

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/55/7

Е.С. Вячкин, В.О. Каледин, Е.В. Решетникова, Е.А. Вячкина, А.Е. Гилева

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СТАТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ КОНСТРУКЦИЙ С НЕСЖИМАЕМЫМИ СЛОЯМИ

Рассматривается однопараметрическая математическая модель деформирования слоистой среды, содержащей чередующиеся упругие и объемно несжимаемые слои. Используется регуляризация некорректной задачи по А.Н. Тихонову с параметром, обратным к модулю объемной сжимаемости. Численная схема на основе метода конечных элементов сводится к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей коэффициентов, линейно зависящей от параметра, а искомые поля перемещений и напряжений вычисляются как предел решения регуляризованной задачи. Сеточная сходимость исследована на контрольном примере, допускающем аналитическое решение.

Ключевые слова: *слоистые тела вращения, упругость, дискретная схема, несжимаемость, регуляризация, сходимость.*

Слоистые структуры, образованные чередованием слоёв с различающимися жесткостями, находят применение в конструкциях высоконагруженных опор в автомобилестроении, мостостроении [1], двигателестроении [2] и других областях техники. Многослойные опоры, как правило, содержат чередующиеся эластомерные прослойки и упругие армирующие элементы из стали или полимерных композиционных материалов. Наибольшее распространение получили многослойные сферические резинометаллические опоры [1]. Прочность таких опор лимитируется армирующими слоями – вкладышами, а слои эластомера играют вспомогательную роль и служат для перераспределения опорного давления между вкладышами.

Традиционные методы расчёта и проектирования многослойных опор базируются на модели многослойной оболочки [3], развитой в [4] применительно к слоистым структурам, подверженным преимущественно действию давления вдоль нормали к слоям. Однако область применимости модели оболочки ограничивается опорами, толщина которых достаточно мала по отношению к радиусу сферы.

Поэтому в последние десятилетия развиваются методы расчёта, основанные на конечно-элементном моделировании опор, содержащих эластомерные слои [5–7]. Дискретные схемы потенциально позволяют учесть эффекты, представляющиеся существенными для моделирования конструкций, содержащих эластомеры: геометрическую нелинейность, физическую нелинейность эластомера и малую объемную сжимаемость. Так, в работе [5] на основе общей методики решения геометрически нелинейных задач [8, 9] получено численное решение задачи об осесимметричном деформировании резинового амортизатора при сжатии между двумя плоскими штампами. В монографии [6] подробно описаны гибридные конечно-элементные схемы для расчёта деформирования слабо сжимаемых и объёмно-несжимаемых материалов. В [7] конечно-элементное моделирование в ком-

плексе Ansys используется для расчёта напряжённого состояния резинометаллической опоры поворотного сопла, при этом отмечается, что инженерных методик, учитывающих работу эластомера в составе двигательной установки, не существует. Заметим, что напряжённое состояние эластомерных слоёв оказалось в этом случае близким к гидростатическому, что позволило авторам [7] предложить как возможное направление исследований представление реакции эластомера как «гидравлического клина». Это уменьшает трудоёмкость расчёта и приближает методику к потребностям практики проектирования, поскольку решение трёхмерной задачи требует значительных вычислительных ресурсов. Альтернативой может быть разработка более экономичной численной схемы.

В зависимости от целей моделирования, определяющие уравнения эластомера в известных работах принимаются такими, чтобы описать только существенные особенности их свойств. Наиболее общая формулировка, предполагающая учёт реологических свойств [10], необходима для описания процессов длительного деформирования. Такой уровень описания материала используется, как правило, при одновременном принятии гипотез слоистых оболочек [11]. Поэтому при кратковременном нагружении и более реалистичной модели деформирования применяются более простые определяющие уравнения эластомера на основе потенциала Муни – Ривлина [12], потенциала Трелоара [13] и различных асимптотических представлений. Так, в [14] обсуждается построение определяющих уравнений для эластомера, находящегося в состоянии продольного сдвига и кручения при конечных деформациях, в [15] предложены приближённые уравнения третьего порядка, в [16] рассматривается продольный сдвиг и кручение резиновой втулки. Следует отметить, что построение определяющих уравнений гиперупругого материала требует большого объёма экспериментальных данных.

Потребность в первую очередь обеспечить прочность армирующих слоёв на этапе проектирования, когда экспериментальных данных недостаточно, вынуждает использовать для эластомера модель упругого материала. Такая постановка использована также в [5] при анализе резиновой втулки без армирующих слоёв при больших перемещениях. Особенностью сеточных методов в задачах с большим числом степеней свободы является целесообразность последовательных линеаризаций [17], что усиливает актуальность исследований в рамках моделей теории упругости, в том числе – модели линейного несжимаемого неогуковского материала.

В монографии [4] указано соотношение модуля объёмного сжатия и модуля сдвига – в диапазоне от $3 \cdot 10^3$ до $8 \cdot 10^3$, что соответствует коэффициенту Пуассона 0.49982–0.49993. Близость этой величины к 0.5 является одним из аргументов в пользу неогуковской модели, в которой достаточно измерение только модуля сдвига. Рассмотрение совместного деформирования эластомера и армирующих слоёв, для которых характерны модули упругости порядка 10^7 МПа, приводит к ухудшению обусловленности разрешающих уравнений, при котором погрешность решения системы уравнений превышает невязку в 10^7 раз. Это является дополнительным аргументом в пользу модели несжимаемого эластомера, по сравнению со слабо сжимаемым, при построении эффективной численной схемы расчёта.

Вопросы сходимости и точности конечно-элементных схем для слабо сжимаемых и несжимаемых материалов подробно обсуждаются в монографии [6]. Показано, что для слабо сжимаемых материалов гибридные схемы, с использованием функционала Васидзу, обладают большей точностью, чем изопараметрические элементы на основе функционала Лагранжа. Однако функционал Васидзу не об-

ладает выпуклостью, и численные схемы на его основе приводят к системам линейных уравнений, не обладающих положительной определённой, что затрудняет апостериорную оценку погрешности решения.

Поэтому представляют интерес эффективные численные схемы для расчёта слоистых структур с чередующимися эластомерными и высокомодульными слоями, при явном включении в модель слоёв с различными характеристиками, на основе выпуклого функционала Лагранжа. Одна из таких схем предложена в [18, 19] на основе регуляризации по А.Н. Тихонову и вычисления предела решения регуляризованной задачи. Целью настоящей работы является исследование сеточной сходимости этой схемы и чувствительности к начальному параметру регуляризации.

Однопараметрическая математическая модель деформирования слоистых структур, содержащих объемно-несжимаемые слои

Рассмотрим осесимметричную конструкцию, содержащую чередующиеся высокомодульные ортотропные и изотропные объемно-несжимаемые упругие слои с высокой сдвиговой податливостью, выделенные чёрным цветом в продольном сечении (рис. 1).

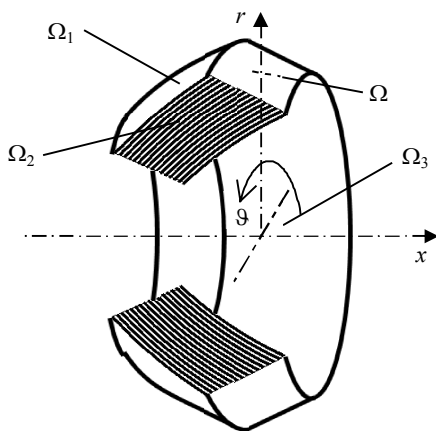


Рис. 1. Схема расположения слоёв: Ω – тело вращения, Ω_1 – жесткое основание, Ω_2 – продольное сечение, Ω_3 – нагруженная поверхность

Fig. 1. Arrangement of layers: Ω is the body of revolution, Ω_1 is the rigid base, Ω_2 is the longitudinal section, and Ω_3 is the loaded surface

Материал высокомодульных армирующих слоёв считаем упругим, а деформации достаточно малыми, чтобы можно было принять определяющее уравнение в виде линейного закона Гука [20]:

$$\sigma_{ij} = d_{ijkl} e_{kl}, \quad (1)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; e_{kl} – компоненты линейного тензора деформаций; d_{ijkl} – компоненты тензора упругости.

Для эластомера примем обобщенный закон Гука в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \cdot \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (2)$$

где $\Theta = e_{ii}$ – объемная деформация; λ, μ – постоянные Ламе; δ_{ij} – симметричный символ Кронекера.

Уменьшение объемной сжимаемости материала приводит к стремлению постоянной λ в бесконечность, в результате чего объемная деформация Θ в пределе равна нулю, и уравнение (2) в пределе не разрешимо относительно деформаций. Регуляризация (2) состоит в искусственном принятии конечного значения $\lambda = \lambda_0$. Очевидно, в этом случае равенству (2) может быть придана форма (1).

С учётом этого сформулируем вариационную задачу: найти перемещения $u_i \in C^0(\Omega)$, равные нулю на границе Ω_1 и доставляющие минимум функционалу Лагранжа

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} e_{ij} d_{ijkl} e_{kl} d\Omega - \int_{\Omega_3} u_i \sigma_{ij} n_j d\Omega_3, \quad (3)$$

где n_j – координаты единичного вектора внешней нормали к поверхности Ω_3 , деформации под интегралом выражены через перемещения $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$.

Условие $u_i|_{\Omega_1} = 0$ является главным граничным условием этой вариационной задачи, а условия сопряжения на границах раздела слоёв и граничные условия в напряжениях на границе Ω_3 – естественными граничными условиями.

Дискретная схема для такой вариационной задачи хорошо известна [6, 17]. Представим искомые перемещения в виде линейной комбинации базисных функций $\varphi_{\Gamma} \in C^0(\Omega)$:

$$u_i = \varphi_{\Gamma} \cdot u_i^{\Gamma}, \quad (4)$$

где u_i^{Γ} – значение перемещения u_i в узле Γ сетки (множество узлов не содержит точек поверхности Ω_1 , на которой перемещения заданы равными нулю в граничных условиях).

Учитывая сделанные выше замечания относительно плохой обусловленности, целесообразно уменьшить число степеней свободы. Для этого разложим искомые перемещения в ряд Фурье по угловой координате ϑ :

$$u_i(x, r, \vartheta) = u_i^0(x, r) + \sum_k \left[\hat{u}_i^k(x, r) \sin k\vartheta + \tilde{u}_i^k(x, r) \cos k\vartheta \right]. \quad (5)$$

Сетка будет образована только узлами продольного сечения Ω_2 (рис. 1) в плоскости (x, r) , а амплитуды гармоник $u_i^0, \hat{u}_i^n, \tilde{u}_i^n$ в узлах являются искомыми узловыми неизвестными. Матрицу-столбец всех узловых неизвестных обозначим через U . Тогда условие минимума функционала (3) примет вид системы линейных уравнений:

$$KU = R, \quad K_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial U_i \partial U_j}, \quad R_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial U_i} \Big|_{U=0}. \quad (6)$$

Матрица жесткости K симметрична, положительно определена и имеет ленточную структуру, что позволяет использовать при решении метод Холецкого, устойчивый к накоплению погрешности округлений.

Интеграл по объёму в (3) – энергию деформации – представим в виде суммы интегралов: по объёму армирующих и по объёму податливых слоёв, для которых принят закон Гука (2). Первый из этих интегралов не включает параметра регуляризации, в то время как второй с учетом

$$d_{ijkl} = d_{ijkl}^{\alpha} + \lambda d_{ijkl}^{\beta} \quad (7)$$

можно представить в виде

$$\int_{\Omega} e_{ij} d_{ijkl} e_{kl} d\Omega = \Pi^{\alpha} + \lambda \Pi^{\beta}, \quad (8)$$

где Π^{α} – энергия сдвиговой деформации, Π^{β} – энергия объемной деформации, не зависящие от λ . Тогда, варьируя λ , получим следующее представление матрицы K в (6):

$$K(\lambda) = K(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)C, \quad C_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi^{\beta}}{\partial U_i \partial U_j}. \quad (9)$$

Введём малый параметр α , обратный к $\lambda - \lambda_0$. Система уравнений относительно узловых неизвестных примет вид

$$\left[K + \frac{1}{\alpha} C \right] U(\alpha) = R, \quad (10)$$

причём матрица C симметрична, вырождена и полуположительно определена. Корректность поставленной алгебраической задачи показана в [18]. Итерационный алгоритм поиска предела решения регуляризованной задачи, обладающий сверхлинейной сходимостью, построен в [19].

Исследование сеточной сходимости решения

Представленный алгоритм реализован в среде функционально-объектного программирования «Алгозит» [20]. Для исследования сходимости численного решения сравним его с аналитическим. В качестве тестового примера рассмотрим задачу о толстостенной трубе под действием внутреннего давления (рис. 2) [21].

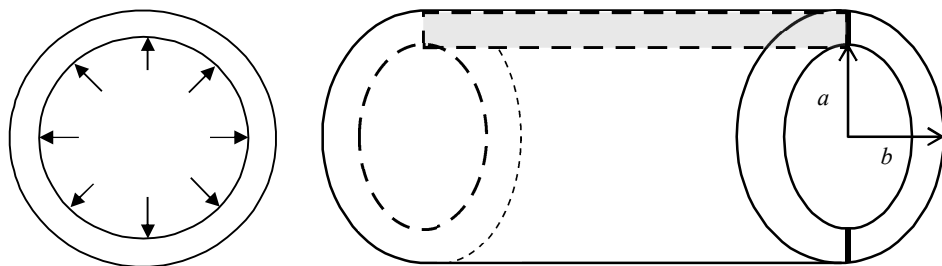


Рис. 2. Схема нагружения трубы
Fig. 2. Loading condition for a pipe

Обозначим a – внутренний радиус; b – внешний радиус трубы равный $1.2a$. На внутреннюю поверхность приложено давление q МПа, при этом растягивающая сила равна нулю. Труба выполнена из несжимаемого материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.5$.

Деформации определяются по формулам [21]

$$\varepsilon_{rr} = \frac{dU_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \text{const.} \quad (11)$$

Напряжения определяются следующим образом [21]:

$$\sigma_{rr} = A + \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz} + 2\nu A, \quad (12)$$

где $A = q \frac{a^2}{b^2 - a^2}$, $B = -q \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}$, r – радиальная координата.

Для рассматриваемой задачи примем $\varepsilon_{zz} = 0$, запретив таким образом осевые деформации и перемещения. Тогда осевые напряжения примут вид

$$\sigma_{zz} = 2\nu A. \quad (13)$$

Радиальные перемещения определяются по формуле [21]

$$U_r = \frac{r}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})], \quad (14)$$

где E – модуль упругости.

Подставим (12) и (13) в (14)

$$U_r = \frac{r}{E} \left[A - \frac{B}{r^2} - \nu \left(A + \frac{B}{r^2} + 2\nu A \right) \right]. \quad (15)$$

Подставив в (15) значение $\nu = 0.5$, имеем

$$U_r = \frac{3B}{2Er}. \quad (16)$$

Подставив выражения для B в уравнение (16) получим формулу для радиальных перемещений трубы из объемно-несжимаемого материала:

$$U_r = \frac{3qa^2b^2}{2Er(b^2 - a^2)}. \quad (17)$$

Используя (16), вычислим максимальные и минимальные теоретические перемещения: $U_{r\min} = 0.021714qa$, $U_{r\max} = 0.026056qa$ при $E = 0.03$ ГПа.

Для численного решения данной задачи продольное сечение трубы разбивалось на четырехугольные четырехузловые конечные элементы следующими видами сеток: 1 – $0.1a \times 0.1a$; 2 – $0.05a \times 0.05a$; 3 – $0.025a \times 0.025a$; 4 – $0.0125a \times 0.0125a$; 5 – $0.00625a \times 0.00625a$. Регуляризация выполнялась при различных значениях коэффициента Пуассона ν . В каждом случае вычислялся предел решения регуляризованной задачи по методике [18] при ν , стремящемся к 0.5.

Для анализа использовались следующие решения предложенной задачи:

- 1) предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0.35$,
- 2) предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0.45$,
- 3) предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0.49$,
- 4) решение задачи при $\nu = 0.49$,
- 5) решение задачи при $\nu = 0.499$.

Первые три варианта расчета проведены по изложенной выше методике. В 4-м и 5-м вариантах область рассматривалась как сжимаемая, с коэффициентами Пуассона, близкими к 0.5, т.е. предел при $\nu \rightarrow 0.5$ не вычислялся.

Построим зависимость значений минимальных перемещений от логарифма числа элементов по толщине N и сравним с вычисленным аналитически значением (рис. 3). Из графиков видно, что предложенный подход позволяет получить точную сходимость при любом значении параметра регуляризации, при этом для значений ν , равных 0.35 и 0.45, даже на самой крупной сетке получены перемещения, близкие к аналитически вычисленным. Решение задачи для сжимаемой среды с $\nu = 0.49$ при сгущении сетки не позволяет выйти на аналитически полученное значение перемещений. Решение задачи для сжимаемой среды с $\nu = 0.499$ при первых двух разбиениях, когда сетка более крупная, позволяет получить перемещения, значения которых отличаются от аналитических на 10–25 %. Сгущение сетки позволяет выйти на полученные аналитически значения перемещений, но при этом размер конечного элемента должен быть меньше радиуса трубы примерно в 200 раз. То же самое получается и для максимальных перемещений.

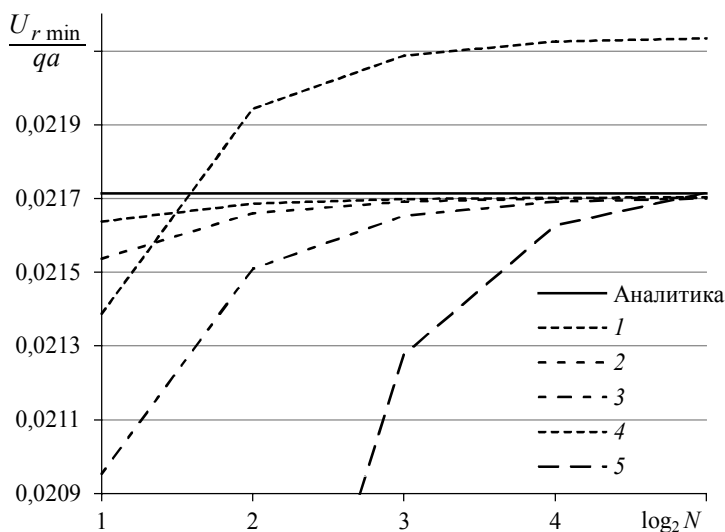


Рис. 3. Минимальные значения перемещений: 1 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0.35$, 2 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0.45$, 3 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0.49$, 4 – решение задачи при $\nu = 0.49$, 5 – решение задачи при $\nu = 0.499$

Fig. 3. Displacement minimums: 1, limit of the regularized problem solution at $\nu = 0.35$; 2, limit of the regularized problem solution at $\nu = 0.45$; 3, limit of the regularized problem solution at $\nu = 0.49$; 4, problem solution at $\nu = 0.49$; and 5, problem solution at $\nu = 0.499$

Для сравнения вычисленных деформаций и напряжений будем использовать зависимость отношения деформаций и напряжений, полученных численно, к деформациям и напряжениям, вычисленным аналитически. Построим график только для ϵ_r , так как $\epsilon_z = 0$, а $\epsilon_\theta = -\epsilon_r$ (рис. 4).

Из графика видно, что решение задачи для сжимаемой среды с $\nu = 0.49$ имеет существенно большую погрешность для любого разбиения. Решение задачи для сжимаемой среды с $\nu = 0.499$ при сгущении сетки позволяет значительно уменьшить погрешность, однако для $\log_2 N = 1$ она составляет 25 %, а для $\log_2 N = 2$ –

9 %, что является неприемлемым. При использовании предложенного подхода все значения параметра регуляризации позволяют получить приемлемую погрешность для любого разбиения сетки, при этом минимальная погрешность получается при использовании параметра регуляризации 0.35.

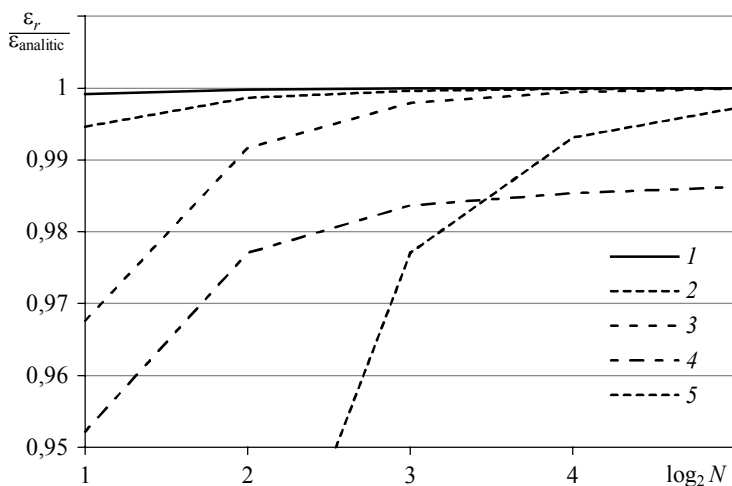


Рис. 4. Значения $\varepsilon_r / \varepsilon_{analytic}$: 1 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0.35$, 2 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0.45$, 3 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0.49$, 4 – решение задачи при $\nu = 0.49$, 5 – решение задачи при $\nu = 0.499$

Fig. 4. Ratio of the ε_r to the $\varepsilon_{analytic}$: 1, limit of the regularized problem solution at $\nu = 0.35$; 2, limit of the regularized problem solution at $\nu = 0.45$; 3, limit of the regularized problem solution at $\nu = 0.49$; 4, problem solution at $\nu = 0.49$; and 5, problem solution at $\nu = 0.499$

Из графиков видно, что приемлемый уровень точности расчета напряжений для любой сетки достигается при параметре регуляризации, соответствующем $\nu = 0.35$ и $\nu = 0.45$. При параметре регуляризации, соответствующем $\nu = 0.49$, решение выходит на приемлемый уровень только при сгущении сетки.

Выводы

В задачах расчета напряженно-деформированного состояния, при работе с слабосжимаемыми материалами, принято использовать модель деформирования сжимаемой среды с коэффициентами Пуассона, близкими к 0.5. Однако решение тестовых задач показало, что при использовании $\nu = 0.49$ вычисленные значения перемещений отличаются от теоретических на 3–4 %. При расчете деформаций сгущение сетки позволило уменьшить погрешность с 5 до 1.5 %, а для напряжений – с 15 до 2 %. Если использовать $\nu = 0.499$, то отклонение перемещений от теоретических для крупной сетки составляет 26 %. Использование сгущения сетки позволяет уменьшить эту погрешность до уровня менее 0.5 %. При расчете деформаций и напряжений сгущение сетки позволило уменьшить погрешность с 15 % до приемлемого уровня. Таким образом, при использовании математической

модели деформирования сжимаемой среды с коэффициентами Пуассона, близкими к 0.5, возникают следующие проблемы:

1) неизвестно насколько надо сгущать сетку, чтобы получить решение с приемлемой точностью;

2) при сильном сгущении сетки расчеты требуют большого количества времени и мощностей компьютеров, при этом неизвестен необходимый объем оперативной памяти компьютера для требуемого сгущения сетки в реальных задачах.

Этих недостатков можно избежать, если использовать предложенный подход с параметрами регуляризации, соответствующими значению $\nu = 0.35-0.45$. В этом случае численное решение устойчиво, а погрешность вычисленных перемещений, напряжений и деформаций на любом виде сетки менее 0.5 %. При больших ν для достижения требуемой точности необходимо сгущение сетки в два и более раза. Это связано с тем, что при приближении коэффициента Пуассона к значению 0.5 решение задачи становится неустойчивым. Предложенный подход, состоящий в явном вычислении предела решения регуляризованной задачи, позволяет использовать параметр регуляризации с гораздо меньшими значениями, такими, как $\nu = 0.35$, и при этом получать устойчивое решение. Поэтому рационально выбирать меньшие значения параметра регуляризации.

Таким образом, предложенный подход может быть использован для решения технических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рекомендации по проектированию и установке полимерных опорных частей мостов.* М.: Росавтодор, 2008. 89 с.
2. *Петренко В.И.* Управляемые энергетические установки на твердом ракетном топливе. М.: Машиностроение, 2003. 464 с.
3. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
4. *Мальков В.М.* Механика многослойных эластомерных конструкций. СПб.: СПбГУ, 1998. 320 с.
5. *Димитриенко Ю.И., Царёв С.М., Веретенников А.В.* Разработка метода конечных элементов для расчета конструкций из несжимаемых материалов с большими деформациями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2007. № 3. С. 69–83.
6. *Бате К.-Ю.* Методы конечных элементов. М: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 1024 с.
7. *Ощепков А.Н.* Исследование напряженно-деформированного состояния эластичного опорного шарнира поворотного управляющего сопла ракетного двигателя твердого топлива в программном комплексе Ansys Workbench // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации. 2016. Т. 1. С. 116–118.
8. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
9. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
10. *Пелевин А.Г., Свистков А.Л.* Алгоритм поиска констант для модели механического поведения резины // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2009. № 1. С. 85–92.
11. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Численное моделирование нелинейно-наследственного поведения пространственно-армированных композиционных сред // Изв. Алтайского государственного университета. 2012. № 1-1. С. 103–106.
12. *Mooney M.* A theory of large elastic deformation // J. Appl. Phys. 1940. V. 11. P. 582–592.
13. *Трелоар Л.Р.Г.* Физика упругости каучука: пер. с англ. под ред. Е.В. Кувшинского. М.: ИИЛ, 1953. 240 с.

14. Жуков Б.А. Нелинейное взаимодействие конечного продольного сдвига и конечного кручения втулки из резиноподобного материала // Изв. Российской академии наук. Механика твердого тела. 2015. № 3. С. 127–135.
15. Колтак Е.П. Полый цилиндр из несжимаемого материала при больших деформациях // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела. – Труды научной школы академика В.В. Новожилова. 1998. № 1. С. 96–117.
16. Акчурин Т.Р., Мальков В.М. Теоретическое и экспериментальное исследование кручения эластомерного цилиндрического шарнира // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2004. № 1. С. 73–80.
17. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 465 с.
18. Вячкин Е.С., Решетникова Е.В., Аульченко С.М., Рябков А.П., Вячкина Е.А. Однопараметрическая модель деформирования слоистых структур, содержащих объемно-несжимаемые слои // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 6. С. 120–123.
19. Каледин В.О., Решетникова Е.В., Равковская Е.В. Алгоритм расчета напряжений в упругой среде с внутренними кинематическими связями // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Материалы XXIV Всероссийской конференции. Новосибирск, 2015. С. 64–66.
20. Каледин В.О. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Среда функционально-объектного программирования «Алгозит» // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ, 06 марта 2017, № 2017612895.
21. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.

Статья поступила 09.11.2017 г.

Vyachkin E.S., Kaledin V.O., Reshetnikova E.V., Vyachkina E.A., Gileva A.E. MATHEMATICAL MODELING OF STATIC DEFORMATION OF A LAYERED CONSTRUCTION WITH INCOMPRESSIBLE LAYERS *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 55. pp. 72–83

DOI 10.17223/19988621/55/7

Keywords: layered bodies of revolution, elasticity, discrete scheme, incompressibility, regularization, convergence.

This paper presents a mathematical model of static deformation of a layered medium with alternating layers of different stiffness. The proposed regularization of the problem is implemented using the parameter inverse to the volume compressibility modulus. The obtained numerical results are compared with analytical solution to verify a numerical algorithm convergence. The problem of stress-strain state calculation in a thick-walled pipe under internal pressure is considered as a test problem. Test problem solution is obtained applying the proposed methodology using regularization parameters corresponding to the Poisson ratio of 0.35, 0.45, and 0.49. The problem with compressible medium is also solved at the Poisson ratio of 0.49 and 0.499. The grid convergence of the problem solution is analyzed and the relative error is calculated. When considering the calculations obtained for compressible media at the Poisson ratio equal to 0.49, the relative error as regard to analytical solution exceeds an acceptable level, and when the ratio is of 0.499 for coarse meshes, the calculated results are different from analytical data. When using the proposed approach with regularization parameters corresponding to a range of Poisson ratio from 0.35 up to 0.45, the numerical solution is stable and the error obtained for calculated displacements, stresses, and strains for any kind of grid is less than 0.5%. Thus, in this paper, the rational value of regularization parameter is determined and the special approach that can be used to solve real technical problems is proposed.

VYACHKIN Evgeniy Sergeevich (Novokuznetsk Institute (Branch) of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russian Federation). E-mail: viachkine@mail.ru

KALEDIN Valeriy Olegovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Novokuznetsk Institute (Branch) of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russian Federation). E-mail: vkaled@mail.ru

RESHETNIKOVA Elena Vasil'evna (Candidate of Technical Sciences, Novokuznetsk Institute (Branch) of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russian Federation). E-mail: elenares@yandex.ru

VYACHKINA Elena Aleksandrovna (Candidate of Physics and Mathematics, Novokuznetsk Institute (Branch) of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russian Federation). E-mail: SedovaEA@yandex.ru

GILEVA Anna Evgen'evna (Novokuznetsk Institute (Branch) of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russian Federation). E-mail: anna310591@yandex.ru

REFERENCES

1. *Rekomendatsii po proektirovaniyu i ustanovke polimernykh opornykh chastey mostov* [Recommendations for the design and installation of polymeric support of a bridge] (2008) Moscow: Rosavtodor.
2. Petrenko V.I. (2003) *Upravlyaemye energeticheskie ustanovki na tverdom raketnom toplive* [Managed power plants for solid propellants]. Moscow: Mashinostroenie.
3. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. (1980) *Mekhanika mnogosloynnykh konstruksiy* [Mechanics of multilayered structures]. Moscow: Mashinostroenie.
4. Mal'kov V.M. (1998) *Mekhanika mnogosloynnykh elastomernykh konstruksiy* [Mechanics of multilayered elastomeric structures]. Saint-Petersburg: SPbGU.
5. Dimitrienko Yu.I., Tsariov S.M., Veretennikov A.V. (2007) Razrabotka metoda konechnykh elementov dlya rascheta konstruksiy iz neszhimaemykh materialov s bol'shimi deformatsiyami [Development of a finite element method for calculation of structures made of incompressible materials with large deformations]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 3. pp. 69–83.
6. Bathe K.Yu. (1996) *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice Hall.
7. Oshchepkov A.N. (2016) Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya elastichnogo opornogo sharnira povorotnogo upravlyayushchego sopla raketnogo dvigatelya tverdogo topliva v programnom komplekse Ansys Workbench [Investigation of a stress-strain state of elastic support hinge of a rotary control nozzle of solid fuel rocket engine using Ansys Workbench software package]. *Aerokosmicheskaya tekhnika, vysokie tekhnologii i innovatsii*. 1. pp. 116–118.
8. Truesdell C. (1977) *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. New York: Academic Press.
9. Korobeynikov S.N. (2000) *Nelineynoe deformirovanie fizicheskikh tel* [Nonlinear deformation of solids]. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN.
10. Pelevin A.G., Svistkov A.L. (2009) Algoritm poiska konstant dlya modeli mekhanicheskogo povedeniya reziny [Search algorithm for the constants of a model of rubber mechanical behavior]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 1. pp. 85–92.
11. Nemirovskiy Yu.V., Yankovskiy A.P. (2012) Numerical simulation of behaviour of the three-dimensional reinforcement composite materials with nonlinear memory. *Altai State University Journal*. 1. pp. 103–106.
12. Mooney M. (1940) A theory of large elastic deformation. *J. Appl. Phys.* 11. pp. 582–592. DOI: 10.1063/1.1712836.
13. Treloar L.R.G. (1953) *Fizika uprugosti kauchuka* [The physics of rubber elasticity]. Ed. by E.V. Kuvshinskiy. Moscow: IIL.
14. Zhukov B.A. (2015) Nelineynoe vzaimodeystvie konechnogo prodol'nogo sdviga i konechnogo krucheniya vtulki iz rezinopodobnogo materiala [Nonlinear interaction of finite longitu-

- dinal shear with finite torsion of a rubber-like bushing]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 50(3). pp. 127–135.
15. Kolpak E.P. (1998) Polyty tsilindr iz neszhimaemogo materiala pri bol'shikh deformatsiyakh [Hollow cylinder of incompressible material under large deformations]. *Nelineynye problemy mekhaniki i fiziki deformiruемого tela. Trudy nauchnoy shkoly akademika V.V. Novozhilova*. 1. pp. 96–117.
 16. Akchurin T.R., Mal'kov V.M. (2004) Teoreticheskoe i eksperimental'noe issledovanie krucheniya elastomernogo tsilindricheskogo sharnira [Theoretical and experimental investigation of twisting of an elastomeric cylindrical bearing]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya – Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 1. pp. 73–80.
 17. Oden J. (1976) *Konechnye elementy v nelineynoy mekhanike sploshnykh sred* [Finite elements of nonlinear continua]. Moscow: Mir.
 18. Vyachkin E.S., Reshetnikova E.V., Aul'chenko S.M., Ryabkov A.P., Vyachkina E.A. (2016) Odnoparametricheskaya model' deformirovaniya sloistyykh struktur, sodержashchikh ob'emno-neszhimaemye sloi [The one-parametric model of the deformation of layered structures containing three-dimensional incompressible layers]. *Nauchno-tehnicheskiiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technological Volga Region Bulletin*. 6. pp. 120–123.
 19. Kaledin V.O., Reshetnikova E.V., Ravkovskaya E.V. (2015) Algoritm rascheta napryazheniy v uprugoy srede s vnutrennimi kinematischeskimi svyaziyami [Calculating algorithm for stresses in an elastic medium with internal kinematic bonds]. *Chislennyye metody resheniya zadach teorii uprugosti i plastichnosti. Materialy XXIV Vserossiyskoy konferentsii*. pp. 64–66.
 20. Kaledin V.O. (2017) *Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM «Sreda funktsional'no-ob'ektnogo programmirovaniya «Algozit»* [Certificate of the state registration for computer program «Software environment of a functional object oriented programming «Algozit»]. № 2017612895.
 21. Rabotnov Yu.N. (1988) *Mekhanika deformiruемого tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids]. Moscow: Nauka.