УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/44/1

В.В. Домбровский, Т.Ю. Пашинская

ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С МАРКОВСКИМИ СКАЧКАМИ И АВТОРЕГРЕССИОННЫМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ШУМОМ С МАРКОВСКИМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ РЕЖИМОВ

Рассматривается задача управления с прогнозированием по квадратичному критерию для класса дискретных стохастических систем с марковскими скачками и мультипликативным шумом, описываемым векторной авторегрессионной моделью с марковским переключением режимов, при ограничениях на управляющие воздействия. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии сводится к решению последовательности задач квадратичного программирования.

Ключевые слова: стохастические системы; марковские скачки; авторегрессионный мультипликативный шум; прогнозирующее управление; ограничения.

Системы с марковскими скачкообразными параметрами нашли широкое признание и применение в практике управления многими реальными процессами [1]. Примерами могут служить сложные производственно-технологические, энергетические и технические системы. Эффективным подходом к решению задач управления такими системами при ограничениях на состояния и / или управления является метод управления с прогнозирующей моделью [2]. Прогнозирующее управление дискретными линейными системами с марковскими переключениями режимов рассматривалось в работах [3–8]. Метод управления с прогнозированием нелинейными системами с марковским переключением режимов, основанный на генерации сценариев, рассматривался в [9]. Отметим, что сценарный подход требует значительных вычислительных затрат. В работе [10] рассматривается задача управления с прогнозированием для класса нелинейных систем с марковскими скачками при ограничениях на управления. В [10] предполагается, что нелинейное слагаемое зависит от состояния, управления и последовательности независимых шумов и описывается статистическими характеристиками.

В данной работе рассматривается класс дискретных стохастических систем с марковскими скачками и мультипликативным шумом, описываемым векторной авторегрессионной моделью с марковским переключением режимов (MSVAR, [11]). Синтезированы стратегии управления с прогнозированием по квадратичному критерию при ограничениях на управляющие переменные. Алгоритм синтеза сводится к решению последовательности задач квадратичного программирования.

1. Постановка задачи

Пусть объект управления описывается уравнениями

$$x_{k+1} = A[\theta_{k+1}]x_k + B[\theta_{k+1}, y_{k+1}]u_k, \quad (1)$$

$$y_{k+1} = \alpha[\theta_{k+1}]y_k + \beta[\theta_{k+1}] + \sigma[\theta_{k+1}]w_{k+1}, \quad (2)$$

$$A[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} A^i, A^i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad (3)$$

$$\alpha[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} \alpha^i, \beta[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} \beta^i, \sigma[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} \sigma^i; \alpha^i, \sigma^i \in \mathbb{R}^{q \times q}, \beta^i \in \mathbb{R}^q, \quad (4)$$

$$B[\theta_{k+1}, y_{k+1}] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k+1} (B^i[\alpha^i y_k] + B^i[\beta^i] + B^i[\sigma^i w_{k+1}]), B^i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}, \quad (5)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления, $y_k \in \mathbb{R}^q$ – последовательность случайных векторов, $w_k \in \mathbb{R}^q$ – вектор белых шумов с нулевым средним и единичной матрицей ковариации, $\theta_{i,k+1}, i = \overline{1, v}$ – компонента вектора θ_{k+1} , $\theta_k = [\delta(\tau_k, 1), \dots, \delta(\tau_k, v)]^T$, где $\delta(\tau_k, j)$ – функция Кронекера, τ_k ($k = 0, 1, 2, \dots, v$) – однородная дискретная марковская цепь с конечным множеством состояний $\{1, 2, \dots, v\}$, известной матрицей переходных вероятностей $P = [P_{ij}]$ и известным начальным распределением. Матрица B зависит от y_k линейно. Предполагается, что векторы x_k, y_k , а также состояние марковской цепи в момент времени k доступны наблюдению. Последовательности w_k и θ_k независимы.

Дискретная марковская цепь с конечным множеством состояний $\{1, 2, \dots, v\}$ и матрицей переходных вероятностей P допускает следующее представление в пространстве состояний [12]:

$$\theta_{k+1} = P\theta_k + v_{k+1}, \quad (6)$$

где $\{v_k\}$ – последовательность мартингал-разностей с условными моментами

$$E\{v_{k+1} | \theta_k\} = 0, \quad (7)$$

$$E\{v_{k+1} v_{k+1}^T | \theta_k\} = \text{diag}\{P\theta_k\} - P \text{diag}\{\theta_k\}.$$

На управляющие воздействия наложены ограничения:

$$u_k^{\min} \leq S_k u_k \leq u_k^{\max}, \quad (8)$$

где $S_k \in \mathbb{R}^{p \times n_u}$, $u_k^{\min}, u_k^{\max} \in \mathbb{R}^p$.

Для решения сформулированной задачи используем методологию управления с прогнозирующей моделью. Данный подход позволяет получить стратегии управления с обратной связью с учетом явных ограничений на управляющие воздействия. Стратегии управления с прогнозированием определяются по следующему правилу. На каждом шаге k минимизируем функционал со скользящим горизонтом управления

$$J_{k+m|k} = E\left\{\sum_{i=1}^m x_{k+i}^T R_{k+i}^1 x_{k+i} + u_{k+i-1|k}^T R_{k+i-1} u_{k+i-1|k} \mid x_k, \theta_k, y_k\right\} \quad (9)$$

на траекториях системы (1)–(6) по последовательности прогнозирующих управлений $u_{k|k}, \dots, u_{k+m-1|k}$, зависящих от состояния системы в момент времени k , при ограничениях (8), где m – горизонт прогноза, k – текущий момент времени, $R_{k+i}^1 \geq 0, R_{k+i-1} > 0$ – весовые матрицы соответствующих размерностей. В качестве управления в момент времени k берем $u_k = u_{k|k}$. Тем самым получаем управление u_k как функцию векторов x_k, y_k и состояния марковской цепи θ_k , т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление u_{k+1} на следующем шаге, процедура повторяется для следующего момента $k+1$ и т.д.

2. Синтез стратегий прогнозирующего управления

Рассмотрим задачу минимизации критерия (9) по последовательности прогнозирующих управлений $u_{k|k}, \dots, u_{k+m-1|k}$, при ограничениях (8).

Теорема. Вектор прогнозирующих управлений $U_k = [u_{k|k}^T, \dots, u_{k+m-1|k}^T]^T$, минимизирующий критерий (9) при ограничениях вида (8), на каждом шаге k определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида:

$$Y_{k+m|k} = 2x_k^T G_k U_k + U_k^T H_k U_k,$$

при ограничениях

$$U_k^{\min} \leq \bar{S}_k U_k \leq U_k^{\max}. \quad (10)$$

Оптимальное управление равно

$$u_k = \begin{bmatrix} I_{n_u} & 0_{n_u} & \dots & 0_{n_u} \end{bmatrix} U_k,$$

где

$$\bar{S}_k = \text{diag}(S_k, \dots, S_{k+m-1}),$$

$$U_k^{\min} = \left[\left(u_k^{\min} \right)^T, \dots, \left(u_{k+m-1}^{\min} \right)^T \right], \quad U_k^{\max} = \left[\left(u_k^{\max} \right)^T, \dots, \left(u_{k+m-1}^{\max} \right)^T \right],$$

I_{n_u} – единичная матрица размерности n_u , 0_{n_u} – квадратная нулевая матрица размерности n_u , H_k, G_k – блочные матрицы, блоки которых равны:

$$\begin{aligned} H_{tt,k} = & R_{k+t-1} + \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k]^T Q_k^{(i_1, \dots, i_t)} \left(B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k] + 2 \sum_{j=1}^t B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] \right) + \\ & + \sum_{j=1}^t \sum_{l=1}^t \sum_{i_{\min(j,l)}=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}]^T Q_k^{(i_{\min(j,l)}, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] + \\ & + \sum_{j=1}^t \sum_{i_j=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v E \left\{ B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}]^T Q_k^{(i_j, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} H_{tf,k} = & \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_1} y_k]^T (A^{i_{t+1}})^T \dots (A^{i_f})^T Q_k^{(i_1, \dots, i_f)} \left(B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_1} y_k] + \sum_{j=1}^f B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] \right) + \\ & + \sum_{j=1}^t \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}]^T (A^{i_{t+1}})^T \dots (A^{i_f})^T Q_k^{(i_1, \dots, i_f)} B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] + \\ & + \sum_{j=1}^t \sum_{l=1}^f \sum_{i_{\min(j,l)}=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}]^T (A^{i_{t+1}})^T \dots (A^{i_f})^T Q_k^{(i_{\min(j,l)}, \dots, i_f)} B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] + \\ & + \sum_{j=1}^t \sum_{i_j=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v E \left\{ B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}]^T (A^{i_{t+1}})^T \dots (A^{i_f})^T Q_k^{(i_j, \dots, i_f)} B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} G_{t,k} = & \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v (A^{i_1})^T \dots (A^{i_t})^T Q_k^{(i_1, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k] + \\ & + \sum_{j=1}^t \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v (A^{i_1})^T \dots (A^{i_t})^T Q_k^{(i_1, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}]. \end{aligned} \quad (13)$$

Последовательность матриц $Q_k^{(i_1, \dots, i_f)}$ ($t, f = \overline{1, m}$) определяется рекуррентными уравнениями

$$Q_k^{(i_1, \dots, i_f)} = \Theta_k^{(i_1, \dots, i_f)} R_{k+f}^1 + \sum_{i_{f+1}=1}^v (A^{i_{f+1}})^T Q_k^{(i_1, \dots, i_{f+1})} A^{i_{f+1}}, t = \overline{1, m-2}, f > t, \quad (14)$$

$$Q_k^{(i_t)} = L_{i_t} P^t \theta_k R_{k+t}^1 + \sum_{i_{t+1}=1}^v (A^{i_{t+1}})^T Q_k^{(i_t, i_{t+1})} A^{i_{t+1}}, t = \overline{1, m-1}, \quad (15)$$

$$Q_k^{(i_m)} = L_{i_m} P^m \theta_k R_{k+m}^1, \quad (16)$$

с граничными условиями:

$$Q_k^{(i_1, \dots, i_m)} = \Theta_k^{(i_1, \dots, i_m)} R_{k+m}^1, t = \overline{1, m-1}, \quad (17)$$

где

$$\Theta_k^{(i_1, \dots, i_f)} = P_{i_f, i_{f-1}} P_{i_{f-1}, i_{f-2}} \dots P_{i_{t+1}, i_t} \theta_{i_t, (k+t|k)}, t = \overline{1, m-1}, f > t, \quad (18)$$

$\theta_{i_t, (k+t|k)}$ – компонента вектора $\theta_{k+t|k} = P^t \theta_k$, $L_{i_t} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]_{l \times v}$, $i_t = \overline{1, v}$; $t = \overline{1, m}$.

Доказательство. Критерий (9) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} J_{k+m|k} = & E \{ x_{k+1}^T R_{k+1}^1 x_{k+1} + u_{k|k}^T R_k u_{k|k} + E \{ x_{k+2}^T R_{k+2}^1 x_{k+2} + u_{k+1|k}^T R_{k+1} u_{k+1|k} + \\ & + \dots + E \{ x_{k+m}^T R_{k+m}^1 x_{k+m} + u_{k+m-1|k}^T R_{k+m-1} u_{k+m-1|k} \mid x_{k+m-1}, y_{k+m-1}, \theta_{k+m-1} \} \dots \mid x_{k+1}, y_{k+1}, \theta_{k+1} \mid x_k, y_k, \theta_k \}. \end{aligned} \quad (19)$$

Выражая x_{k+m} через x_{k+m-1} с использованием (1)–(5), получим:

$$x_{k+m} = \sum_{i_m=1}^v \theta_{i_m, k+m} \left(A^{i_m} x_{k+m-1} + B^{i_m} [\alpha^{i_m} y_{k+m-1}] u_{k+m-1} + B^{i_m} [\beta^{i_m}] u_{k+m-1} + B^{i_m} [\sigma^{i_m} w_{k+m}] u_{k+m-1} \right). \quad (20)$$

Вычисляя последовательно операторы математического ожидания в выражении (19) с использованием уравнений (20) и (6), получим

$$\begin{aligned}
 J_{k+m|k} = & x_k^T \sum_{i_1=1}^v \left(A^{i_1} \right)^T Q_k^{(i_1)} A^{i_1} x_k + 2x_k^T \sum_{t=1}^m \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v \left(A^{i_1} \right)^T \dots \left(A^{i_t} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k] u_{k+t-1|k} + \\
 & + 2x_k^T \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^t \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v \left(A^{i_1} \right)^T \dots \left(A^{i_t} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] u_{k+t-1|k} + \\
 & + \sum_{t=1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k]^T Q_k^{(i_1, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k] u_{k+t-1|k} + \\
 & + \sum_{t=1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^t \sum_{l=1}^t \sum_{i_{\min(j,l)}=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}]^T Q_k^{(i_{\min(j,l)}, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] u_{k+t-1|k} + \\
 & + 2 \sum_{t=1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^t \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k]^T Q_k^{(i_1, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] u_{k+t-1|k} + \\
 & + \sum_{t=1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^t \sum_{i_j=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v E \left\{ B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}]^T Q_k^{(i_j, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}] \right\} u_{k+t-1|k} + \\
 & + 2 \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{f=t+1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_1} y_k]^T \left(A^{i_{f+1}} \right)^T \dots \left(A^{i_f} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_f)}(k) B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_1} y_k] u_{k+f-1|k} + \\
 & + 2 \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{f=t+1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^f \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_1} y_k]^T \left(A^{i_{f+1}} \right)^T \dots \left(A^{i_f} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_f)} B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] u_{k+f-1|k} + \\
 & + 2 \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{f=t+1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^f \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}]^T \left(A^{i_{f+1}} \right)^T \dots \left(A^{i_f} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_f)} B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_1} y_k] u_{k+f-1|k} + \\
 & + 2 \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{f=t+1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^f \sum_{l=1}^f \sum_{i_{\min(j,l)}=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}]^T \left(A^{i_{f+1}} \right)^T \dots \left(A^{i_f} \right)^T Q_k^{(i_{\min(j,l)}, \dots, i_f)} B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] u_{k+f-1|k} + \\
 & + 2 \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{f=t+1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^f \sum_{i_j=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v E \left\{ B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}]^T \left(A^{i_{f+1}} \right)^T \dots \left(A^{i_f} \right)^T \times \right. \\
 & \left. \times Q_k^{(i_j, \dots, i_f)} B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}] \right\} u_{k+f-1|k} + \sum_{t=1}^m u_{k+t-1|k}^T R_{k+t-1} u_{k+t-1|k}.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Последовательности матриц $Q_k^{(i_1, \dots, i_f)}, (t, f = \overline{1, m})$ определяются рекуррентными уравнениями (14)–(18).

Выражение (21) можно записать в матричной форме:

$$J_{k+m|k} = x_k^T \sum_{i_1=1}^v \left(A^{i_1} \right)^T Q_k^{(i_1)} A^{i_1} x_k + 2x_k^T G_k U_k + U_k^T H_k U_k, \tag{22}$$

где G_k, H_k имеют вид (11)–(13).

Таким образом, имеем задачу минимизации критерия (22) при ограничениях (10), которая эквивалентна задаче квадратичного программирования с критерием (9) при ограничениях (8).

Заключение

В работе предложен метод синтеза стратегий прогнозирующего управления по квадратичному критерию для класса дискретных систем с марковскими скачками и авторегрессионным мультипликативным шумом с переключающимися режимами. Данный подход позволяет в явном виде учесть ограничения на управления. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии включает решение последовательности задач квадратичного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Costa O.L.V., Fragoso M.D., Marques R.P. Discrete-time Markov jump linear systems. New York : Springer, 2005. 286 p.
2. Mayne D.Q. Model predictive control: Recent developments and future promise // Automatica. 2014. V. 50, No. 12. P. 2967–2986.
3. Henandez-Medjias M.A., Sala A., Querol A., Arino C. Multiple-Horizon predictive control for Markov/switched linear systems // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48, No. 23. P. 230–235.
4. Tonne J., Jilg M., Stursberg O. Constrained Model Predictive Control of High Dimensional Jump Markov Linear Systems // American Control Conference. Palmer House Hilton. July 1–3, Chicago, IL, USA, 2015. P. 2993–2998.
5. Dombrovskii V.V., Obyedko T.Yu. Predictive control of systems with Markovian jumps under constraints and its application to the investment portfolio optimization // Automation and remote control. 2011. V. 72, No. 5. P. 989–1003.
6. Chitraganti S., Aberkane S., Aubrun C., Valencia-Palomo G., Dragan V. On control of discrete-time state-dependent jump linear systems with probabilistic constraints: a receding horizon approach // Systems & Control Letters. 2014. V. 74. P. 81–89.
7. Lu J, Xi Y, Li D. Stochastic model predictive control for probabilistically constrained Markovian jump linear systems with additive disturbance // Int. J Robust Nonlinear Control. 2017. P. 1–15.
8. Sala A., Henandez-Medjias M.A., Arino C. Stable receding-horizon scenario predictive control for Markov-jump linear systems // Automatica. 2017. V. 86. P. 121–128.
9. Patrinos P., Soparaskis P., Sarimveis H., Bemporad A. Stochastic model predictive control for constrained discrete-time Markovian switching systems // Automatica. 2014. V. 50, No. 10. P. 2504–2514.
10. Dombrovskii V.V., Obyedko T.Yu., Samorodova M. Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions // Automatica. 2018. V. 87, No. 1. P. 61–68.
11. Krolzig H.-M. Markov Switching Vector Autoregressions. Modelling, Statistical Inference and Application to Business Cycle Analysis. Berlin : Springer, 1997. 357 p.
12. Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B. Hidden Markov models: Estimation and control. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1995. 382 p.

Поступила в редакцию 28 января 2018 г.

Dombrovskii V.V., Pashinskaya T.Yu. (2018) PREDICTIVE CONTROL FOR MARKOV JUMP SYSTEMS WITH MARKOV SWITCHING AUTOREGRESSIVE MULTIPLICATIVE NOISE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 4–9

DOI: 10.17223/19988605/44/1

Assume that the plant to be controlled can be described by the following model

$$x_{k+1} = A[\theta_{k+1}]x_k + B[\theta_{k+1}, y_{k+1}]u_k, \quad (1)$$

$$y_{k+1} = \alpha[\theta_{k+1}]y_k + \beta[\theta_{k+1}] + \sigma[\theta_{k+1}]w_{k+1}, \quad (2)$$

$$A[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} A^i, A^i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad (3)$$

$$\alpha[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} \alpha^i, \beta[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} \beta^i, \sigma[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} \sigma^i; \alpha^i, \sigma^i \in \mathbb{R}^{q \times q}, \beta^i \in \mathbb{R}^q, \quad (4)$$

$$B[\theta_{k+1}, y_{k+1}] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k+1} \left(B^i[\alpha^i y_k] + \bar{B}^i[\beta^i] + B^i[\sigma^i w_{k+1}] \right), B^i, \bar{B}^i, B^i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}, \quad (5)$$

where $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ is the vector of states, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ is the vector of control inputs, $y_k \in \mathbb{R}^q$ is a sequence of stochastic vectors, $w_k \in \mathbb{R}^q$ is a zero mean independent random sequence; $\theta_{i,k+1}$ ($i = \overline{1, v}$) are the components of the vector θ_{k+1} , $\theta_k = [\delta(\tau_k, 1), \dots, \delta(\tau_k, v)]^T$, $\delta(\tau_k, j)$ is a Kronecker function; $\{\tau_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$ is a finite-state discrete-time homogeneous Markov chain taking values in $\{1, 2, \dots, v\}$ with transition probability matrix $P = [P_{ij}]$. All of the elements of matrix B are assumed to be linear functions of vector y .

We impose the following inequality constraints on the control inputs (element-wise inequality):

$$u_k^{\min} \leq S_k u_k \leq u_k^{\max}, \quad (6)$$

where $S_k \in \mathbb{R}^{p \times n_u}$, $u_k^{\min}, u_k^{\max} \in \mathbb{R}^p$.

For control of system (1)–(5) we synthesize the strategies with a predictive control model. At each step k we minimize the quadratic criterion with a receding horizon

$$J_{k+m|k} = E \left\{ \sum_{i=1}^m x_{k+i}^T R_{k+i}^1 x_{k+i} + u_{k+i-1|k}^T R_{k+i-1|k} u_{k+i-1|k} \mid x_k, \theta_k, y_k \right\},$$

on trajectories of system (1) over the sequence of predictive controls $u_{k|k}, \dots, u_{k+m-1|k}$ dependent on information up to time k , under constraints (6), where $R_{k+i}^1 \geq 0, R_{k+i-1}^1 > 0$ are given symmetric weight matrices of corresponding dimensions; m is the prediction horizon, k is the current moment. The synthesis of predictive control strategies is reduced to the sequence of quadratic programming tasks.

Keywords: stochastic systems; Markov jumps; autoregressive multiplicative noise; model predictive control; constraints.

DOMBROVSKII Vladimir Valentinovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).

E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

PASHINSKAYA Tatiana Yurievna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, National Research Tomsk State University, Russian Federation).

E-mail: tatyana.obedko@mail.ru

REFERENCES

1. Costa, O.L.V., Fragoso, M.D. & Marques, R.P. (2005) *Discrete-time Markov jump linear systems*. Springer: New York.
2. Mayne, D.Q. (2014) Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*. 50(12). pp. 2967–2986. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.10.128
3. Henandez-Medjias, M.A., Sala, A., Querol, A. & Arino, C. (2015) Multiple-Horizon predictive control for Markov/switched linear systems. *IFAC-PapersOnLine*. 48(23). pp. 230–235. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.11.288
4. Tonne, J., Jilg, M. & Stursberg, O. (2015) Constrained Model Predictive Control of High Dimensional Jump Markov Linear Systems. *American Control Conference*. Palmer House Hilton. July 1–3, 2015. Chicago, IL, USA. pp. 2993–2998. DOI: 10.1109/ACC.2015.7171190
5. Dombrovskii, V.V. & Obedko, T.Yu. (2011) Predictive control of systems with Markovian jumps under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 72(5). pp. 989–1003. DOI: 10.1134/S0005117911050079
6. Chitraganti, S., Aberkane, S., Aubrun, C., Valencia-Palomo, G. & Dragan, V. (2014) On control of discrete-time state-dependent jump linear systems with probabilistic constraints: A receding horizon approach. *Systems & Control Letters*. 74. pp. 81–89. DOI: 10.1016/j.sysconle.2014.10.008
7. Lu J, Xi Y & Li D. (2017) Stochastic model predictive control for probabilistically constrained Markovian jump linear systems with additive disturbance. *International Journal of Robust Nonlinear Control*. pp. 1–15. DOI: 10.1002/rnc.3971
8. Sala, A., Henandez-Medjias, M.A. & Arino, C. (2017) Stable receding-horizon scenario predictive control for Markov-jump linear systems. *Automatica*. 86. pp. 121–128. DOI: 10.1016/j.automatica.2017.07.032
9. Patrinos, P., Soparasakis, P., Sarimveis, H. & Bemporad, A. (2014) Stochastic model predictive control for constrained discrete-time Markovian switching systems. *Automatica*. 50(10). pp. 2504–2514. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.08.031
10. Dombrovskii, V.V., Obyedko, T.Yu. & Samorodova, M. (2018) Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions. *Automatica*. 87(1). pp. 61–68. DOI: 10.1016/j.automatica.2017.09.018
11. Krolzig, H.-M. (1997) *Markov Switching Vector Autoregressions. Modelling, Statistical Inference and Application to Business Cycle Analysis*. Berlin: Springer.
12. Elliott, R.J., Aggoun, L. & Moore, J.B. (1995) *Hidden Markov models: Estimation and control*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.