}}, \\ 0.0, & \tau > \tau_{\text{imp}} \end{cases}, \quad \tau_{\text{imp}} = 0.025.$$

Для системы Mo(Ni) значения основных параметров модели фиксированы:

$$\tau_r^{\text{Ni}} = 0.03, \quad \tau_r^{\text{Mo}} = 0.015, \quad \tau_q^{\text{Ni}} = 0.0006, \quad \tau_q^{\text{Mo}} = 0.0001, \quad \omega = 0.001, \quad \gamma = -0.003.$$

$$Le = 40.7, \quad \mu = 0.5, \quad S_0 = 0.001, \quad K_{\alpha T} = 0.38, \quad K_{\alpha} = 1.42, \quad K_{\rho} = 1.15, \quad K_{\lambda} = 1.52,$$

$$K_C = 0.51, \quad K_E = 1.6.$$

На рис. 1 представлены распределения температуры и деформации для этой системы для времен, меньших и сравнимых с относительными временами релаксации теплового потока, которые являются минимальными из всех времен, характерных для задачи. Поведение кривых в окрестности границ выделено для наглядности. Видно, что начальный этап обработки (моменты времени, сравнимые с $\tau_q^{\text{Ni}} = 0.0006$ и $\tau_q^{\text{Mo}} = 0.0001$) сопровождается незначительным понижением температуры в области границы раздела материалов. Деформации повторяют температурные профили. Диффузии материала покрытия в материал основы на данном этапе не наблюдается. Аналогичная картина имеет место и для системы Ni(Cu). Перегиб в деформациях в первом слое для моментов, больших $\tau_q^{\text{Mo}} = 0.0001$, связан со взаимодействием тепловой и механических волн.

Рисунок 2 демонстрирует распределения температуры для более поздних времен (сравнимых со временами релаксации потока массы) для разных сочетаний свойств материала покрытия и подложки. Видно, что в момент времени t на границе раздела материалов все еще присутствует перегиб температуры: незначительное понижение для Mo(Ni) и повышение для Ni(Cu). В дальнейшем, температурные распределения выравниваются, но на границе имеется искажение. Искажение температурного профиля по сравнению с типичным для классических задач теплопроводности более выражено для системы Ni(Cu), так как различие в свойствах этих материалов более значительно, чем для системы Mo(Ni). Особенно это касается величин коэффициентов теплопроводности:

$$K_{\sigma}^{\text{Ni(Cu)}} = 0.23, \quad K_{\sigma}^{\text{Mo(Ni)}} = 1.52.$$

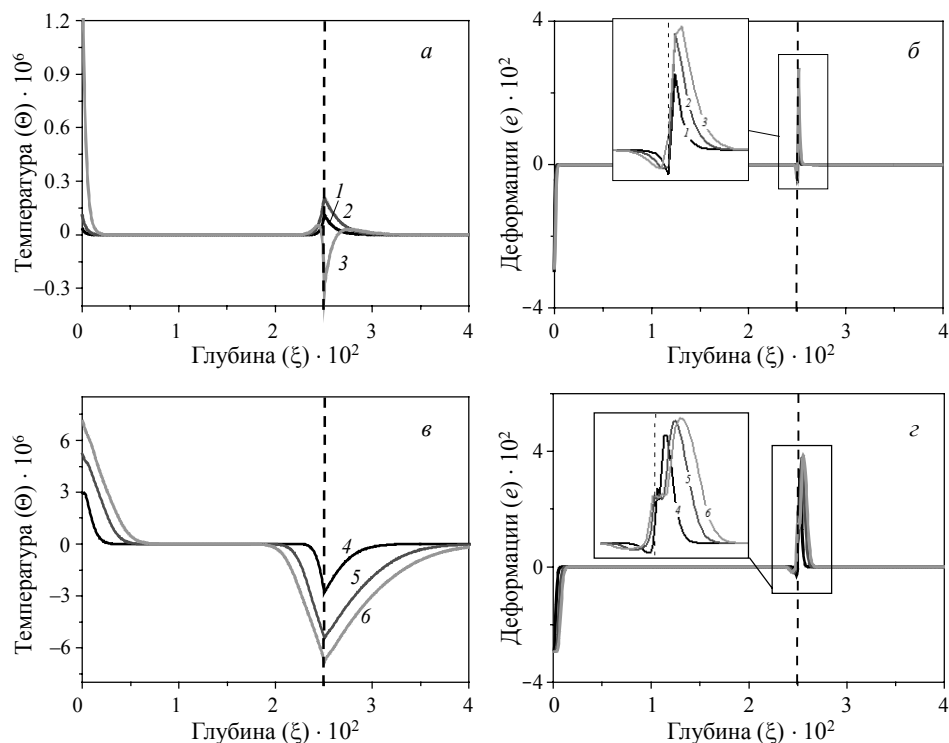


Рис. 1. Пример решения связанной задачи для системы Mo(Ni): а, в – профили распределения температуры; б, г – профили волн деформации. Моменты времени τ : 1 – 0.00005, 2 – 0.0001, 3 – 0.00015, 4 – 0.0003, 5 – 0.0006, 6 – 0.0008

Fig. 1. Example of coupled problem solution for a system Mo(Ni): (а), (в) profiles of the temperature distribution; (б), (г) profiles of the deformation waves. Time instants, $\tau = 1, 0.00005; 2, 0.0001; 3, 0.00015; 4, 0.0003; 5, 0.0006; \text{ and } 6, 0.0008$

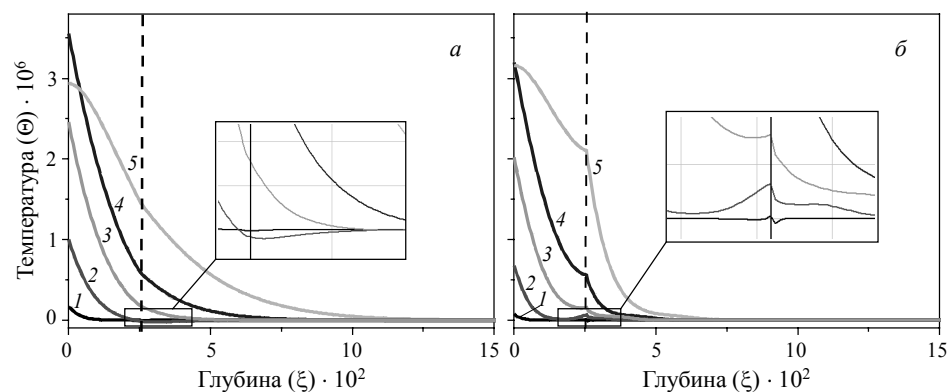


Рис. 2. Распределение температуры в разные моменты времени, большие, чем времена релаксации потока тепла: а – Mo(Ni); б – Ni(Cu). Моменты времени τ : 1 – 0.0015; 2 – 0.005; 3 – 0.01; 4 – 0.015, 5 – 0.025

Fig. 2. Temperature distribution at various time instants exceeding the heat flux relaxation time: (а) Mo(Ni) and (б) Ni(Cu). Time instants, $\tau = 1, 0.0015; 2, 0.005; 3, 0.01; 4, 0.015; \text{ and } 5, 0.025$

Для больших времен, когда начинается перераспределение концентраций, картина становится более сложной из-за взаимодействия волн разной физической природы. При выбранном наборе параметров время релаксации потока тепла много меньше всех других характерных времен. Поэтому гиперболический тип уравнения переноса тепла для времен, больших 0.001, не проявляется, чего нельзя сказать об уравнении диффузии. Примеры распределения концентраций и деформаций представлены на рис. 3 и 4.

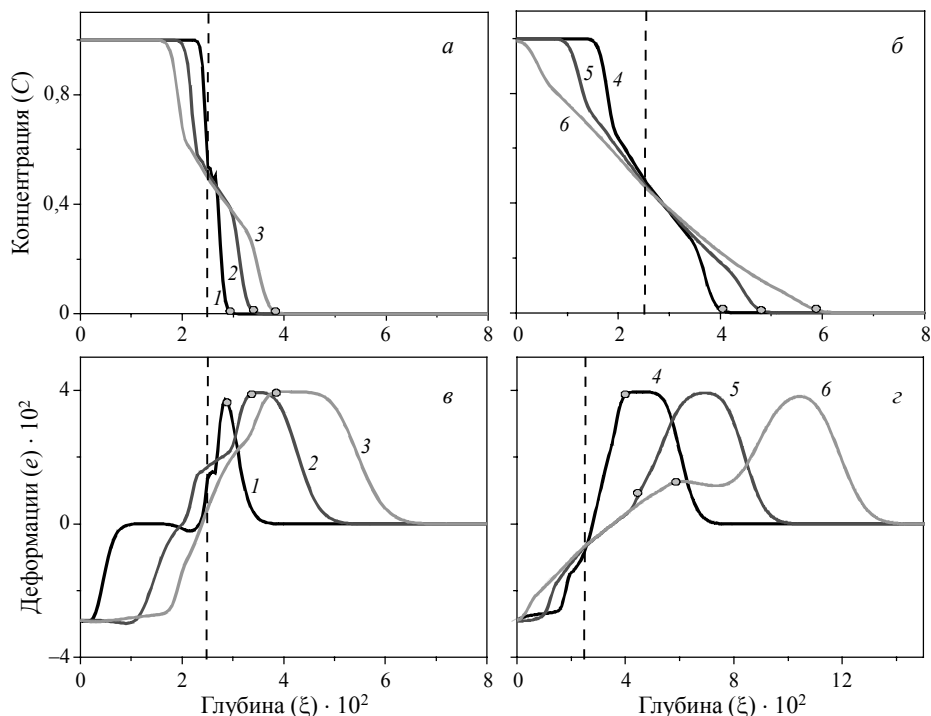


Рис. 3. Пример решения связанной задачи для системы Mo(Ni): а, б – распределения концентрации диффузанта Ni; в, г – распределения деформации. Моменты времени τ : 1 – 0.005, 2 – 0.015, 3 – 0.025, 4 – 0.03, 5 – 0.05, 6 – 0.08

Fig. 3. Example of coupled problem solution for a system Mo(Ni): (а), (б) profiles of the diffusant distribution Ni; (в), (г) profiles of the deformation waves. Time instants, $\tau = 1, 0.005; 2, 0.015; 3, 0.025; 4, 0.03; 5, 0.05; \text{ and } 6, 0.08$

Кривые на рисунках слева соответствуют моментам времени, меньшим или равным τ_{imp} . Для кривых справа – $\tau > \tau_{\text{imp}}$. Длительность импульса находится между диффузионными временами релаксации. На всех кривых четко виден передний фронт концентрационной волны. Ему соответствуют точки на профилях деформаций. После того, как волна деформаций доходит до границы раздела, что соответствует времени $\tau \approx 0.013$, она частично отражается от этой границы, а частично проходит во второй материал. С этими явлениями связаны смена знака деформаций и перегибы на кривых (рис. 3, в и г). Поскольку скорость механической волны выше, чем диффузионной, первая со временем убегает вперед.

Пока действует внешний импульс, продолжается нагрев, затем нагрев прекращается и материал покрытия проникает в материал подложки вследствие не диф-

фузионного механизма переноса, а из-за наличия градиента деформаций (напряжений) в окрестности границы раздела материалов. Для моментов времени, меньших, чем относительное время релаксации $\tau_r^{\text{Mo}} = 0.015$, точка положения переднего фронта волны концентрации соответствует экстремуму деформации. Далее в этих же точках, когда $\tau > \tau_r^{\text{Ni}} = 0.03$ (моменты времени 5, 6 на рис. 1), наблюдается искажение профиля упругой волны.

На рис. 4 представлены распределения концентраций и деформаций для системы Ni(Cu). Значения основных параметров модели в этом случае следующие:

$$\tau_r^{\text{Cu}} = 0.045, \tau_r^{\text{Ni}} = 0.03, \tau_q^{\text{Cu}} = 0.003, \tau_q^{\text{Ni}} = 0.0006, \omega = 0.001, \gamma = 0.003,$$

$$Le = 40.7, \mu = 0.5, S_0 = 0.001, K_{\alpha T} = 0.8, K_{\alpha} = 0.93, K_p = 0.99,$$

$$K_{\lambda} = 0.23, K_C = 0.9, K_E = 1.9.$$

Механизм взаимодействия двух волн: концентрации материала покрытия и упругой волны деформации, аналогичен предыдущему примеру. Основное отличие состоит в знаке генерируемых деформаций, что связано с другим знаком разности коэффициентов концентрационного расширения материалов покрытия и основы $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$. Т.е. параметр модели $\gamma = \Delta\alpha / \alpha_{TA} (T_* - T_0)$ тоже может менять знак для разных сочетаний материалов. Картина распространения деформационных волн в этом случае оказывается более сложной.

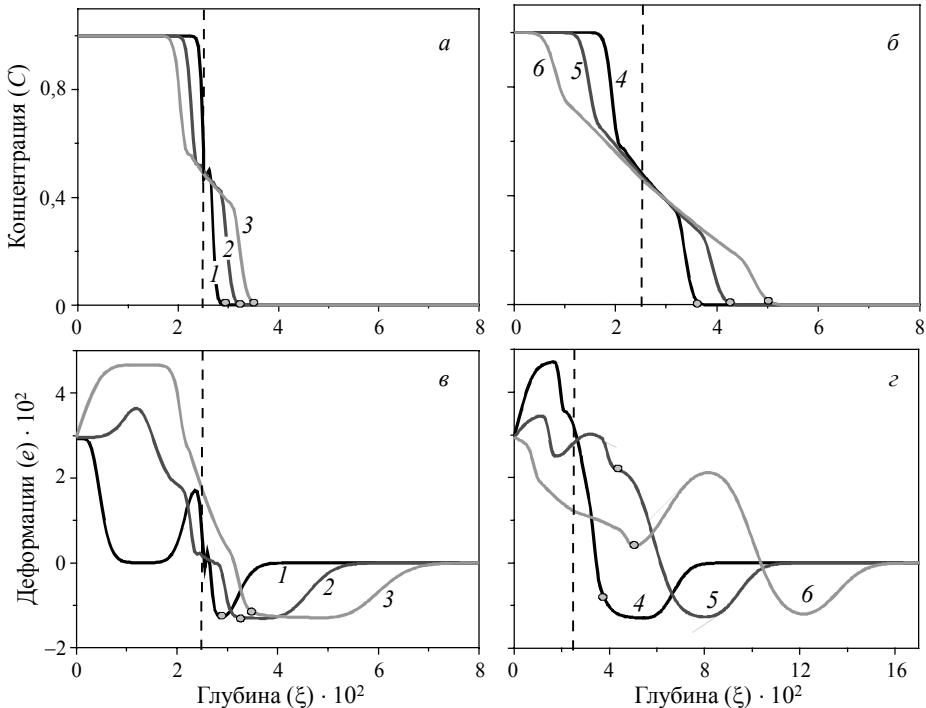


Рис. 4. Пример решения связанной задачи для системы Ni(Cu): а, б – профили распределения концентрации материала покрытия Ni; в, г – профили волн деформации. Моменты времени τ : 1 – 0.005; 2 – 0.015; 3 – 0.025; 4 – 0.03; 5 – 0.05; 6 – 0.08

Fig. 4. Example of coupled problem solution for a system Ni(Cu): (а), (б) profiles of the distribution of coating material concentration Ni; (в), (г) profiles of the deformation waves. Time instants, τ = 1, 0.005; 2, 0.015; 3, 0.025; 4, 0.03; 5, 0.05; and 6, 0.08

Заключение

Таким образом, в работе представлена связанная математическая модель для описания процесса перераспределения материалов в окрестности границы раздела при условии воздействия короткого теплового и механического импульса, соответствующего потоку электронов. Показано, что взаимодействие волн разной физической природы (концентрация материала покрытия, деформации) приводит к искажению волны деформации. Продемонстрировано, что после прекращения действия импульса перераспределение материалов происходит благодаря наличию градиента деформаций. В зависимости от соотношения свойств материалов (покрытие – основа) наблюдаются качественные изменения в распределениях концентраций и деформаций: изменяется знак деформаций, количество экстремумов, поведение тепловой волны в окрестности границы раздела на достаточно малых временах. Но механизмы взаимодействия волн для разных соотношений свойств подобны друг другу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Углов В.В., Квасов Н.Т., Петухов Ю.А. и др. Структурно-фазовые превращения в системе титан – кремний, модифицированной сильноточным электронными пучками и компрессионными плазменными потоками // Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед. 2012. № 4. С. 9–16.
2. Konovalov S.V. et al. Structure of titanium alloy, modified by electron beams and destroyed during fatigue // Letters on Materials. 2017. V. 7. No. 3. P. 266–271. DOI: 10.22226/2410-3535-2017-3-266-271.
3. Koval N.N., Ivanov Yu.F. Nanostructuring of surfaces of metaloceramic and ceramic materials by electron-beams // Russ. Phys. J. 2008. V. 51. No. 5. P. 505–516. DOI: 10.1007/s11182-008-9073-7.
4. Zhang K.M., Zou J.X., Bolle B., Grosdidier T. Evolution of residual stress states in surface layers of an AISI D2 steel treated by low energy high current pulsed electron beam // Vacuum. 2013. V. 87. P. 60–68. DOI: 10.1016/j.vacuum.2012.03.061.
5. Lu J., Wei D.Q., Wang R., Sui X.M., Yin J.W. Surface polishing and modification of 3Cr2Mo mold steel by electron beam irradiation // Vacuum. 2017. V. 143. P. 283–287. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2017.06.010>.
6. Алонцева Д.Л., Красавин А.Л., Погребняк А.Д. и др. Модификация электронным облучением структурно-фазового состояния и свойств плазменно-детонационных покрытий на основе Ni-Cr // Перспективные материалы. 2013. № 1. С. 5–12.
7. Ласковнев А.П., Иванов Ю.Ф., Петрикова Е.А. и др. Модификация структуры и свойств эвтектического силумина электронно-ионно-плазменной обработкой. Минск: Беларус. навука, 2013. 287 с.
8. Смолин А.Ю., Еремина Г.М. Численное исследование влияния материала подложки на деформирование и разрушение системы покрытие – подложка // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 48. С. 91–106. DOI: 10.17223/19988621/48/9.
9. Смолин А.Ю., Аникеева Г.М., Шилько Е.В., Псахье С.Г. Моделирование деформации наноструктурных покрытий на титановой подложке при наноиндентировании // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 4(24). С. 111–125.
10. Степанова Е.Н., Грабовецкая Г.П., Тересов А.Д., Мишин И.П. Эволюция структуры и спектра разориентировок границ зерен субмикрористаллического молибдена при облучении импульсным электронным пучком // Изв. вузов. Физика. 2018. № 1. С. 3–8.
11. Бойко В.И., Евстигнеев В.В. Введение в физику взаимодействия сильноточных пучков заряженных частиц с веществом. М.: Энергоатомиздат, 1988. 136 с.
12. Бойко В.И., Скворцов В.А., Фортвов В.Е., Шаманин И.В. Взаимодействие импульсных пучков заряженных частиц с веществом. М.: Физматлит, 2003. 288 с.

13. Бойко В.И., Данейкин Ю.В., Хадкевич А.В., Юшицин К.В. Влияние механизмов генерации на профиль импульса механических напряжений в металлической мишени при воздействии мощных ионных пучков // Известия Томского политехнического университета. 2007. Т. 310. № 2. С. 87–93.
14. Амирханов И.В., Пузынин И.В., Пузынина Т.П., Сархадов И. Исследование термоупругих эффектов в металлах в рамках модифицированной модели термического пика // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2013. № 2. С. 77–84.
15. Амирханов И.В., Дидык А.Ю., Музафаров Д.З. и др. Модельное описание термоупругих напряжений в материалах при облучении тяжелыми ионами высоких энергий // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2010. Т. 2. № 3. С. 68–71.
16. Бойко В.И., Данейкин Ю.В., Пименов Э.Ю., Лисов В.И. Характеристики ударно-волнового возмущения в металлах при облучении ионными пучками // Изв. вузов. Физика. 2014. Т. 57. № 11/2. С. 151–156.
17. Лейви А.Я., Талала К.А., Красников В.С., Яловец А.П. Модификация свойств конструкционных материалов интенсивными потоками заряженных частиц и плазмы // Вестник ЮУрГУ. Сер. Машиностроение. 2016. Т. 16. № 1. С. 28–55. DOI: 10.14529/engin160103.
18. Волков Н.Б., Майер А.Е., Яловец А.П. О механизме кратерообразования на поверхности твердых тел при воздействии интенсивных пучков заряженных частиц // Журнал технической физики. 2002. Т. 72. Вып. 8. С. 34–43.
19. Chepak-Gizbrekht M., Knyazeva A.G. Stress Evaluation in the Surface Layer at the Condition of Particle Beam // Advanced Materials Research. 2014. V. 880. P. 259–264. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.880.259.
20. Kryukova O.N., Knyazeva A.G., Maslov A.L. Modeling of Phase Evolution in Coated Titanium Nikelide under Irreversible Action of Electron Beam // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1783. Article number 020119. <https://doi.org/10.1063/1.4966412>.
21. Sorokova S.N., Knyazeva A.G. Solid phase synthesis of coating on the base under the electron beam surfacing // Applied Mechanics and Materials. 2013. V. 379. P. 60–65. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.379.60.
22. Иванов Ю.Ф., Петрикова Е.А., Иванова О.В. и др. Модификация интенсивным импульсным электронным пучком системы покрытие (TiN) – подложка (BT1-0) // Изв. вузов. Физика. 2015. Т. 58. № 3. С. 75–81.
23. Демидов В.Н., Князева А.Г., Ильина Е.С. Особенности моделирования диффузионных процессов в упругом теле при его поверхностной модификации частицами // Вестник ПНИПУ. Механика. Сборник «Математическое моделирование систем и процессов». 2012. № 3. С. 25–49.
24. Kryukova O.N., Chepak-Gizbrekht M.V. Thermal Activated Elements Redistribution between Two-component Coating and Substrate // Key Engineering Materials. 2015. V. 685. P. 200–205. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.200.
25. Parfenova E.S. The Mathematical Modeling of the Initial Stage of Ion Implantation into the Target with Coating // Key Engineering Materials. 2017. V. 743. P. 138–141. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.743.138.
26. Князева А.Г. Нелинейные модели деформируемых сред с диффузией // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 6. С. 35–51.
27. Sherief H.H., Hamza F., Saleh H. The Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // Int. J. Eng. Sci. 2004. V. 42. P. 591–608.
28. Aouadi M. Generalized Theory of Thermoelastic Diffusion for Anisotropic Media // J. Thermal Stresses. 2008. V. 31. P. 1–16.
29. Князева А.Г. Диффузия и реология в локально-равновесной термодинамике // Вестник ПНИПУ. Сборник «Математическое моделирование систем и процессов» / под ред. П.В. Трусова. 2005. № 13. С. 45–60.
30. Физические величины: справочник / Н.А. Баби́чев [и др.]; под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

Статья поступила 28.03.2018 г.

Parfenova E.S., Knyazeva A.G. (2018) THE INITIAL STAGE OF TRANSIENT LAYER FORMATION BETWEEN FILM AND SUBSTRATE DURING HEATING BY A HIGH-CURRENT ELECTRON BEAM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 103–117

DOI 10.17223/19988621/54/9

Keywords: mathematical modeling, electron-beam heating, diffusion, stress, deformation, relaxation time, coating

At the present time, the processes of interaction of the concentrated energy fluxes with materials are being widely studied. Of greatest interest in this area are the low-energy high-current electron beams, which are often used to modify the pre-applied coating and to improve the adhesion of the coating-substrate system.

Alongside with such processes as heating, phase formation, mixing, etc., at the moment of interaction between electron beam and target surface, the elastic waves of mechanical perturbations are generated. Experimental study of each process separately is difficult. However, mathematical modeling allows one both to study in details all the stages of processing, to evaluate the role of each arising phenomenon separately, and to reveal the relationship between the processes of interest.

The paper presents a mathematical model of the initial stage of transition layer formation between film and substrate when heated by a high-current electron beam. The system of mass balance equation, heat-transfer equation, and equation of motion is used to describe the interaction between the waves of coating material concentration, heat waves, and stress (strain) waves under the action of electron flux. Governing relations correspond to the theory of generalized thermoelastic diffusion. For numerical solving of the problem, a transition to dimensionless variables is carried out. The developed numerical algorithm is based on an implicit difference scheme.

The examples of coupled problem solution for two coating-substrate systems – Mo(Ni), Ni(Cu) are presented in the paper. It is shown that the interaction between waves of different physical nature leads to a distortion of strain wave. It was demonstrated that the action of momentum is followed by the material redistribution, which occurs due to the presence of strain gradient. For various ratios of material properties (coating-base), the qualitative changes in the distribution of concentration and deformations are observed, while the wave interaction mechanisms are similar.

PARFENOVA Elena Sergeevna (School of Advanced Manufacturing Technologies, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)

KNYAZEVA Anna Georgievna (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, School of Advanced Manufacturing Technologies, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)

REFERENCES

1. Uglov V.V., Kvasov N.T., Petukhov Yu.A., Kudaktin R.S., et al. (2012) Strukturno-fazovye prevrashcheniya v sisteme titan-kremniy, modifitsirovannoy sil'notochnym elektronnymi puchkami i kompressionnymi plazmennymi potokami [Structural phase transformations in a titanium–silicon system modified by a high-current electron beams and compression plasma fluxes]. *Poverkhnost'. Rentgen., sinkhrotr. i neytron. issled. – Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 4. pp. 9–16.
2. Konovalov S.V., et al. (2017) Structure of titanium alloy, modified by electron beams and destroyed during fatigue. *Letters on Materials*. 7(3). pp. 266–271. DOI: 10.22226/2410-3535-2017-3-266-271.
3. Koval N.N., Ivanov Yu.F. (2008) Nanostructuring of surfaces of metalloceramic and ceramic materials by electron-beams. *Russian Physics Journal*. 51(5). pp. 505–516. DOI: 10.1007/s11182-008-9073-7.

4. Zhang K.M., Zou J.X., Bolle B., Grosdidier T. (2013) Evolution of residual stress states in surface layers of an AISI D2 steel treated by low energy high current pulsed electron beam. *Vacuum*. 87. pp. 60–68. DOI: 10.1016/j.vacuum.2012.03.061.
5. Lu J., Wei D.Q., Wang R., Sui X.M., Yin J.W. (2017) Surface polishing and modification of 3Cr2Mo mold steel by electron beam irradiation. *Vacuum*. 143. pp. 283–287. DOI: 10.1016/j.vacuum.2017.06.010.
6. Alontseva D.L., Krasavin A.L., Pogrebnyak A.D., Rakhmetullina S.Zh., Rusakova A.V. (2013) Modifikatsiya elektronnykh oblucheniem strukturno-fazovogo sostoyaniya i svoystv plazmenno-detonatsionnykh pokrytiy na osnove Ni-Cr [Modification by e-beam irradiation of structure-phase composition and properties of plasma detonation coatings]. *Perspektivnye materialy – Journal of Advanced Materials*. 1. pp. 5–12.
7. Laskovnev A.P., Ivanov Yu.F., Petrikova E.A. et al (2013) *Modifikatsiya struktury i svoystv evtekticheskogo silumina elektronno-ionno-plazmennoy obrabotkoy* [Modification of the structure and properties of eutectic silumin by electron-ion-plasma processing]. Minsk: Belarus. navuka.
8. Smolin A.Yu., Eremina G.M. (2017) Chislennoe issledovanie vliyaniya materiala podlozhki na deformirovaniye i razrusheniye sistemy «pokrytie-podlozhka» [Numerical study of the influence of substrate material on deformation and fracture of the coating – substrate system]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 48. pp. 91–106. DOI: 10.17223/19988621/48/9.
9. Smolin A.Yu., Anikeeva G.M., Shil'ko E.V., Psakh'e S.G. (2013) Modelirovaniye deformatsii nanostrukturnykh pokrytiy na titanovoy podlozhke pri nanoindentirovaniy [Modeling deformation of nanostructured coatings on a titanium substrate under nanoindentation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(24). pp. 111–125.
10. Stepanova E.N., Grabovetskaya G.P., Teresov A.D., Mishin I.P. (2018) Evolyutsiya struktury i spektra razorientirovok granits zeren submikrokristallicheskogo molibdena pri obluchenii impul'snym elektronnykh puchkom [Evolution of the structure and spectrum of disordered grain boundaries of the submicrocrystalline molybdenum under irradiation by a pulsed electron beam]. *Izv. Vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 1. pp. 3–8.
11. Boyko V.I., Evstigneev V.V. (1988) *Vvedenie v fiziku vzaimodeystviya sil'notochnykh puchkov zaryazhennykh chastits s veshchestvom* [Introduction to physics of interaction between high-current beam of charged particles and matter]. Moscow: Energoatomizdat.
12. Boyko V.I., Skvortsov V.A., Fortov V.E., Shamanin I.V. (2003) *Vzaimodeystvie impul'snykh puchkov zaryazhennykh chastits s veshchestvom* [Interaction of pulsed beams of charged particles with matter]. Moscow: Fizmatlit.
13. Boyko V.I., Daneykin Yu.V., Khadkevich A.V., Yushitsin K.V. (2007) Influence of generation mechanisms on pulse profile of mechanical stress in metal target under the action of power ion beams. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 310(2). pp. 82–88.
14. Amirkhanov I.V., Puzinin I.V., Puzinina T.P., Sarkhadov I. (2013) Issledovanie termouprugikh effektiv v metallakh v ramkakh modifitsirovannoy modeli termicheskogo pika [Investigation of thermoelastic effects in metals in the frame of the modified thermal spike model]. *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika – RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*. 2. pp. 77–84.
15. Amirkhanov I.V., Didyk A.Yu., Muzafarov D.Z., et al. (2010) Model'noye opisanie termouprugikh napryazheniy v materialakh pri obluchenii tyazhelyimi ionami vysokikh energiy [Model description of thermoelastic tensions in materials exposed to high energy heavy ions]. *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika – RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*. 2(3). pp. 68–71.
16. Boyko V.I., Daneykin Yu.V., Pimenov E.Yu., Lisov V.I. (2014) Kharakteristiki udarnovolnovogo vozmushcheniya v metallakh pri obluchenii ionnymi puchkami [characteristics of a shock wave perturbation in metals irradiated by ion beams]. *Izv. Vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 57(11/2). pp. 151–156.

17. Leyvi A.Ya., Talala K.A., Krasnikov V.S., Yalovets A.P. (2016) Modifikatsiya svoystv konstruksionnykh materialov intensivnymi potokami zaryazhennykh chastits i plazmy [Modification of the constructional material with the intensive charged particle beams and plasma flows]. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Mashinostroenie» – Bulletin of SUSU, Series “Mechanical engineering industry”*. 16(1). pp. 28–55. DOI: 10.14529/engin160103.
18. Volkov N.B., Maier A.E., Yalovec A.P. (2002) On the mechanism of cratering on solid surfaces exposed to an intense charged particle beam. *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*. 47(8). pp. 968–977.
19. Chepak-Gizbrekht M., Knyazeva A.G. (2014) stress evaluation in the surface layer at the condition of particle beam. *Advanced Materials Research*. 880. pp 259–264. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.880.259.
20. Kryukova O.N., Knyazeva A.G., Maslov A.L. (2016) Modeling of phase evolution in coated titanium nikelide under irreversible action of electron beam. *AIP Conference Proceedings*. 1783(020119). DOI: 10.1063/1.4966412.
21. Sorokova S.N., Knyazeva A.G. (2013) Solid phase synthesis of coating on the base under the electron beam surfacing. *Applied Mechanics and Materials*. 379. pp. 60–65. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.379.60.
22. Ivanov Yu.F., Petrikova E.A., Ivanova O.V., Ikonnikova I.A., Teresov A.D., Shugurov V.V., Krysina O.V. (2015) Modifikatsiya intensivnym impul'snym elektronnym puchkom sistemy pokrytie (TiN) – podlozhka (VT1-0) [Modification by an intense pulsed electron beam of the coating system (TiN) – base (BT1-0)]. *Izv. Vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 58(3). pp.75–81.
23. Demidov V.N., Knyazeva A.G., Ilina E.S. (2012) Osobennosti modelirovaniya diffuzionnykh protsessov v uprugom tele pri ego poverkhnostnoy modifikatsii chastitsami [The modeling features of diffusion processes in an elastic body during the surface treatment of particles]. *Vestnik PNIPU. Mehanika. Sbornik «Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov» – PNRPU Mechanics Bulletin*. 3. pp. 25–49.
24. Kryukova O.N., Chepak-Gizbrekht M.V. (2015) Thermal activated elements redistribution between two-component coating and substrate. *Key Engineering Materials*. 685. pp. 200–205. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.200.
25. Parfenova E.S. (2017) The mathematical modeling of the initial stage of ion implantation into the target with coating. *Key Engineering Materials*. 743. pp. 138–141. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.743.138.
26. Knyazeva A.G. (2011) Nelineynye modeli deformiruemykh sred s diffuziey [Nonlinear models of deformable media with diffusion]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 14(6). pp. 35–51.
27. Sherief H.H., Hamza F., Saleh H. (2004) The theory of generalized thermoelastic diffusion. *Int. J. Eng. Sci.* 42. pp. 591–608.
28. Aouadi M. (2008) Generalized theory of thermoelastic diffusion for anisotropic media. *J. Thermal Stresses*. 31. pp. 1–16.
29. Knyazeva A.G. (2005) Diffuziya i reologiya v lokal'no-ravnovesnoy termodinamike [Diffusion and rheology in locally-equilibrium thermodynamics]. *Vestnik PNIPU. Sbornik «Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov»– PNRPU Mechanics Bulletin*. 13. pp. 45–60.
30. Babichev N.A., et al. (1991) *Fizicheskie velichiny: spravochnik* [Physical Values: Handbook]. Moscow: Energoatomizdat.