ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/44/4

К.С. Ким, В.И. Смагин

РОБАСТНАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ СКАЧКООБРАЗНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И НЕИЗВЕСТНЫМ ВХОДОМ

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ № 17-08-00920.

Рассматривается алгоритм синтеза робастного экстраполятора, определяющего оценку вектора состояния дискретной линейной системы со случайными скачкообразными параметрами, описываемыми цепью Маркова с конечным числом состояний. Коэффициенты передачи экстраполятора предлагается выбирать из условия минимума суммы квадратичных форм ошибок экстраполяции, осуществляя при этом усреднение по вероятностям состояния скачкообразного параметра, с использованием алгоритмов рекуррентного оценивания с неизвестным входом.

Ключевые слова: дискретная модель; квадратичный критерий; робастная экстраполяция; скачкообразные параметры; неизвестный вход.

Задачи построения оценок и синтеза управлений для объектов с непрерывным временем и параметрами со скачками рассматривались в работах [1–4]. Подобные проблемы изучались для дискретных систем в работах [5–9]. В настоящей работе рассмотрена задача синтеза робастного экстраполятора для дискретного объекта со случайными скачкообразными параметрами с конечным числом состояний. Решены задачи синтеза стационарного экстраполятора, а также синтеза нестационарного экстраполятора для конечного интервала при точной диагностике скачкообразного параметра и при диагностике с ошибками.

1. Постановка задачи

Пусть модель объекта описывается разностным уравнением:

$$x(k+1) = A_\gamma x(k) + U_\gamma(k) + f(k) + q_\gamma(k), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^m$ – вектор состояния, γ – марковская цепь с n состояниями $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$; $U_\gamma(k)$ – известный вход; $f(k)$ – неизвестный вход; x_0 – случайный вектор (предполагаются известными дисперсии $N_{0,i} = M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T / \gamma = \gamma_i\}$, $i = \overline{1, n}$ и математическое ожидание $\bar{x}_0 = M\{x_0\}$); A_γ – заданная матрица; $q_\gamma(k)$ – вектор случайных возмущений со следующими характеристиками: $M\{q_\gamma(k)\} = 0$, $M\{q_\gamma(k)q_\gamma^T(k)\} = Q_\gamma \delta_{kj}$ ($M\{\cdot\}$ – математическое ожидание, δ_{kj} – символ Кронекера).

Канал наблюдений имеет вид:

$$y(k) = S_\gamma x(k) + v_\gamma(k), \quad (2)$$

где $v_\gamma(k)$ – вектор случайных ошибок наблюдений, независимый от $q_\gamma(k)$, с характеристиками: $M\{v_\gamma(k)\} = 0$, $M\{v_\gamma(k)v_\gamma^T(k)\} = V_\gamma \delta_{kj}$.

Вероятность $p_i(k) = P\{\gamma(k) = i\}$, $i = \overline{1, n}$ удовлетворяет уравнению

$$p_i(k+1) = \sum_{j=1}^n p_{ij} \cdot p_j(k), \quad p_i(0) = p_{i,0}, \quad (3)$$

где p_{ij} – вероятность перехода из состояния i в состояние j за один такт времени, $p_{i,0}$ – начальная вероятность i -го состояния.

По информации, поступившей в момент k , требуется найти оценку состояния прогноза $\hat{x}(k+1)$ на основе минимизации следующего критерия:

$$J[0;T_f] = M \left\{ \left[\sum_{k=0}^{T_f} \sum_{i=1}^n p_i(k) e^T(k) R_i(k) e(k) + \sum_{i=1}^n p_i(T_f) e^T(T_f) L_i(T_f) e(T_f) \right] / \gamma(0) = \gamma_0 \right\}, \quad (4)$$

где $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, $R_i(k) > 0$ и $L_i(T_f) > 0$ – весовые матрицы, γ_0 – начальное значение переменной γ .

Задача экстраполяции рассматривается, когда значение γ идентифицируется точно и с ошибками.

2. Синтез оптимального экстраполятора для конечного интервала

Для построения оценки будем использовать экстраполятор Калмана

$$\hat{x}(k+1) = A_\gamma \hat{x}(k) + U(k) + \hat{f}(k) + K(k)(y(k) - S_\gamma \hat{x}(k)), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (5)$$

где $K(k)$ – матрица коэффициентов передачи экстраполятора, зависящая от k и не зависящая от $\gamma(k)$.

Введем обозначения для матриц $Q_\gamma, V_\gamma, R_\gamma, N_\gamma, L_\gamma, A_\gamma, S_\gamma$ при $\gamma = \gamma_i: Q_i, V_i, R_i, N_i, L_i, A_i, S_i$, соответственно ($i = \overline{1, n}$).

Теорема. Пусть существуют положительно определенные матрицы N_i и L_i , являющиеся решением двухточечной краевой задачи:

$$N_i(k+1) = (A_i - K(k)S_i) \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k) \right) (A_i - K(k)S_i)^T + Q_i + K(k)V_i K(k)^T, \quad N_i(0) = N_0. \quad (6)$$

$$L_i(k) = (A_i - K(k)S_i)^T \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} L_j(k+1) \right) (A_i - K(k)S_i) + R_i, \quad L_i(T_f) = L_{T,i}. \quad (7)$$

Тогда вектор $\text{ct}(K(k))$, составленный из строк матрицы $K(k)$, определится по формуле

$$\begin{aligned} \text{ct}(K(k)) = & \left(\sum_{i=1}^n p_i(k+1) [L_i(k+1) \otimes S_i \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k) \right) S_i^T + L_i(k+1) \otimes V_i] \right)^{-1} \times \\ & \times \text{ct} \left(\sum_{i=1}^n p_i(k+1) L_i(k+1) A_i \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k) \right) S_i^T \right). \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) $\otimes$ – операция кронекеровского произведения.

Доказательство. Представим критерий (3) в виде суммы

$$J[0;T_f] = \sum_{i=1}^n J_i[k;T_f], \quad k = \overline{0, T_f}. \quad (9)$$

В (9) $J_i[k;T_f]$ определяются по формуле

$$J_i[k;T_f] = \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr} p_i(\xi) N_i(\xi) R_i(\xi) + \text{tr} p_i(T_f) N_i(T_f) L_i(T_f), \quad (10)$$

где tr – след матрицы.

Введем функцию Ляпунова следующего вида:

$$W(k, N_i(k)) = \text{tr} p_i(k) N_i R_i(k) + \text{tr} \sum_{t=k}^{T_f} p_i(t) \bar{\Psi}_i(t) L_i(t), \quad (11)$$

где $L_i(t)$ – удовлетворяет (7), $\bar{\Psi}_i(t) = Q_i + K(t)V_i K(t)^T + \Psi_i(t)$ (здесь $\Psi_i(t)$ – некоторая положительно определенная матрица).

Просуммируем по $k = \overline{t, T_f - 1}$ конечные разности функции $W(k, N_i(k))$, учитывая формулу (7):

$$\begin{aligned} \sum_{k=t}^{T_f-1} \Delta W(k, N_i(k)) &= \sum_{k=t}^{T_f-1} [W(k+1, N_i(k+1)) - W(k, N_i(k))] = \\ &= \sum_{k=t}^{T_f-1} \text{tr}[p_i(k+1)N_i(k+1)L_i(k+1) - p_i(k)N_i(k)L_i(k) - p_i(k)\bar{\Psi}_i(k)L_i(k)]. \end{aligned} \quad (12)$$

С другой стороны, данное выражение можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k=t}^{T_f-1} \Delta W(k, N_i(k)) &= W(t+1, N_i(t+1)) - W(t, N_i(t)) + \dots + W(T_f, N_i(T_f)) - W(T_f-1, N_i(T_f-1)) = \\ &= \text{tr } p_i(T_f)N_i(T_f)L_i(T_f) - \text{tr } p_i(t)N_i(t)L_i(t) - \text{tr} \sum_{\xi=t}^{T_f-1} p_i(\xi)\bar{\Psi}_i(\xi)L_i(\xi). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим в формулу (10) разность (12) и, учитывая (13), получим:

$$\begin{aligned} J_i[k; T_f] &= \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi)N_i(\xi)R_i(\xi) + \text{tr } p_i(T_f)N_i(T_f)L_i(T_f) + \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr}[p_i(\xi+1)N_i(\xi+1)L_i(\xi+1) - \\ &\quad - p_i(\xi)N_i(\xi)L_i(\xi) - p_i(\xi)\bar{\Psi}_i(\xi)L_i(\xi)] - [\text{tr } p_i(T_f)N_i(T_f)L_i(T_f) - \text{tr } p_i(k)N_i(k)L_i(k) - \\ &\quad - \text{tr} \sum_{\xi=k}^{T_f-1} p_i(\xi)\bar{\Psi}_i(\xi)L_i(\xi)] = \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi)N_i(\xi)R_i(\xi) + \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi+1)N_i(\xi+1)L_i(\xi+1) - \sum_{\xi=k+1}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi)N_i(\xi)L_i(\xi). \end{aligned} \quad (14)$$

Критерий (10), с учетом (14) и (6), представим в виде:

$$\begin{aligned} J[0; T_f] &= \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi)N_i(\xi)R_i(\xi) - \sum_{\xi=k+1}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi)N_i(\xi)L_i(\xi) + \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi+1) \times \right. \\ &\quad \times [(A_i - K(\xi)S_i)(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))(A_i - K(\xi)S_i)^T + Q_i + K(\xi)V_iK(\xi)^T]L_i(\xi+1) \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя правила дифференцирования функции след tr от произведения матриц:

$$\frac{\partial \text{tr } AXB}{\partial X} = A^T B^T, \quad \frac{\partial \text{tr } A^T X B^T}{\partial X} = BA,$$

вычислим производную по $K(k)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial K(k)} &= \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \sum_{i=1}^n [-L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)A_i(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T - p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)A_i(\sum_{j=1}^n p_{ij}N_j(\xi))S_i^T + \\ &\quad + p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)K(\xi)S_i(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T + L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)K(\xi)S_i(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T + \\ &\quad + p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)K(\xi)V_i + L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)K(\xi)V_i]. \end{aligned} \quad (16)$$

Приравняв эту производную нулю и полагая, что каждое слагаемое суммирования по i равно нулю, получим уравнения для определения матрицы $K(k)$:

$$\begin{aligned} p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)K(\xi)S_i(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T + p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)K(\xi)V_i + L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)K(\xi)S_i \times \\ \times (\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T + L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)K(\xi)V_i = L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)A_i(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T + \\ + p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)A_i(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T. \end{aligned} \quad (17)$$

Запишем аналитическое решение линейного матричного уравнения (17) для вектора $\text{st}(K(k))$ с использованием операции кронекеровского произведения [11], заменив при этом ξ на k :

$$\begin{aligned} \text{ct}(K(k)) = & \left(\sum_{i=1}^n p_i(k+1) [L_i(k+1) \otimes S_i (\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k)) S_i^T + L_i(k+1) \otimes V_i] \right)^{-1} \times \\ & \times \text{ct} \left(\sum_{i=1}^n p_i(k+1) L_i(k+1) A_i (\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k)) S_i^T \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Для нахождения матрицы $K(k)$ необходимо решить с учетом уравнения (18) двухточечную краевую задачу (6) и (7).

Вычислим конечную разность функции Ляпунова:

$$\begin{aligned} \Delta W(k, N_i(k)) &= W(k+1, N_i(k+1)) - W(k, N_i(k)) = \\ &= \text{tr } p_i(k+1) N_i(k) R_\gamma(k+1) + \text{tr} \sum_{t=k+1}^{T_f} p_i(t) [Q_i + K(t) V_i K(t)^T + \Psi_i(t)] L_i(t) - \\ &\quad - \text{tr } p_i(k) N_i(k) R_\gamma(k) - \text{tr} \sum_{t=k}^{T_f} p_i(t) [Q_i + K(t) V_i K(t)^T + \Psi_i(t)] L_i(t) = \\ &= \text{tr } p_i(k+1) N_i(k) R_\gamma(k+1) - \text{tr } p_i(k) N_i(k) R_\gamma(k) - \text{tr } p_i(k) [Q_i + K(k) V_i K(k)^T + \Psi_i(k)] L_i(k). \end{aligned} \quad (19)$$

В силу того, что матрицы N_i , L_i положительно определены по условию теоремы, а матрица $\Psi_i(t) > 0$ задается произвольно, то очевидно, что ее можно подобрать такой, чтобы конечная разность (19) стала отрицательной. Это условие гарантирует устойчивость динамики экстраполятора по Ляпунову.

В качестве алгоритма оценивания неизвестного входа можно использовать различные алгоритмы [12–16]. В частности, при использовании метода МНК оценка $\hat{f}(k)$ может быть построена на основе минимизации следующего критерия:

$$J(f(k)) = \sum_{t=1}^k \left\{ \|y(t) - S_t \hat{x}(t)\|_W^2 + \|f(t-1)\|_{\bar{W}}^2 \right\}, \quad (20)$$

где $W > 0$, $\bar{W} > 0$ – весовые матрицы. Тогда оптимальная оценка неизвестного входа примет вид:

$$\hat{f}(k) = [S_k^T W S_k + \bar{W}]^{-1} S_k^T W \{y(k+1) - S_k (A_k \hat{x}(k) + U(k))\}. \quad (21)$$

3. Синтез стационарного экстраполятора

Рассмотрим задачу синтеза стационарного экстраполятора. В этом случае матрица коэффициентов передачи K будет постоянной, а критерий примет вид:

$$J[0; \infty] = \sum_{i=1}^n \sum_{\xi=k}^{\infty} \text{tr } \bar{p}_i N_i R_i. \quad (22)$$

Двухточечная краевая задача преобразуется в следующую систему матричных уравнений:

$$N_i = (A_i - K S_i) \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j \right) (A_i - K S_i)^T + Q_i + K V_i K^T, \quad (23)$$

$$L_i = (A_i - K S_i)^T \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} L_j \right) (A_i - K S_i) + R_i, \quad (24)$$

$$\text{ct}(K) = \left(\sum_{i=1}^n \bar{p}_i [L_i \otimes S_i (\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j) S_i^T + L_i \otimes V_i] \right)^{-1} \text{ct} \left(\sum_{i=1}^n \bar{p}_i L_i A_i (\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j) S_i^T \right), \quad (25)$$

где $\bar{p}_i$ – установившиеся вероятности (предполагается, что марковская цепь γ является эргодической).

Таким образом, для синтеза стационарного экстраполятора необходимо решить систему матричных уравнений (23)–(25).

Отметим, что если существуют положительно определенные решения N_i, L_i ($i = \overline{1, n}$) матричных уравнений (23)–(25), то из уравнения (24) и условия $R_i > 0$ следует справедливость теоремы 1.6 [17], а это означает выполнение условия стохастической устойчивости стационарного экстраполятора со скачкообразными параметрами.

Для стационарного экстраполятора

$$\hat{x}(k+1) = A_\gamma \hat{x}(k) + U(k) + \hat{f}(k) + K(y(k) - S_\gamma \hat{x}(k)), \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (26)$$

где K определяется из (25), оценка неизвестного входа может быть определена по формуле (21).

4. Экстраполяция при ошибках диагностики состояния параметра γ

Задачу экстраполяции при ошибках в диагностике параметра γ рассмотрим для частного случая, когда матрицы $Q_\gamma, V_\gamma, S_\gamma$ не зависят от скачкообразно изменяющегося параметра γ и в модели отсутствует неизвестный вход:

$$x(k+1) = A_\gamma x(k) + U_\gamma(k) + q(k), x(0) = x_0. \quad (27)$$

Так как в модели (27) отсутствует неизвестный вход, то для оценки $\hat{x}(k+1)$ используем экстраполятор:

$$\hat{x}(k+1) = A_\gamma \hat{x}(k) + U_\gamma(k) + K(k)(y(k) - S_\gamma \hat{x}(k)), \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (28)$$

При ошибках в диагностике, если система (27) находится в i -м состоянии ($\gamma = \gamma_i$), а это состояние идентифицировано ошибочно как j -е ($j \neq i$), будем представлять модель (27) как модель с неизвестным входом:

$$x(k+1) = A_j x(k) + U_j(k) + f(k) + q(k), \quad (29)$$

где $f(k) = (A_i - A_j)x(k) + (U_i - U_j)$ является вектором неизвестного входа, так как i -е истинное состояние системы неизвестно. Для определения оценки в этом случае воспользуемся экстраполятором:

$$\hat{x}(k+1) = A_j \hat{x}(k) + U_j(k) + \hat{f}(k) + K(k)(y(k) - S \hat{x}(k)). \quad (30)$$

В (28) и (30) матрица $K(k)$ вычисляется так же, как и в разделе 3. Здесь может быть использован также постоянный коэффициент передачи K в соответствии с уравнениями (23)–(25), оценка $\hat{f}(k)$ в (30) может быть вычислена по формуле (21).

5. Результаты моделирования

Оценку экстраполяции при ошибке в диагностике параметра γ рассмотрим для модели, в которой марковская цепь имеет два состояния. Моделирование выполнялось для случая, когда матрицы $Q_\gamma, V_\gamma, S_\gamma$ не зависели от скачкообразно изменяющегося параметра γ и коэффициент передачи экстраполятора определялся из решения системы матричных уравнений (23)–(25).

Исходные данные, используемые при моделировании:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1,075 & 0,1 \\ -0,05 & 0,94 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1,15 & 0,75 \\ -0,02 & 0,725 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{W} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = R_2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

Вектор $U_\gamma(k)$ не зависит от γ и определяется соотношением:

$$U(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0,275 \\ -0,0025 \end{pmatrix}, & \text{если } k \leq 64, \\ \begin{pmatrix} -0,625 \\ 0,0015 \end{pmatrix}, & \text{если } k > 64. \end{cases}$$

На рис. 1 приведены графики значений параметра γ и его оценки.

Рис. 1. Значения скачкообразного параметра γ (сплошная линия – истинные значения параметра γ , пунктирная линия – оценки параметра γ)

На рис. 2 приводятся результаты работы предложенных экстраполяторов, вычисляющих оценки прогноза с ошибками в диагностике параметра γ (рис. 2, а – для первой компоненты вектора состояния, рис. 2, б – для второй).

Рис. 2. Оценки прогноза с ошибками в диагностике параметра γ (сплошная линия – значения состояния объекта, пунктирная линия – оценка прогноза на интервале $k \in [35; 64]$, штрихпунктирная линия – оценка прогноза с использованием экстраполятора (26))

На рисунках видно, что на участке от 35 до 64 при ошибке идентификации алгоритм прогнозирования, не использующий оценки неизвестного входа, дает существенные ошибки.

Значения среднеквадратических ошибок для соответствующих временных интервалов приведены в табл. 1 и 2. Результаты получены путем усреднения по 50 реализациям. Сравнения выполнены для алгоритмов А и Б:

– алгоритм А – прогнозирование с ошибкой в определении параметра γ без использования оценки неизвестного входа (экстраполятор (28));

– алгоритм Б – прогнозирование с ошибкой в определении параметра γ с использованием оценки неизвестного входа (экстраполятор (30)).

Таблица 1

Среднеквадратические ошибки экстраполяции для x_1

№	Интервал	Алгоритм А	Алгоритм Б
1	1–15	0,862	0,983
2	15–35	0,332	0,261
3	35–64	15,603	1,526
4	64–83	6,981	3,706
5	83–100	0,352	0,243

Таблица 2

Среднеквадратические ошибки экстраполяции для x_2

№	Интервал	Алгоритм А	Алгоритм Б
1	1–15	0,613	0,676
2	15–35	0,568	0,435
3	35–64	9,215	0,88
4	64–83	3,682	2,074
5	83–100	0,301	0,211

Как видно из графиков и таблиц, применение алгоритма оценивания неизвестного входа позволяет при ошибках в диагностике параметра γ повысить точность оценок прогноза вектора состояния для дискретных моделей со скачкообразно изменяющимися параметрами.

Заключение

Получено решение задачи синтеза стационарного и нестационарного робастного экстраполятора для линейной дискретной модели с неизвестным входом и со случайными марковскими скачкообразными параметрами γ . Результаты математического моделирования показали, что применение разработанного алгоритма к задаче прогнозирования при ошибках в диагностике параметра γ позволяет повысить точность прогнозирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wonham W.M., Bharucha-Reid A.T. Random differential equation in control theory // Probabilistic methods in applied mathematics. 1971. P. 131–213.
2. Blair W.P., Swarder D.D. Feedback-control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria // Int. J. of Control. 1975. V. 21, is. 5. P. 833–841.
3. Shi P., Boukas E.K., Agarwal R.K. Kalman filtering for continuous-time uncertain systems with Markovian jumping parameters // IEEE Transactions on Automatic Control. 1999. V. 44, is. 8. P. 1592–1597.
4. Ломакина С.С., Смагин В.И. Робастная фильтрация для непрерывных систем со случайными скачкообразными параметрами и вырожденными шумами в наблюдениях // Автометрия. 2005. № 2. С. 36–43.
5. Liu W. State estimation for discrete-time Markov jump linear systems with time-correlated measurement noise // Automatica. 2017. V. 76. P. 266–276.
6. Costa E.F., De Saporta B. Linear minimum mean square filters for Markov jump linear systems // IEEE Trans. On Automatic Control. 2017. V. 62, is. 7. P. 3567–3572.
7. Белявский Г.И., Мисюра И.В. Фильтрация сигналов со скачками, возникающими в дискретном времени и с конечным горизонтом // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2014. № 2 (194). С. 137–144.

8. Mariton M. Jump linear systems in automatic control. New York : Marcel Dekker, 1990.
9. Gomes M.J.F., Costa E.F. On the stability of the recursive Kalman filter with Markov jump parameters // Proc. 2010 American Control Conference Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA June 30 – July 02, 2010. P. 4159–4163.
10. Terra M.H., Ishihara J.Y., Jesus G., Cerri J.P. Robust estimation for discrete-time Markovian jump linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. V. 58, No. 8. 2013. P. 2065–2071.
11. Ланкастер П. Теория матриц. М. : Наука, 1973. 280 с.
12. Janczak D., Grishin Yu. State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming // Control and Cybernetics. 2006. No. 4. P. 851–862.
13. Koshkin G.M., Smagin V.I. Filtering and prediction for discrete systems with unknown input using nonparametric algorithms // Proc. 10th International Conference on Digital Technologies. Zilina, Slovakia, 2014. P. 120–124.
14. Witczak M. Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems. Ch. 2: Unknown input observers and filters: lecture notes in electrical engineering. Springer International Publishing, Switzerland, 2014. P. 19–56.
15. Smagin V., Koshkin G., Udod V. State estimation for linear discrete-time systems with unknown input using nonparametric technique // Proc. International Conference on Artificial Intelligence and Control Automation (AICA 2015). Phuket, Thailand, 2015. P. 675–677.
16. Smagin V.I., Koshkin G.M. Kalman filtering and control algorithms for systems with unknown disturbances and parameters using nonparametric technique // Proc. 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2015). Miedzyzdroje. Poland, 2015. P. 247–251.
17. Li F., Shi P., Wu. L. Control and filtering for semi-markovian jump systems. New York : Springer, 2016. 208 p.

Поступила в редакцию 15 февраля 2018 г.

Kim K.S., Smagin V.I. (2018) ROBUST EXTRAPOLATION IN DISCRETE SYSTEMS WITH RANDOM JUMP PARAMETERS AND UNKNOWN INPUT. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 31–39

DOI: 10.17223/19988605/44/4

We consider the model of an object that is described by a discrete equation

$$x(k+1) = A_\gamma x(k) + U_\gamma(k) + f(k) + q_\gamma(k), \quad x(0) = x_0,$$

where $x(k) \in \mathbb{R}^m$ is the state vector, $\gamma(k)$ is a Markov chain with n states $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$; $U_\gamma(k)$ is known input; $f(k)$ is the unknown input; x_0 is a random vector (the variances are assumed to be known $N_{0,i} = M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T / \gamma = \gamma_i\}$, $i = \overline{1, n}$, $\bar{x}_0 = M\{x_0\}$); A_γ is given matrix; $q_\gamma(k)$ is random disturbance with the following characteristics $M\{q_\gamma(k)\} = 0$, $M\{q_\gamma(k)q_\gamma^T(k)\} = Q_\gamma \delta_{kj}$.

The observation channel has the form $y(k) = S_\gamma x(k) + v_\gamma(k)$, where $v_\gamma(k)$ is random errors of observations independent of the $q_\gamma(k)$ with $M\{v_\gamma(k)\} = 0$, $M\{v_\gamma(k)v_\gamma^T(k)\} = V_\gamma \delta_{kj}$.

According to the information obtained at time k , it is required to find an estimate of the state of the forecast $\hat{x}(k+1)$ by minimizing the following criterion:

$$J[0; T_f] = M\left\{\left[\sum_{k=0}^{T_f} \sum_{i=1}^n p_i(k) e^T(k) R_i(k) e(k) + \sum_{i=1}^n p_i(T_f) e^T(T_f) L_i(T_f) e(T_f)\right] / \gamma(0) = \gamma_0\right\},$$

where $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, $R_i(k) > 0$ and $L_i(T_f) > 0$ are weight matrices, γ_0 is the initial value of the variable γ .

The structure of the extrapolator is defined by the equation

$$\hat{x}(k+1) = A_\gamma \hat{x}(k) + U(k) + \hat{f}(k) + K(k)(y(k) - S_\gamma \hat{x}(k)), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0,$$

where $K(k)$ is the matrix of transmission coefficients to be determined.

Theorem. Assume that there exist positive definite matrices N_i and L_i being solutions of the two-point boundary problem:

$$N_i(k+1) = (A_i - K(k)S_i)\left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k)\right)(A_i - K(k)S_i)^T + Q_i + K(k)V_i K(k)^T, \quad N_i(0) = N_0.$$

$$L_i(k) = (A_i - K(k)S_i)^T \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} L_j(k+1)\right)(A_i - K(k)S_i) + R_i, \quad L_i(T_f) = L_{T,i}.$$

Then the vector $\text{ct}(K(k))$, composed with using of rows of the matrix $K(k)$, is determined by the formula:

$$\begin{aligned} \text{ct}(K(k)) = & \left(\sum_{i=1}^n p_i(k+1)[L_i(k+1) \otimes S_i \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k)\right) S_i^T + L_i(k+1) \otimes V_i]\right)^{-1} \times \\ & \times \text{ct}\left(\sum_{i=1}^n p_i(k+1)L_i(k+1)A_i \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k)\right) S_i^T\right). \end{aligned}$$

Thus, the synthesis algorithm robust extrapolator is developed that allows to define estimate of the state vector for discrete linear system with random jump parameter described by a Markov chain with a finite number of states. The filter transmission coefficients are proposed to be chosen by minimizing the sum of the quadratic forms of extrapolation errors, while averaging over the probabilities of the state of the jump parameter using recursive estimation algorithms with an unknown input. The extrapolation problem is considered when the value γ is identified both accurately and with errors.

Keywords: discrete model; quadratic criterion; robust extrapolation; jump parameters; unknown input.

KIM Konstantin Stanislavovich (National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: kks93@rambler.ru

SMAGIN Valery Ivanovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: vsm@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Wonham, W.M. & Bharucha-Reid, A.T. (1971) Random differential equation in control theory. In: Bharucha-Reid, A.T. (ed.) *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*. Vol. 2. Academic Press Inc. pp. 131–213.
2. Blair, W.P. & Swarder, D.D. (1975) Feedback-control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria. *International Journal of Control*. 21(5). pp. 833–841. DOI: 10.1080/00207177508922037
3. Shi, P., Boukas, E.K. & Agarwal, R.K. (1999) Kalman filtering for continuous-time uncertain systems with Markovian jumping parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 44(8). pp. 1592–1597. DOI: 10.1109/9.780431
4. Lomakina, S.S. & Smagin, V.I. (2005) Robust filtering in continuous systems with random jump parameters. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2. pp 36–43. (In Russian).
5. Liu, W. (2017) State estimation for discrete-time Markov jump linear systems with time-correlated measurement noise. *Automatica*. 76. pp. 266–276. DOI: 10.1016/j.automatica.2016.10.028
6. Costa, E.F. & De Saporta, B. (2017) Linear minimum mean square filters for Markov jump linear systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*. 62(7). pp. 3567–3572. DOI: 10.1109/TAC.2017.2692180
7. Belyavsky, G.I. & Misyura, I.V. (2014) Signal filtering with jumps during discrete time and under finite horizon. *Nauchno-tehnicheskiye vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta. Fiziko-matematicheskiye nauki – St. Petersburg Polytechnic University Journal of Engineering Science and Technology*. 2(194). pp. 137–144. (In Russian).
8. Mariton, M. (1990) *Jump linear systems in automatic control*. New York: Marcel Dekker.
9. Gomes, M.J.F. & Costa, E.F. (2010) On the stability of the recursive Kalman filter with Markov jump parameters. *Proc. 2010 American Control Conference Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA*. pp.4159–4163. DOI: 10.1109/ACC.2008.4586670
10. Terra, M.H., Ishihara, J.Y., Jesus, G. & Cerri, J.P. (2013) Robust estimation for discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 58(8). pp. 2065–2071. DOI: 10.1109/TAC.2013.2246475
11. Lancaster, P. (1969) *Theory of Matrices*. New York: Academic Press.
12. Janczak, D. & Grishin, Yu. (2006) State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming. *Control and Cybernetics*. 35(4). pp. 851–862.
13. Koshkin, G.M. & Smagin, V.I. (2014) Filtering and prediction for discrete systems with unknown input using nonparametric algorithms. *Proc. 10th International Conference on Digital Technologies*. Zilina, Slovakia. July 9–11, 2014. pp. 120–124. DOI: 10.1109/DT.2014.6868702
14. Witczak, M. (2014) *Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems*. Springer International Publishing, Switzerland. pp. 19–56. DOI: 10.1007/978-3-319-03014-2
15. Smagin, V., Koshkin, G. & Udod, V. (2015) State estimation for linear discrete-time systems with unknown input using nonparametric technique. *Proc. International Conference on Artificial Intelligence and Control Automation (AICA 2015)*. Phuket. Thailand. pp. 675–677. DOI: 10.2991/cisia-15.2015.184
16. Smagin, V.I. & Koshkin, G.M. (2015) Kalman filtering and control algorithms for systems with unknown disturbances and parameters using nonparametric technique. *Proc. 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2015)*. Miedzyzdroje. Poland. August 24–27, 2015. pp. 247–251. DOI: 10.1109/MMAR.2015.7283881
17. Li, F., Shi, P. & Wu, L. (2016) *Control and filtering for semi-Markovian jump systems*. New York: Springer.