А.А. Назаров, Е.Е. Худяшова, А.Н. Моисеев

СИСТЕМА $M|GI|_{\infty}$ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Проводится исследование математической модели системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и рекуррентным входящим потоком, в котором длины интервалов между моментами наступления событий имеют двухфазную гиперэкспоненциальную функцию распределения. С помощью метода динамического просеивания получены среднее значение и дисперсия числа заявок в системе. Предложена дискретная гауссовская аппроксимация нестационарного распределения вероятностей числа заявок в системе. С помощью имитационного моделирования установлена область применимости предлагаемой аппроксимации.

Ключевые слова: система с неограниченным числом приборов; бесконечное значение среднего времени обслуживания; рекуррентный поток; метод динамического просеивания.

Системы массового обслуживания все чаще используются для описания широкого круга практических задач. Некоторые из них могут быть сформулированы таким образом, что количество обслуживающих приборов становится настолько большим, что его можно считать бесконечным. Это могут быть такие модели страховых компаний, в которых договоры страхования жизни или имущества с физическими или юридическими лицами выступают в качестве обслуживающих приборов. Разумеется, ограничивать число таких договоров в подобных системах совершенно нелогично [1]. Результаты для системы обслуживания с бесконечным числом каналов и идентичным временем обслуживания, полученные в [2], применяются к анализу процесса образования очередей на неуправляемых перекрестках автомобильных дорог. Также системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов используются для моделирования систем распределенной обработки данных [3] или, как показано в [4], – для анализа изменения числа клиентов торговой компании.

Исследованием систем с неограниченным числом приборов занимаются со второй половины XX в. В [5] была рассмотрена система массового обслуживания типа $M|G|_{\infty}$ – телефонная станция, в которой ни один звонок не задерживался и не терялся. В 1960–1980-е гг. публикуется ряд статей [6–10], посвященных системам $GI|G|_{\infty}$ и $G|M|_{\infty}$. В [9, 11] изучаются системы $GI|GI|_{\infty}$, интенсивность входящего потока в которых стремится к бесконечности, но распределение времени обслуживания фиксировано. В [12] доказывается ряд предельных теорем для системы, в которой среднее время обслуживания бесконечно. В работе Е. Баштовой и Е. Чернавской [13] показано, что в предельном условии растущего времени число заявок в системе имеет гауссовское распределение.

Как показано в [14–16], модели с неограниченным числом приборов можно применять и в случаях, когда вероятность достижения загрузки всех каналов достаточно мала. Поэтому модели массового обслуживания с неограниченным числом приборов последние десятилетия изучаются довольно подробно [17–22]. В этих работах исследованы распределения вероятностей числа занятых приборов как в стационарном [21], так и в нестационарном случае [19]. И нестационарное распределение вероятностей найдено лишь для пуассоновского входящего потока. Результаты исследования однофазных, многофазных систем и сетей массового обслуживания с неограниченным числом приборов и рекуррентным обслуживанием представлены в работах [17, 23–25]. Однако все работы объединены общей идеей конечного математического ожидания времени обслуживания заявки. Но при рассмотрении моделей, для которых математическое ожидание времени обслуживания заявки бесконечно, все результаты перестают иметь хоть какое-то логическое обоснование. Поэтому возникает необходимость

рассмотреть бесконечнолинейную систему массового обслуживания с бесконечным математическим ожиданием времени обслуживания заявки. Такая система с входящим рекуррентным потоком, в котором интервалы между моментами наступления событий имеют гиперэкспоненциальное распределение, рассматривается в настоящей работе.

1. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов (рис. 1).

Рис. 1. Система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, произвольной функцией распределения времени обслуживания заявок $B(x)$ и гиперэкспоненциальным рекуррентным потоком $A(x)$ длин интервалов между моментами наступления событий

На вход этой системы поступает гиперэкспоненциальный рекуррентный поток, длины интервалов между моментами наступления событий в котором имеют двухфазную гиперэкспоненциальную функцию распределения

$$A(x) = q(1 - e^{-\lambda_1 x}) + (1 - q)(1 - e^{-\lambda_2 x}), \quad (1)$$

с параметрами $0 \leq q \leq 1$, $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$. Продолжительности обслуживания заявок являются независимыми случайными величинами с функцией распределения $B(x)$ и бесконечным первым моментом, т.е. выполняется равенство

$$\int_0^{\infty} (1 - B(x)) dx = \infty. \quad (2)$$

Обозначим $i(t)$ – число заявок (число занятых приборов) в системе в момент времени t .

Для рассматриваемой системы, в силу условия (2), не существует стационарного распределения вероятностей значений процесса $i(t)$, поэтому его нестационарное распределение обозначим

$$P(i, t) = P\{i(t) = i\}, \quad (3)$$

полагая, что при $t = 0$ система свободна и в ней нет обслуживаемых заявок.

Задачей исследований в данной работе является нахождение нестационарного дискретного распределения $P(i, t)$ числа занятых приборов в момент времени t .

Для решения поставленной задачи применим метод динамического просеивания [17] (метод просеянного потока).

2. Метод динамического просеивания

Рассмотрим две оси времени t (рис. 2). На первой оси отметим моменты наступления событий входящего потока, а также моменты времени $t = 0$ и $t = T > 0$.

Обозначим

$$S(t) = 1 - B(T - t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в момент времени $0 \leq t \leq T$, будет находиться в системе в момент времени $t = T$, занимая один из ее приборов.

Каждое событие входящего потока, наступившее в момент времени t с вероятностью $S(t)$ просеивается на вторую ось (реализуется динамическое по t просеивание), а с вероятностью $1 - S(t)$ не рассматривается. По построению на второй оси генерируется нестационарный просеянный поток.

Рис. 2. Метод динамического просеивания заявок, поступающих в систему на обслуживание

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших за время t на интервале $[0, t]$. Доказано [17], что выполняется равенство

$$P\{i(T) = m\} = P\{n(T) = m\} = P(m, T), \quad m = \overline{0, \infty}, \quad (5)$$

поэтому для нахождения распределения вероятностей $P(i, T)$ из (3) числа i занятых приборов в системе в момент времени $t = T$ достаточно найти распределение вероятностей числа $n(t)$ событий просеянного потока, наступивших за время t , и положить $t = T$.

Обозначим $k(t)$ – состояние входящего рекуррентного двухфазного гиперэкспоненциального потока в момент времени t , положив $k(t) = k$, если в момент времени t поток находится на k -й фазе ($k = 1, 2$) двухфазного гиперэкспоненциального распределения $A(x)$ из (1).

Рассмотрим двумерный случайный процесс $\{k(t), n(t)\}$, а его распределение вероятностей обозначим

$$P\{k(t) = k, n(t) = n\} = P_k(n, t), \quad k = 1, 2, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что это распределение $P_k(n, t)$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1(n, t)}{\partial t} = \lambda_1[q(1 - S(t)) - 1]P_1(n, t) + \lambda_1 q S(t)P_1(n - 1, t) + \\ + \lambda_2 q(1 - S(t))P_2(n, t) + \lambda_2 q S(t)P_2(n - 1, t), \\ \frac{\partial P_2(n, t)}{\partial t} = \lambda_1(1 - q)(1 - S(t))P_1(n, t) + \lambda_1(1 - q)S(t)P_1(n - 1, t) + \\ + \lambda_2[(1 - q)(1 - S(t)) - 1]P_2(n, t) + \lambda_2(1 - q)S(t)P_2(n - 1, t). \end{cases} \quad (7)$$

Для распределения вероятностей $P_k(n, t)$ обозначим частичные по k характеристические функции числа $n(t)$ событий, наступивших в просеянном потоке за время t ,

$$H_k(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P_k(n, t), \quad (8)$$

для которых, в силу (7), запишем систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1(u, t)}{\partial t} = \lambda_1\{q - 1 + (e^{ju} - 1)qS(t)\}H_1(u, t) + \lambda_2\{q + (e^{ju} - 1)qS(t)\}H_2(u, t), \\ \frac{\partial H_2(u, t)}{\partial t} = \lambda_1\{1 - q + (e^{ju} - 1)(1 - q)S(t)\}H_1(u, t) + \lambda_2\{-q + (e^{ju} - 1)(1 - q)S(t)\}H_2(u, t). \end{cases} \quad (9)$$

Нетрудно показать, что

$$H_k(u, 0) = H_k(0, t) = R_k, \quad (10)$$

тогда, положив в (9) $u = 0$, получим для R_k систему двух эквивалентных уравнений

$$\begin{cases} -\lambda_1(1 - q)R_1 + \lambda_2 q R_2 = 0, \\ \lambda_1(1 - q)R_1 - \lambda_2 q R_2 = 0. \end{cases}$$

Решение $\{R_1, R_2\}$ этой системы, удовлетворяющее условию нормировки $R_1 + R_2 = 1$, имеет вид:

$$R_1 = \frac{\lambda_2 q}{\lambda_2 q + (1-q)\lambda_1}, \quad R_2 = \frac{(1-q)\lambda_1}{\lambda_2 q + (1-q)\lambda_1}. \quad (11)$$

3. Среднее значение числа заявок в системе

Обозначим

$$\left. \frac{\partial H_k(u, t)}{\partial u} \right|_{u=0} = j m_k(t),$$

где $m_k(t)$ – частичные первые моменты числа событий, наступивших в просеянном потоке за время t , а их сумма $m(t) = m_1(t) + m_2(t)$ является средним значением числа событий, наступивших в просеянном потоке за время t на интервале $[0, t]$.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть

$$a = \int_0^\infty (1 - A(x)) dx -$$

средняя длина интервалов входящего двухфазного гиперэкспоненциального рекуррентного потока, тогда среднее значение $m(t) = M\{n(t)\}$ числа событий, наступивших в просеянном потоке за время t на интервале $[0, t]$, имеет вид:

$$m(t) = \frac{1}{a} \int_0^t S(x) dx. \quad (12)$$

Доказательство. Дифференцируя по u равенства (9) и полагая $u = 0$, для $m_k(t)$ получим систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m_1'(t) &= -(1-q)\lambda_1 m_1(t) + \lambda_2 q m_2(t) + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) q S(t), \\ m_2'(t) &= (1-q)\lambda_1 m_1(t) - \lambda_2 q m_2(t) + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)(1-q) S(t). \end{aligned}$$

Складывая уравнения этой системы, получим равенство

$$m'(t) = (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) S(t).$$

Из этого равенства при начальном условии $m(0) = 0$ получим

$$m(t) = (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) \int_0^t S(x) dx, \quad (13)$$

где для $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$ получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 &= \lambda_1 \frac{\lambda_2 q}{\lambda_2 q + (1-q)\lambda_1} + \lambda_2 \frac{(1-q)\lambda_1}{\lambda_2 q + (1-q)\lambda_1} = \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 q + (1-q)\lambda_1} = \frac{1}{\frac{q}{\lambda_1} + \frac{1-q}{\lambda_2}} = \frac{1}{\int_0^\infty (1 - A(x)) dx} = \frac{1}{a}, \end{aligned}$$

поэтому $m(t)$ из (13) имеет вид

$$m(t) = \frac{1}{a} \int_0^t S(x) dx,$$

который совпадает с (12). Лемма 1 доказана.

Из этой леммы следует утверждение.

Теорема 1. Пусть $B(x)$ – функция распределения времени обслуживания заявок, тогда математическое ожидание $M\{i(T)\}$ числа $i(T)$ заявок в системе $H_2|GI|\infty$ в момент времени T определяется равенством

$$M\{i(T)\} = m(T) = \frac{1}{a} \int_0^T (1 - B(x)) dx. \quad (14)$$

Доказательство. В (12) вероятность просеивания $S(x)$ определяется равенством (4), поэтому

$$m(t) = \frac{1}{a} \int_0^t (1 - B(T - x)) dx = \frac{1}{a} \int_{T-t}^T (1 - B(y)) dy,$$

тогда, в силу (5), выполняется равенство

$$M\{i(T)\} = m(T) = \frac{1}{a} \int_0^T (1 - B(x)) dx,$$

которое совпадает с (14). Теорема доказана.

Далее найдем дисперсию числа заявок в системе.

4. Дисперсия числа заявок в системе

Для центрирования случайного процесса $n(t)$ рассмотрим частичные характеристические функции

$$H_k^{(2)}(u, t) = H_k(u, t) \exp \left\{ -ju \frac{1}{a} \int_0^t S(x) dx \right\}, \quad (15)$$

где $k = 1, 2$ для разности $n(t) - m(t) = n(t) - M\{n(t)\}$.

Можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $v = \lambda_1 \lambda_2 a$, тогда дисперсия $D(t)$ числа $n(t)$ событий, наступивших в просеянном потоке за время t на интервале $[0, t]$, имеет вид:

$$D(t) = \frac{1}{a} \int_0^t S(x) dx + 2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 a} \right)^2 \frac{q(1-q)}{a} \int_0^t v e^{-vx} S(x) \left[\int_0^x e^{vy} S(y) dy \right] dx. \quad (16)$$

Доказательство. В системе (9) выполним совпадающую с (15) замену:

$$H_k(u, t) = H_k^{(2)}(u, t) \exp \left\{ ju \frac{1}{a} \int_0^t S(x) dx \right\},$$

для $H_k^{(2)}(u, t)$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1^{(2)}(u, t)}{\partial t} + ju \frac{1}{a} S(t) H_1^{(2)}(u, t) = \\ = \lambda_1 \{q - 1 + (e^{ju} - 1)qS(t)\} H_1^{(2)}(u, t) + \lambda_2 \{q + (e^{ju} - 1)qS(t)\} H_2^{(2)}(u, t), \\ \frac{\partial H_2^{(2)}(u, t)}{\partial t} + ju \frac{1}{a} S(t) H_2^{(2)}(u, t) = \\ = \lambda_1 \{1 - q + (e^{ju} - 1)(1 - q)S(t)\} H_1^{(2)}(u, t) + \lambda_2 \{-q + (e^{ju} - 1)(1 - q)S(t)\} H_2^{(2)}(u, t). \end{cases} \quad (17)$$

Обозначая $m_k^{(2)}(t)$ – частичные математические ожидания централизованного процесса $n(t)$ – $M\{n(t)\}$, а $D_k(t)$ – частичные дисперсии числа заявок в системе

$$\left. \frac{\partial H_k^{(2)}(u, t)}{\partial u} \right|_{u=0} = jm_k^{(2)}(t), \quad \left. \frac{\partial^2 H_k^{(2)}(u, t)}{\partial u^2} \right|_{u=0} = j^2 D_k(t),$$

дифференцируя по u в нуле (17), получим две системы, первая из которых для $m_k^{(2)}(t)$:

$$\begin{cases} m_1^{(2)'}(t) = -(1-q)\lambda_1 m_1^{(2)}(t) + q\lambda_2 m_2^{(2)}(t) + \frac{1}{a}(q - R_1)S(t) \\ m_2^{(2)'}(t) = (1-q)\lambda_1 m_1^{(2)}(t) - q\lambda_2 m_2^{(2)}(t) + \frac{1}{a}(R_1 - q)S(t), \end{cases} \quad (18)$$

а вторая – для $D_k(t)\Phi$:

$$\begin{cases} D_1'(t) + \frac{2}{a}S(t)m_1^{(2)}(t) = -\lambda_1(1-q)D_1(t) + \lambda_2 q D_2(t) + \\ + 2qS(t)[\lambda_1 m_1^{(2)}(t) + \lambda_2 m_2^{(2)}(t)] + qS(t)[\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2], \\ D_2'(t) + \frac{2}{a}S(t)m_2^{(2)}(t) = \lambda_1(1-q)D_1(t) - \lambda_2 q D_2(t) + \\ + 2(1-q)S(t)[\lambda_1 m_1^{(2)}(t) + \lambda_2 m_2^{(2)}(t)] + (1-q)S(t)[\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2]. \end{cases}$$

Складывая уравнения этой системы и обозначая $D_1(t) + D_2(t) = D(t)$, получим равенство

$$\begin{aligned} D'(t) + \frac{2}{a}S(t)(m_1^{(2)}(t) + m_2^{(2)}(t)) = \\ = 2S(t)[\lambda_1 m_1^{(2)}(t) + \lambda_2 m_2^{(2)}(t)] + [\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2]S(t), \end{aligned} \quad (19)$$

в котором содержатся комбинации $m_1^{(2)}(t) + m_2^{(2)}(t)$ и $\lambda_1 m_1^{(2)}(t) + \lambda_2 m_2^{(2)}(t)$ компонент $m_1^{(2)}$ и $m_2^{(2)}$ решения системы (18).

Из (18) очевидно следует, что $m_1^{(2)}(t) + m_2^{(2)}(t) = 0$, поэтому, записав $m_1^{(2)}(t) = -m_2^{(2)}(t)$, второе уравнение системы (18) перепишем в виде обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} m_2^{(2)'}(t) &= -(q\lambda_2 + (1-q)\lambda_1)m_2^{(2)}(t) + \frac{1}{a}(R_1 - q)S(t) = \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{q}{\lambda_1} + \frac{1-q}{\lambda_2} \right) m_2^{(2)}(t) + \frac{1}{a}(R_1 - q)S(t) = \\ &= -\lambda_1 \lambda_2 a m_2^{(2)}(t) + \frac{1}{a}(R_1 - q)S(t). \end{aligned}$$

Решение $m_2^{(2)}$ этого уравнения при начальном условии $m_2^{(2)} = 0$ имеет вид

$$m_2^{(2)}(t) = e^{-\lambda_1 \lambda_2 a t} \int_0^t e^{\lambda_1 \lambda_2 a x} \frac{1}{a}(R_1 - q)S(x)dx,$$

а выражение $\lambda_1 m_1^{(2)}(t) + \lambda_2 m_2^{(2)}(t)$ можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\lambda_1 m_1^{(2)}(t) + \lambda_2 m_2^{(2)}(t) &= (\lambda_2 - \lambda_1) m_2^{(2)}(t) = \\ &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a} (R_1 - q) e^{-\lambda_1 \lambda_2 a t} \int_0^t e^{\lambda_1 \lambda_2 a x} S(x) dx.\end{aligned}$$

При нулевом начальном условии $D(0) = 0$ из равенства (19) получим выражение для $D(t)$ в виде:

$$D(t) = \frac{1}{a} \int_0^t S(x) dx + 2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a} (R_1 - q) \int_0^t e^{-\lambda_1 \lambda_2 a x} S(x) \left[\int_0^x e^{\lambda_1 \lambda_2 a y} S(y) dy \right] dx. \quad (20)$$

Найдем значение коэффициента $2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a} (R_1 - q)$ при интеграле второго слагаемого в (20). Принимая во внимание (11), после несложных преобразований, запишем

$$2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a} (R_1 - q) = 2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a} \left(\frac{\lambda_2 q}{\lambda_2 q + (1 - q) \lambda_1} - q \right) = 2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 a} \right)^2 \frac{q(1 - q)}{a} \lambda_1 \lambda_2 a.$$

Тогда (20), обозначив $\lambda_1 \lambda_2 a = v$, перепишем в виде:

$$D(t) = \frac{1}{a} \int_0^t S(x) dx + 2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 a} \right)^2 \frac{q(1 - q)}{a} \int_0^t v e^{-vx} S(x) \int_0^x e^{vy} S(y) dy dx,$$

совпадающем с (16). Лемма доказана.

Для дисперсии $D(T) = M\{(i(T) - M i(T))^2\}$ числа $i(T)$ заявок в момент времени $t = T$ в системе $H_2|GI|^\infty$ можно сформулировать следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть

$$\theta = 2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 a} \right)^2 \frac{q(1 - q)}{a}, \quad (21)$$

тогда дисперсия $D(T)$ числа $i(T)$ заявок в момент времени $t = T$ в системе $H_2|GI|^\infty$ имеет вид:

$$D\{i(T)\} = \frac{1}{a} \int_0^T (1 - B(x)) dx + \theta \int_0^T v e^{-vy} \left[\int_0^{T-y} (1 - B(x))(1 - B(x + y)) dx \right] dy. \quad (22)$$

Доказательство. В силу (5) и обозначения (21) дисперсия $D(T)$ числа $i(T)$ заявок в системе совпадает с дисперсией $D(T)$ при $t = T$, определяемой равенством (16), поэтому

$$D\{i(T)\} = \frac{1}{a} \int_0^T S(t) dt + \theta \int_0^T v e^{-vt} S(t) \left[\int_0^t e^{vx} S(x) dx \right] dt.$$

Интеграл во втором слагаемом этого выражения запишем в виде:

$$\int_0^T v e^{-vt} S(t) \left[\int_0^t e^{vx} S(x) dx \right] dt.$$

И после двойной замены переменных и изменения порядка интегрирования, получим

$$\int_0^T v e^{-vy} \left[\int_0^{T-y} (1 - B(z))(1 - B(z + y)) dz \right] dy$$

тогда дисперсию $D\{i(T)\}$ перепишем в виде:

$$D\{i(T)\} = \frac{1}{a} \int_0^T (1 - B(x)) dx + \theta \int_0^T v e^{-vy} \left[\int_0^{T-y} (1 - B(x))(1 - B(x+y)) dx \right] dy,$$

совпадающем с (22). Теорема доказана.

В статье получены допредельные (при конечном T) характеристики, при этом математическое ожидание совпадает с предельным результатом [13].

5. Дискретная гауссовская аппроксимация распределения вероятностей $P(i, T)$ и ее область применимости

Опираясь на результаты Е. Баштовой и Е. Чернавской [13], для аппроксимации нестационарного распределения вероятностей используем дискретную гауссовскую аппроксимацию. Обозначим $G(x, T)$ функцию гауссовского распределения с параметрами, определяемые равенствами (14) и (22).

Дадим следующее определение. Дискретной гауссовской аппроксимацией $P_1(i, T)$ нестационарного распределения вероятностей $P(i, T)$ числа $i(T)$ заявок в момент времени $t = T$ в системе $H_2|GI|_\infty$ будем называть распределение вероятностей $P_1(i, T)$, определяемое равенством

$$P_1(i, T) = (G(i + 0,5, T) - G(i - 0,5, T)) [1 - G(-0,5, T)]^{-1}. \quad (23)$$

Для оценки точности предлагаемой аппроксимации будем применять расстояние Колмогорова Δ , определяемое равенством

$$\Delta = \max_{0 \leq i < \infty} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (P(n, T) - P_1(n, T)) \right|. \quad (24)$$

При нахождении значений точности Δ оценку исходного нестационарного распределения вероятностей $P(i, T)$ найдем, применяя имитационное моделирование системы $H_2|GI|_\infty$ при заданных значениях параметров $q = 0,5$, $\lambda_1 = 6$ и $\lambda_2 = 30$ гиперэкспоненциального распределения длин интервалов входящего рекуррентного потока $A(x)$, определяемого формулой (1) и заданной функцией распределения $B(x)$ времени обслуживания заявок. Тогда интенсивность входящего потока $\lambda = \frac{1}{a} = 10$.

Функцию распределения $B(x)$, удовлетворяющую свойству (2), возьмем в виде:

$$B(x) = \frac{x^\gamma}{1 + x^\gamma}, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (25)$$

задав определенное значение параметра $0 < \gamma \leq 1$.

На рис. 3–5 приведены графики распределения вероятностей числа занятых приборов в системе, полученных методом имитационного моделирования и гауссовской аппроксимацией с заданными параметрами.

Рис. 3. Распределение вероятностей $P(i, T)$, полученное с помощью имитационного моделирования (пунктирная линия), и гауссовская аппроксимация $P_1(i, T)$ (сплошная линия) при $\gamma = 1$ и $T = 0,25$

Рис. 4. Распределение вероятностей $P(i, T)$, полученное с помощью имитационного моделирования (пунктирная линия), и гауссовская аппроксимация $P_1(i, T)$ (сплошная линия) при $\gamma = 1$ и $T = 1$

Рис. 5. Распределение вероятностей $P(i, T)$, полученное с помощью имитационного моделирования (пунктирная линия), и гауссовская аппроксимация $P_1(i, T)$ (сплошная линия) при $\gamma = 1$ и $T = 25$

В таблице приведены значения расстояния Колмогорова для указанных распределений при различных значениях параметров γ и T .

Расстояние Колмогорова между результатами имитационного моделирования и гауссовской аппроксимацией

$\gamma \backslash T$	0,25	0,5	1	5	10	25
1	0,118	0,069	0,041	0,020	0,017	0,015
0,5	0,124	0,074	0,044	0,018	0,014	0,011
0,25	0,124	0,083	0,046	0,017	0,012	0,009

Будем считать, что нас удовлетворяет точность $\Delta < 0,05$. Тогда, как видно из результатов численного моделирования, областью применимости гауссовской дискретной аппроксимации является значение параметра времени $T \geq 1$, при котором расстояние Колмогорова Δ дает значение меньше 0,05.

Заключение

В работе получено аналитическое выражение для среднего значения и дисперсии числа заявок в системе массового обслуживания с неограниченным числом приборов и гиперэкспоненциальным рекуррентным входящим потоком, длины интервалов между моментами наступления событий в котором имеют двухфазную гиперэкспоненциальную функцию распределения. С помощью имитационного

моделирования показано, что возможно применение дискретной гауссовской аппроксимации распределения вероятностей, установлена область применимости этой аппроксимации. Предложенный подход может быть применен к аналогичным задачам для систем с другими рекуррентными входящими потоками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарайшина И.Р. Исследование математических моделей процессов государственного пенсионного страхования : дис. ... канд. физ.-мат. наук, Томск, 2005. 148 с
2. Афанасьева Л.Г., Руденко И.В. Системы обслуживания $GI|G|_\infty$ и их приложения к анализу транспортных моделей // Теория вероятностей и ее применение. 2012. Т. 57, вып. 3. С. 427–452.
3. Грачев В.В., Моисеев А.Н., Назаров А.А., Ямпольский В.З. Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных // Доклады ТУСУРа. 2012. № 2 (26), ч. 2. С. 248–251.
4. Морозова А.С., Моисеева С.П., Одинцов К.М. Математическая модель процесса изменения числа клиентов торговой компании в виде СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов // Научное творчество молодежи : материалы XI Всерос. Науч.-практ. конф., Анжиро-Судженск, 20–21 апр. 2007 г. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2007. Ч. 1. С. 37–39.
5. Riordan J. Telephone traffic time averages // Bell Labs Technic. J. 1951. V. 30, No. 4. P. 1129–1144.
6. Takacs L. An introduction to queueing theory. New York : Oxford University Press, 1962.
7. Downton F. Congestion systems with incomplete service // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B (Methodological). 1962. V. 24, No. 1. P. 107–111.
8. Mirasol N. M. Letter to the editor-the output of an $M|G|_\infty$ queueing system is Poisson // Oper. Res. 1963. V. 11, No. 2. P. 282–284.
9. Whitt W. On the heavy-traffic limit theorem for $GI|G|_\infty$ queues // Advances in Applied Probability. 1982. P. 171–190.
10. Yamada K. A heavy traffic limit theorem for $G|M|_\infty$ queueing networks // Probability Theory and Mathematical Statistics. Springer Berlin Heidelberg, 1988. P. 549–564.
11. Pang G., Whitt W. Two-parameter heavy-traffic limits for infinite-server queues // Queueing Systems. 2010, V. 65, No. 4. P. 325–364.
12. Чернавская Е.А. Предельные теоремы для бесконечноканальных систем с тяжелыми хвостами распределений времен обслуживания : дис. ... канд. физ.-мат. наук / МГУ им. М.В. Ломоносова. М., 2016. 93 с.
13. Bashtova E.E., Chernavskaya E.A. Limit theorems for infinite-channel queueing systems with heavy-tailed service times // Analytical and Computational methods in Probability theory and its Applications. 2017. P. 110–112.
14. Puhalskii A.A., Reed J.E. On many-server queues in heavy traffic // Annals of Applied Probability. 2008. V. 20. P. 129–195.
15. Reed J. The $G/GI/N$ queue in the Halfin-Whitt regime // Annals of Applied Probability. 2009. V. 19, is. 6. P. 2211–2269.
16. Fralix B.H., Adan I.J.B.F. An infinite-server queue influenced by a semi-Markovian environment // Queueing Systems. 2009. V. 61. P. 65–84.
17. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2015. 240 с.
18. Machihara F. An infinitely-many-server queue having Markov renewal arrivals and hyperexponential service times // J. of the Operations Research Society of Japan. 1986. V. 29. P. 338–351.
19. Massey W.A., Whitt W. Networks of infinite-server queues with nonstationary Poisson input // Queueing Systems. 1993. V. 13. P. 183–250.
20. Ramaswami V., Neuts M. Some explicit formulas and computational methods for infinite-server queues with phase-type arrival // J. of Applied Probability. 1980. V. 17. P. 498–514.
21. Van Doorn E.A., Jagers A.A. A note on the $GI/GI/\infty$ system with identical service and interarrival-time distributions // Queueing Systems. 2004. V. 47. P. 45–52.
22. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания : учебник. М. : Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
23. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Исследование системы массового обслуживания $HIGI|GI|_\infty$ // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 75–83.
24. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Асимптотический анализ многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком // Автометрия. 2014. Т. 50. № 2. С. 67–76.
25. Назаров А.А., Моисеев А.Н. Исследование открытой немарковской сети массового обслуживания $GI-(GI|_\infty)^K$ с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком // Проблемы передачи информации. 2013. Т. 49, вып. 2. С. 78–91.

Поступила в редакцию 4 февраля 2018 г.

Nazarov A.A., Khudyashova E.E., Moiseev A.N. (2018) QUEUEING SYSTEM $H_2|GI|_\infty$ WITH AN INFINITE MEAN OF SERVICE TIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 72–83

DOI: 10.17223/19988605/44/8

The paper deals with queueing systems with an unlimited number of devices and renewal arrival process, in which the lengths of inter-arrivals have a two-phase hyper-exponential distribution function:

$$A(x) = q(1 - e^{-\lambda_1 x}) + (1 - q)(1 - e^{-\lambda_2 x}). \quad (1)$$

Service times are independent and identically distributed with distribution function $B(x)$ and they have infinite first moments, that is

$$\int_0^{\infty} (1 - B(x)) dx = \infty. \quad (2)$$

Due to expression (2), there is no stationary probability distribution of the number of customers in the considered system. Using the method of dynamic screening, the average value and variance of the number of customers in the system are obtained. Mean of the number of customers in the system at the instant T is given by expression

$$M\{i(T)\} = \frac{1}{a} \int_0^T (1 - B(x)) dx, \quad (3)$$

where $\lambda = \frac{1}{a}$ is an intensity of the arrival process.

Variance of the number of customers in the system at the instant T is determined by the following expression:

$$D\{i(T)\} = \frac{1}{a} \int_0^T (1 - B(x)) dx + \theta \int_0^T v e^{-vy} \left[\int_0^{T-y} (1 - B(x))(1 - B(x+y)) dx \right] dy, \quad (4)$$

where $\theta = 2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 a} \right)^2 \frac{q(1-q)}{a}$, and $v = \lambda_1 \lambda_2 a$.

A numerical implementation of the discrete Gaussian approximation of the probability distribution $P(i, T)$ is proposed. The range of applicability of the proposed approximation is determined using simulation approach.

Keywords: infinite-server queueing system; infinite mean of service time; dynamic screening method.

NAZAROV Anatoly Andreevich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).

E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

KHUDYASHOVA Ekaterina Evgenievna (National Research Tomsk State University, Russian Federation).

E-mail: kopnova.e@gmail.com

MOISEEV Alexander Nikolaevich (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).

E-mail: moiseev.tsu@gmail.com

REFERENCES

1. Garayshina, I.R. (2005) *Issledovaniye matematicheskikh modeley protsessov gosudarstvennogo pensionnogo strakhovaniya* [Research of mathematical models of processes of the state pension insurance]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Tomsk.
2. Afanasieva, L.G. & Rudenko, I.V. (2012) $G|G|\infty G|G|\infty$ queues and their applications to the transport models analysis. *Teoriya veroyatnostey i yeye primeneniya – Probability Theory and Its Applications*. 57(3). pp. 427–452. (In Russian).
3. Grachev, V.V., Moiseyev, A.N., Nazarov, A.A. & Yampolsky, V.Z. (2012) Multistage queueing model of the distributed data processing system. *Doklady TUSURa – Proceedings of Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics*. 2(26). pp. 248–251. (In Russian).
4. Morozova, A.S., Moiseeva, S.P. & Odintsov, K.M. (2007) A mathematical model of the process of changing the number of clients of a trading company in the form of a SMO with an unlimited number of servicing devices. *Nauchnoye tvorchestvo molodezhi* [Scientific creativity of youth]. Proc. of the Eleventh All-Russian Conference. Anzhero-Sudzhensk., April 20–21. 2007. Tomsk: Tomsk State University. pp. 37–39. (In Russian).
5. Riordan, J. (1951) Telephone traffic time averages. *Bell Labs Technical Journal*. 30(4). pp. 1129–1144. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1951.tb03698.x
6. Takacs, L. (1962) *An introduction to queueing theory*. New York: Oxford University Press.
7. Downton, F. (1962) Congestion systems with incomplete service. *Journal of the Royal Statistal Society. Ser. B (Methodological)*. 24(1). pp. 107–111.
8. Mirasol, N.M. (1963) Letter to the editor-the output of an $M|G|\infty$ queueing system is Poisson. *Oper. Res.* 11(2). pp. 282–284.
9. Whitt, W. (1982) On the heavy-traffic limit theorem for $GI/G/\infty$ queues. *Advances in Applied Probability*. 14(1). pp. 171–190. DOI: 10.2307/1426738

10. Yamada, K. (1988) A heavy traffic limit theorem for $G|M|_\infty$ queueing networks. In: Watanabe, Sh. & Prokhorov, Yu. (eds) *Probability Theory and Mathematical Statistics*. Berlin Heidelberg: Springer. pp. 549–564.
11. Pang, G. & Whitt, W. (2010) Two-parameter heavy-traffic limits for infinite-server queues. *Queueing Systems*. 65(4). pp. 325–364. DOI: 10.1007/s11134-010-9184-z
12. Chernavskaya, E.A. (2016) *Predel'nyye teoremy dlya beskonechnokanal'nykh sistem s tyazhelyimi khvostami raspredeleniy vremen obsluzhivaniya* [Limit theorems for infinite channel systems with heavy tails of distributions of service times]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Moscow: Moscow State University.
13. Bashtova, E.E. & Chernavskaya, E.A. (2017) Limit theorems for infinite-channel queueing systems with heavy-tailed service times. In: Rykov, V., Singpurwalla, N. & Zubkov, A.M. (eds) *Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications*. Springer International Publishing. pp.110–112. DOI: 10.1007/978-3-319-71504-9
14. Puhalskii, A.A. & Reed, J.E. (2008) On many-server queues in heavy traffic. *Annals of Applied Probability*. 20. pp. 129–195. DOI: 10.1214/09-AAP604
15. Reed, J. (2009) The $G/GI/N$ queue in the Halfin-Whitt regime. *Annals of Applied Probability*. 19(6). pp. 2211–2269. DOI: 10.1214/09-AAP609
16. Fralix, B.H. & Adan, I.J.B.F. (2009) An infinite-server queue influenced by a semi-Markovian environment. *Queueing Systems*. 61. pp. 65–84. DOI: 10.1007/s11134-008-9100-y
17. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2015) *Beskonechnolinyenyne sistemy i seti massovogo obsluzhivaniya* [Infinite-linear systems and networks of mass maintenance]. Tomsk: NTL.
18. Machihara, F. (1986) An infinitely-many-server queue with Markov renewal arrivals and hyperexponential service times. *Journal of the Operations Research Society of Japan*. 29. pp. 338–351. DOI: 10.15807/jorsj.29.338
19. Massey, W.A. & Whitt, W. (1993) Networks of infinite-server queues with nonstationary Poisson input. *Queueing Systems*. 13. pp. 183–250. DOI: 10.1007/BF01158933
20. Ramaswami, V. & Neuts, M. (1980) Some explicit formulas and computational methods for infinite-server queues with a phase-type arrival. *Journal of Applied Probability*. 17. pp. 498–514. DOI: 10.2307/3213039
21. Van Doorn, E.A. & Jagers, A.A. (2004) A note on the $GI/GI/\infty$ system with the identical service and interarrival-time distributions. *Queueing Systems*. 47. pp. 45–52. DOI: 10.1023/B:QUES.0000032799.30173.b7
22. Bocharov, P.P. & Pechinkin, A.V. (1995) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [The theory of queueing]. Moscow: RUDN University.
23. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2013) Investigation of the queueing system $HGI|GI|_\infty$. *Vestnik Tomskogo gosudar-stvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 75–83. (In Russian).
24. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2014) Asymptotic analysis of a multistage queueing system with a high-rate renewal arrival process. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 50(2). pp. 163–171. DOI: 10.3103/S8756699014020083
25. Nazarov, A.A. & Moiseev, A.N. (2013) Analysis of an open non-Markovian $GI-(GI|_\infty)^K$ queueing network with high-rate renewal arrival process. *Problems of Information Transmission*. 49(2), pp. 167–178. DOI: 10.1134/S0032946013020063