ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 45

УДК 519.21
DOI: 10.17223/19988605/45/4

Л.А. Нежельская, Е.Ф. Сидорова

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОГО СИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ

Рассматривается задача оптимальной оценки состояний обобщенного синхронного потока второго порядка. Определяются апостериорные вероятности состояний потока, учитывающие эффект непродлевающегося мертвого времени. Предлагается алгоритм оптимального оценивания состояний, основанный на критерии максимума апостериорной вероятности. Приводятся численные результаты статистических экспериментов, полученные с использованием расчетных аналитических формул и аппарата имитационного моделирования.
Ключевые слова: обобщенный синхронный поток событий второго порядка; состояние потока; оптимальная оценка состояний; непродлевающееся мертвое время; критерий максимума апостериорной вероятности.

На современном этапе развития компьютерной техники и информационных технологий происходит усложнение структуры телекоммуникационных систем связи, глобальных компьютерных сетей и спутниковых сетей связи, для которых характерны наиболее сложные и актуальные исследования в сфере систем массового обслуживания (СМО) [1, 2]. Исследованию входящих случайных потоков событий, математической моделью которых, в частности, являются дважды стохастические потоки событий, посвящены работы [3–8].

При изучении последних выделяют два основных класса задач – оценивание состояний потока [9–11] и оценивание его параметров [12–15] по наблюдаемым моментам наступления событий.

В работах [16, 17] решена задача оптимального оценивания состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка при его полной наблюдаемости. Однако наблюдаемое событие может вызвать период мертвого времени, т.е. повлечь за собой недоступность наблюдению в этот период последующих событий потока [18, 19]. Таким образом, в настоящей статье, являющейся непосредственным развитием работ [16, 17], решается задача об оптимальной оценке состояний потока в условиях его частичной наблюдаемости, т.е. при наличии непродлевающегося мертвого времени, по методу максимума апостериорной вероятности, которая представляет наиболее полную информацию о потоке событий, содержащуюся в наблюдаемой выборке, и обеспечивает минимум полной (безусловной) вероятности вынесения ошибочного решения о его состоянии [20, 21].

1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный синхронный дважды стохастический поток событий второго порядка (далее – поток), сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями S_1 и S_2. Далее под i-м состоянием $\lambda(t)$ понимается состояние S_i, $i=1,2$.

Длительность интервала между событиями потока в i-м состоянии определяется случайной величиной $\eta_i = \min(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$, где случайная величина $\xi_i^{(1)}$ распределена по закону $F_i^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, случайная величина $\xi_i^{(2)}$ – по закону $F_i^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$, $i=1,2$; $\xi_i^{(1)}$ и $\xi_i^{(2)}$ – независимые случайные величины. В момент наступления события потока в зависимости от того, какое значение приняла случайная величина η_i, $i=1,2$, процесс $\lambda(t)$ переходит из i-го состояния в j-е, $i \neq j$, или остается

в i-м состоянии, $i = j$, с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_j \mid \lambda_i)$ либо $P_1^{(2)}(\lambda_j \mid \lambda_i)$, $i, j = 1,2$. При этом $P_1^{(1)}(\lambda_j \mid \lambda_i) + P_1^{(1)}(\lambda_i \mid \lambda_i) = 1$, $P_1^{(2)}(\lambda_j \mid \lambda_i) + P_1^{(2)}(\lambda_i \mid \lambda_i) = 1$, $i, j = 1,2$, $i \neq j$. Таким образом, длительность интервала между событиями потока в i-м состоянии процесса $\lambda(t)$ является случайной величиной с функцией распределения $F_i(t) = 1 - e^{-(\lambda_i + \alpha_i)t}$, $i = 1,2$.

В дальнейшем принимается, что имеет место состояние S_i, если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1,2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$).

Подчеркнем, что $\lambda(t)$ – принципиально ненаблюдаемый случайный процесс (скрытый марковский процесс), матрицы инфинитезимальных характеристик которого имеют вид:

$$\boldsymbol{D}_0 = \begin{Vmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & 0 \\ 0 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{Vmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{Vmatrix} \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 \mid \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 \mid \lambda_1) & \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 \mid \lambda_1) \\ \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 \mid \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 \mid \lambda_2) & \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 \mid \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 \mid \lambda_2) \end{Vmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы $\boldsymbol{D}_0$ имеют смысл интенсивностей выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком, недиагональные элементы – интенсивностей переходов из состояния в состояние без наступления события. Элементами матрицы $\boldsymbol{D}_1$ выступают интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события потока.

Имеет место ситуация недоступности наблюдению всех событий потока – каждое зарегистрированное в момент времени t_k событие порождает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока теряются. Наступившие в течение мертвого времени события не вызывают продления его периода, т.е. рассматривается непродлевающееся мертвое время, по окончании которого первое наступившее событие вновь вызывает период ненаблюдаемости длительности T и т.д.

Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где S_1, S_2 – состояния процесса $\lambda(t)$, t_1, t_2,… – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке, штриховкой обозначены периоды мертвого времени; белыми кружками обозначены наблюдаемые события, черными – ненаблюдаемые.

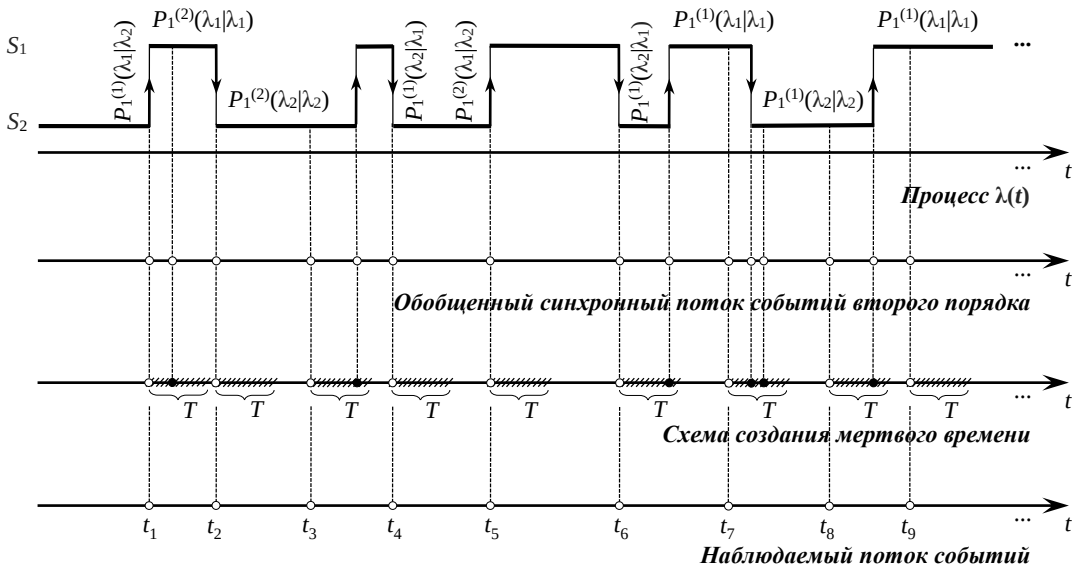


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Цель настоящего исследования заключается в том, чтобы по реализации моментов наступления событий $t_1, t_2, \ldots$ на $(0,t)$ определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i \mid t) = w(\lambda_i \mid t_1, \ldots, t_m, t)$ того,

что в момент окончания наблюдений t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_i$, $i=1,2$, а также на основании полученных формул для $w(\lambda_i\,|\,t)$ ($w(\lambda_1\,|\,t)+w(\lambda_2\,|\,t)=1$) разработать алгоритм оценивания состояний потока (процесса $\lambda(t)$).

2. Оптимальное оценивание состояний потока событий

Момент вынесения решения t о состоянии процесса $\lambda(t)$ принадлежит интервалу (t_k,t_{k+1}), $k=1,2,\ldots$, между соседними событиями наблюдаемого потока. Для интервала (t_0,t_1) момент t лежит между моментом начала наблюдений t_0 и моментом наступления первого событий потока t_1. Длительность интервала (t_k,t_{k+1}) есть величина $\tau_k=t_{k+1}-t_k$, $k=0,1,\ldots$. С другой стороны, так как событие, наблюдаемое в момент времени t_k, порождает период мертвого времени длительности T, то $\tau_k=T+\varsigma_k$, где ς_k – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени t_k+T и моментом наступления следующего события потока t_{k+1}, т.е. имеет место разбиение исходного интервала (t_k,t_{k+1}) на два смежных: первый – полуинтервал $(t_k,t_k+T]$, второй – интервал (t_k+T,t_{k+1}). Подчеркнем, что условия нахождения апостериорной вероятности $w(\lambda_1\,|\,t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ на полуинтервале $(t_k,t_k+T]$ и интервале (t_k+T,t_{k+1}) принципиально разные – на полуинтервале $(t_k,t_k+T]$ поток недоступен наблюдению, в то время как на интервале (t_k+T,t_{k+1}) поток наблюдаем. Кроме того, для нахождения вероятности $w(\lambda_1\,|\,t)$ необходимо точно знать значение длительности мертвого времени T либо предварительно осуществить его оценку, в противном случае отсутствие такой информации делает невозможным нахождение апостериорной вероятности $w(\lambda_1\,|\,t)$ в явном виде. Уточним, что в настоящем исследовании предполагается, что значение T фиксировано и известно точно.

Ситуация полной наблюдаемости исследуемого потока событий, т.е. $T=0$, рассмотрена в работах [16, 17]. В [17] показано, что априорная вероятность $\pi_1(t\,|\,t^0)$ того, что процесс $\lambda(t)$ в момент времени t принимает значение λ_1 при условии, что функционирование потока началось в момент времени t^0, определяется дифференциальным уравнением

$$\begin{gathered}\pi_1'(t\,|\,t^0)=-(\lambda_1+\alpha_1)\pi_1(t\,|\,t^0)+\pi_1(t\,|\,t^0)(\lambda_1P_1^{(1)}(\lambda_1\,|\,\lambda_1)+\alpha_1P_1^{(2)}(\lambda_1\,|\,\lambda_1))+\\+\pi_2(t\,|\,t^0)(\lambda_2P_1^{(1)}(\lambda_1\,|\,\lambda_2)+\alpha_2P_1^{(2)}(\lambda_1\,|\,\lambda_2)),\ \pi_2(t\,|\,t^0)=1-\pi_1(t\,|\,t^0).\end{gathered}\tag{1}$$

Априорная финальная вероятность π_1 первого состояния процесса $\lambda(t)$ является решением уравнения (1) при $t\to\infty$ (или $t^0\to-\infty$) и определяется явной формулой [17]

$$\begin{gathered}\pi_1=[\lambda_2P_1^{(1)}(\lambda_1\,|\,\lambda_2)+\alpha_2P_1^{(2)}(\lambda_1\,|\,\lambda_2)]/a,\\a=\lambda_1P_1^{(1)}(\lambda_2\,|\,\lambda_1)+\alpha_1P_1^{(2)}(\lambda_2\,|\,\lambda_1)+\lambda_2P_1^{(1)}(\lambda_1\,|\,\lambda_2)+\alpha_2P_1^{(2)}(\lambda_1\,|\,\lambda_2).\end{gathered}\tag{2}$$

Апостериорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ в момент t_k наступления события потока задается формулой пересчета [Там же]

$$\begin{gathered}w(\lambda_1\,|\,t_k+0)=W/[(\lambda_2+\alpha_2)+w(\lambda_1\,|\,t_k-0)(\lambda_1+\alpha_1-\lambda_2-\alpha_2)],\ k=1,2,\ldots,\\W=\lambda_2P_1^{(1)}(\lambda_1\,|\,\lambda_2)+\alpha_2P_1^{(2)}(\lambda_1\,|\,\lambda_2)+w(\lambda_1\,|t_k-0)\times\\\times[\lambda_1P_1^{(1)}(\lambda_1\,|\,\lambda_1)+\alpha_1P_1^{(2)}(\lambda_1\,|\,\lambda_1)-\lambda_2P_1^{(1)}(\lambda_1\,|\,\lambda_2)-\alpha_2P_1^{(2)}(\lambda_1\,|\,\lambda_2)].\end{gathered}\tag{3}$$

Апостериорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ на временных интервалах (t_0,t_1) и (t_k,t_{k+1}), $k=1,2,\ldots$, определяется формулой [Там же]

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\, e^{-(\lambda_1+\alpha_1-\lambda_2-\alpha_2)(t-t_k)}}{1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0) + w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\, e^{-(\lambda_1+\alpha_1-\lambda_2-\alpha_2)(t-t_k)}}, \tag{4}$$

$t_k < t < t_{k+1}$, $k = 0,1,\ldots$; $w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$, $k = 1,2,\ldots$, определена в (3), $w(\lambda_1 \mid t_0 + 0) = \pi_1$, π_1 задается (2).

Обратимся к случаю, когда поток функционирует в условиях недоступности наблюдению всех событий потока, т.е. значение длительности мертвого времени $T \neq 0$.

Рассматривается полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, $k = 1,2,\ldots$, на котором событие потока имеет место в граничной точке t_k; на самом полуинтервале события отсутствуют.

Теорема. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ для обобщенного синхронного потока событий второго порядка на полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$, $k = 1,2,\ldots$, определяется формулой

$$w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1 + [w(\lambda_1 \mid t_k + 0) - \pi_1] e^{-a(t-t_k)}, \tag{5}$$

$t_k < t \le t_k + T$; π_1 и a задаются (2), $w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$ определяется формулой пересчета (3).

Доказательство. На полуинтервале $(t_k, t_k + T]$, $k = 1,2,\ldots$, обобщенный синхронный поток событий второго порядка является ненаблюдаемым. Вследствие этого поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ в течение периода мертвого времени T аналогично поведению априорной вероятности $\pi_1(t \mid t^0)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$. Отличие заключается в задании начального значения $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени t_k наступления наблюдаемого события потока. Можно показать, что вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$, $k = 1,2,\ldots$, определяется уравнением (1) с начальным условием $w(\lambda_1 \mid t = t_k) = w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$, $k = 1,2,\ldots$. Интегрируя (1) [22], находим (5). Теорема доказана.

Утверждение. На интервале $(t_k + T, t_{k+1})$, смежном с временным полуинтервалом $(t_k, t_k + T]$, вычисление апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ осуществляется по формуле

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{w(\lambda_1 \mid t_k + T)\, e^{-(\lambda_1+\alpha_1-\lambda_2-\alpha_2)(t-t_k-T)}}{1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T) + w(\lambda_1 \mid t_k + T)\, e^{-(\lambda_1+\alpha_1-\lambda_2-\alpha_2)(t-t_k-T)}}, \tag{6}$$

$t_k + T < t < t_{k+1}$, $k = 1,2,\ldots$; т.е. начальное условие для $w(\lambda_1 \mid t)$ привязывается к моменту времени $t_k + T$, другими словами, в формуле (4) $w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$ заменяется на $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$, вычисленную по (5) при $t = t_k + T$, $t_k + T \le t < t_{k+1}$, $k = 1,2,\ldots$

В момент t_k наступления очередного события наблюдаемого потока, порождающего период мертвого времени, вероятность $w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$ рассчитывается по формуле пересчета (3).

Полученные формулы позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ ($w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$) и алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ (потока) в произвольный момент времени t:

1) в момент начала наблюдений за потоком $t_0 = 0$ задается $w(\lambda_1 \mid t_0 + 0) = w(\lambda_1 \mid t_0 = 0) = \pi_1$, где π_1 вычисляется по формуле (2);

2) по формуле (4) для $k = 0$ в любой момент времени t, $t_0 < t < t_1$, где t_1 – момент наблюдения первого события потока, рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$, при этом начальное условие $w(\lambda_1 \mid t_0 + 0)$ для $w(\lambda_1 \mid t)$ определено на предыдущем шаге;

3) в момент времени t_1 по формуле (4) для $k = 0$ вычисляется $w(\lambda_1 \mid t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0)$;

4) k увеличивается на единицу; с использованием формулы пересчета (3) для апостериорной вероятности для $k = 1$ рассчитывается $w(\lambda_1 \mid t_1 + 0)$ – начальное условие для $w(\lambda_1 \mid t)$ в формуле (5);

5) в любой момент t, $t_1 < t < t_1 + T$, по формуле (5) для $k = 1$ вычисляется $w(\lambda_1 \mid t)$;

6) по формуле (5) для $k=1$ рассчитывается $w(\lambda_1 \mid t=t_1+T)$ – начальное условие для $w(\lambda_1 \mid t)$ на следующем шаге алгоритма;

7) для $k=1$ по формуле (6) вычисляется $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t, $t_1+T<t<t_2$, где t_2 – момент наблюдения второго события потока;

8) в момент времени t_2 по формуле (6) для $k=1$ рассчитывается $w(\lambda_1 \mid t_2)=w(\lambda_1 \mid t_2-0)$;

9) алгоритм переходит на шаг 4, шаги 4–8 последовательно повторяются для $k=2$ и т.д.

Параллельно по ходу вычисления $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t выносится решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ (потока) по критерию максимума апостериорной вероятности [20].

3. Результаты численных расчетов

Для получения численных результатов разработанный алгоритм вычисления вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ реализован средствами языка C#, Microsoft Visual Studio 2013, посредством последовательного выполнения двух этапов – имитационного моделирования [23] обобщенного синхронного потока второго порядка с непродлевающимся мертвым временем и вычисления вероятностей $w(\lambda_1 \mid t)$, $t_0 \le t < t_1$; $w(\lambda_1 \mid t_k+0)$ и $w(\lambda_1 \mid t)$, $t_k < t \le t_k+T$; $w(\lambda_1 \mid t)$, $t_k+T<t\le t_{k+1}$, $k=1,2,\ldots$, а также определения оценок $\hat{\lambda}(t)$ траекторий истинного процесса $\lambda(t)$.

С целью установления частоты ошибочных решений о состоянии $\lambda(t)$ по наблюдениям за потоком событий проведен ряд статистических экспериментов, состоящих из следующих этапов:

1) для определенного набора параметров λ_1, λ_2, α_1, α_2, $P_1^{(1)}(\lambda_j \mid \lambda_i)$, $P_1^{(2)}(\lambda_j \mid \lambda_i)$, $i,j=1,2$, T единиц времени осуществляется имитационное моделирование наблюдаемого потока событий на заданном отрезке времени $[0,T_m]$ (отдельная *k*-я реализация (испытание));

2) осуществляется расчет апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0,T_m]$ по формулам (2)–(6);

3) оценивается траектория процесса $\lambda(t)$ на $[0,T_m]$ (оценивание на отрезке $[0,T_m]$ временных интервалов, когда $\hat{\lambda}(t)$ принимает то или иное значение);

4) осуществляется определение (для *k*-го испытания) d_k – суммарной протяженности интервалов, на которых значение процесса $\lambda(t)$ не совпадает с его оценкой $\hat{\lambda}(t)$;

5) вычисляется доля ошибочных решений $\hat{p}_k = d_k / T_m$;

6) производится повторение N раз ($k=\overline{1,N}$) шагов 1–5 для расчета оценки полной (безусловной) вероятности ошибки принятия решения о состояниях процесса $\lambda(t)$ на $[0,T_m]$.

Результатом выполнения описанного алгоритма является выборка $\hat{p}_1,\hat{p}_2,\ldots,\hat{p}_N$ долей ошибочных решений в N испытаниях. По этому набору вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности ошибочного решения $\hat{P}_{ош}$ и ее выборочная дисперсия $\hat{D}_{ош}$:

$$\hat{P}_{ош}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\hat{p}_k\ ,\ \hat{D}_{ош}=\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(\hat{p}_k-\hat{P}_{ош})^2\ .$$

Первый статистический эксперимент проведен с целью установления времени моделирования T_m, обеспечивающего удовлетворение свойства стационарности потока событий. Результаты работы имитационной модели получены для значений параметров, приведенных в табл. 1, в условиях полной наблюдаемости потока ($T=0$ – табл. 2, рис. 2, *а*) и условиях наличия мертвого времени ($T=1$ – табл. 3, рис. 2, *б*). В настоящем эксперименте количество испытаний фиксировано, $N=100$.

Таблица 1

Исходные данные для эксперимента

$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0,25$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \mid \lambda_1) = 0,2$	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \mid \lambda_2) = 0,4$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \mid \lambda_1) = 0,3$	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \mid \lambda_2) = 0,1$
$\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 0,25$	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0,8$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0,6$	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0,7$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0,9$

Таблица 2

Результаты первого статистического эксперимента (*T* = 0)

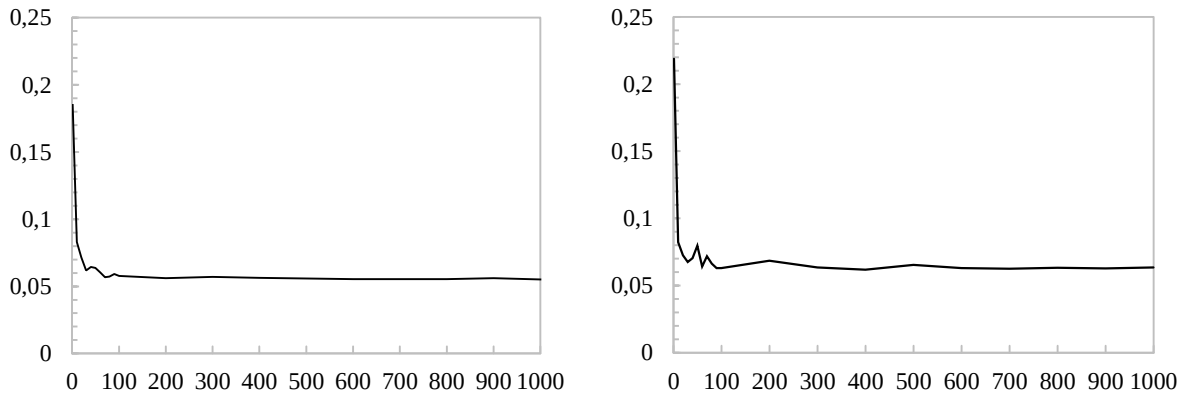
T_m	1	10	20	30	40	50	60	70	80	…	1 000
$\hat{P}_{ош}$	0,1849	0,0830	0,0716	0,0617	0,0645	0,0638	0,0603	0,0569	0,0574	…	0,0552
$\hat{D}_{ош} \cdot 10^3$	2,4681	1,6610	0,9100	0,4771	0,3600	0,3790	0,2841	0,1560	0,2101	…	0,0012

Таблица 3

Результаты первого статистического эксперимента (*T* = 1)

T_m	1	10	20	30	40	50	60	70	80	…	1 000
$\hat{P}_{ош}$	0,2188	0,0822	0,0726	0,0675	0,0704	0,0897	0,0642	0,0729	0,0646	…	0,0635
$\hat{D}_{ош} \cdot 10^3$	3,1527	2,0270	1,1331	0,7093	0,6412	0,5932	0,3091	0,2780	0,1911	…	0,0021

На рис. 2 отражена зависимость оценки полной вероятности принятия ошибочного решения $\hat{P}_{ош}$ от времени моделирования T_m при различных значениях мертвого времени: $T = 0$ и $T = 1$.



а *б*

Рис. 2. График зависимости $\hat{P}_{ош}$ от значения T_m при $T = 0$ (*а*) и $T = 1$ (*б*)

Анализ многочисленных результатов эксперимента, включая численные результаты табл. 2–3 и их графическое представление (см. рис. 2), позволяет сделать следующие выводы:

1) при увеличении времени моделирования T_m оценки $\hat{P}_{ош}$ (в каждом из рассмотренных условий функционирования потока) стабилизируются;

2) в случае полной наблюдаемости потока (см. рис. 2, *а*) оценка полной вероятности ошибки $\hat{P}_{ош}$ для всех вариантов расчета является достаточно стабильной при $T_m \geq 100$ ед. времени, в случае наличия мертвого времени (см. рис. 2, *б*) – при $T_m \geq 500$; как следствие, для дальнейших экспериментов значение времени моделирования выбрано равным $T_m = 1000$ ед. времени;

3) для всех вариантов расчета при $T_m \geq 100$ ед. времени оценка $\hat{D}_{ош}$ достаточно мала.

Так как согласно $\boldsymbol{D}_0$ переход $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j, $i, j = 1, 2$, в соответствии с [1, 8] невозможен без наступления события, то во втором статистическом эксперименте исследуется

зависимость $\hat{P}_{ош}$ и $\hat{D}_{ош}$ от λ_1/λ_2 и α_1/α_2. При $T=1$, $T_m=1000$, $N=100$ и исходных данных табл. 4 получены результаты, приведенные в табл. 5, 6.

Таблица 4

Исходные данные для эксперимента

$\lambda_1=6$, $\lambda_1/\lambda_2=3;...;192$	$P_1^{(1)}(\lambda_1\mid\lambda_1)=0,6$	$P_1^{(1)}(\lambda_2\mid\lambda_2)=0,5$	$P_1^{(2)}(\lambda_1\mid\lambda_1)=0,3$	$P_1^{(2)}(\lambda_2\mid\lambda_2)=0,8$
$\alpha_1=6$, $\alpha_1/\alpha_2=3;...;192$	$P_1^{(1)}(\lambda_2\mid\lambda_1)=0,4$	$P_1^{(1)}(\lambda_1\mid\lambda_2)=0,5$	$P_1^{(2)}(\lambda_2\mid\lambda_1)=0,7$	$P_1^{(2)}(\lambda_1\mid\lambda_2)=0,2$

Таблица 5

Результаты второго статистического эксперимента (для λ_1/λ_2, $\alpha_2=2$)

λ_1/λ_2	3	6	12	24	48	96	192
$\hat{P}_{ош}$	0,2038	0,1439	0,1104	0,0914	0,0821	0,0765	0,0745
$\hat{D}_{ош}\cdot 10^3$	0,0045	0,0032	0,0033	0,0022	0,0022	0,0027	0,0022

Таблица 6

Результаты второго статистического эксперимента (для α_1/α_2, $\lambda_2=2$)

α_1/α_2	3	6	12	24	48	96	192
$\hat{P}_{ош}$	0,2030	0,1855	0,1737	0,1689	0,1658	0,1641	0,1629
$\hat{D}_{ош}\cdot 10^3$	0,0044	0,0039	0,0042	0,0038	0,0041	0,0039	0,0040

Результаты эксперимента свидетельствуют о лучшем оценивании состояний потока событий при больших значениях отношений λ_1/λ_2 и α_1/α_2. Такая тенденция связана с тем фактом, что состояния $\lambda(t)$ становятся лучше различимы, за счет чего частота принятия ошибочных решений значительно сокращается. Отметим, что данные табл. 5 определяют лучшее в смысле малости оценки полной вероятности ошибки качество оценивания рассматриваемого потока событий, нежели данные табл. 6; другими словами, увеличение значения отношения λ_1/λ_2 обеспечивает меньшее значение оценки вероятности принятия ошибочного решения, чем увеличение значения отношения α_1/α_2. Последнее связано с заданным набором параметров, определяющим поток (см. табл. 4). Обратим внимание, что сравнение приведенных в табл. 5–6 результатов статистического эксперимента с результатами аналогичного эксперимента, проведенного для тех же исходных данных в условиях отсутствия мертвого времени, $T=0$ [16, 17], позволяет отметить увеличение значения $\hat{P}_{ош}$ при $T\neq 0$ для каждого варианта расчета, что естественно в силу потери полезной информации для вынесения решения о состоянии потока за счет наличия мертвого времени.

Предметом рассмотрения в третьем статистическом эксперименте является зависимость $\hat{P}_{ош}$ от значения длительности T, при этом рассматриваются ситуации увеличения значений λ_1 и α_1, определяющих интенсивность наступления событий в первом состоянии. В табл. 8–9 приведены результаты, полученные при $T_m=1000$, $N=100$ и значениях параметров, представленных в табл. 7.

Таблица 7

Исходные данные для эксперимента

$\lambda_1=4;6$, $\lambda_2=0,5$	$P_1^{(1)}(\lambda_1\mid\lambda_1)=0,2$	$P_1^{(1)}(\lambda_2\mid\lambda_2)=0,1$	$P_1^{(2)}(\lambda_1\mid\lambda_1)=0,1$	$P_1^{(2)}(\lambda_2\mid\lambda_2)=0,2$
$\alpha_1=4;6$, $\alpha_2=0,5$	$P_1^{(1)}(\lambda_2\mid\lambda_1)=0,8$	$P_1^{(1)}(\lambda_1\mid\lambda_2)=0,9$	$P_1^{(2)}(\lambda_2\mid\lambda_1)=0,9$	$P_1^{(2)}(\lambda_1\mid\lambda_2)=0,8$

Таблица 8

Результаты третьего статистического эксперимента ($\lambda_1 = 4$, $\alpha_1 = 4$)

T	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
$\hat{P}_{ош}$	0,0871	0,1091	0,1146	0,1178	0,1204	0,1216	0,1223	0,1243
$\hat{D}_{ош} \cdot 10^3$	0,0026	0,0022	0,0022	0,0023	0,0021	0,0025	0,0021	0,0031

Таблица 9

Результаты третьего статистического эксперимента ($\lambda_1 = 6$, $\alpha_1 = 6$)

T	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
$\hat{P}_{ош}$	0,0610	0,0817	0,0856	0,0886	0,0898	0,0910	0,0925	0,0935
$\hat{D}_{ош} \cdot 10^3$	0,0009	0,0014	0,0012	0,0017	0,0017	0,0012	0,0014	0,0016

Построенный согласно данным табл. 8–9 график зависимости оценки вероятности $\hat{P}_{ош}$ от значений длительности мертвого времени T приведен на рис. 3.

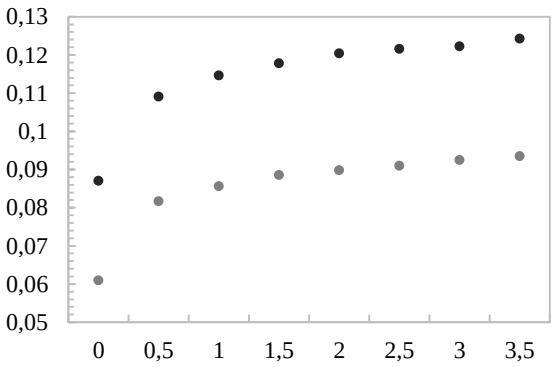


Рис. 3. График зависимости $\hat{P}_{ош}$ от T при $\lambda_1 = \alpha_1 = 4$ – темным маркером, при $\lambda_1 = \alpha_1 = 6$ – светлым маркером

Численные результаты, отраженные в табл. 8–9, и их графическое представление (см. рис. 3) демонстрируют, что при одном и том же значении T отмечается тенденция к уменьшению оценки $\hat{P}_{ош}$ в случае увеличения λ_1 и α_1, так как условия различимости состояний улучшаются, что также полностью согласуется с результатами предыдущего эксперимента. Рассмотрение значений $\hat{P}_{ош}$ в обоих случаях задания интенсивностей ($\lambda_1 + \alpha_1 = 8$, $\lambda_1 + \alpha_1 = 12$) в зависимости от $T = 0; 0{,}5; \ldots; 3{,}5$ приводит к обнаружению роста $\hat{P}_{ош}$ с увеличением T , так как увеличение продолжительности мертвого времени всегда означает уменьшение количества полезной информации, что отрицательно сказывается на качестве оценивания (это также можно видеть на рис. 2). При этом заметим, что поведение оценок $\hat{P}_{ош}(\lambda_1 + \alpha_1 = 8)$ (темный маркер на рис. 3) и $\hat{P}_{ош}(\lambda_1 + \alpha_1 = 12)$ (светлый маркер на рис. 3) в целом аналогично.

Ввиду вероятностного механизма смены состояний потока в каждый момент наступления события особый интерес (четвертый статистический эксперимент) представляет рассмотрение частного случая задания вероятностей $P_1^{(l)}(\lambda_j \mid \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, $l = 1, 2$, определяющих переходы процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_j, $i, j = 1, 2$: $P_1^{(l)}(\lambda_j \mid \lambda_i) = 0$, $i = j$, $P_1^{(l)}(\lambda_j \mid \lambda_i) = 1$, $i \neq j$; при значениях параметров $T = 1$, $T_m = 1000$, $N = 100$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0{,}75$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0{,}45$.

На рис. 4 в качестве иллюстрации приведено поведение оценки $\hat{\lambda}(t)$ для отдельной реализации исследуемого потока; здесь λ_1, λ_2 – значения оценки $\hat{\lambda}(t)$. Штриховкой отмечены участки ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$ (потока событий), $\Delta t = 0{,}001$.

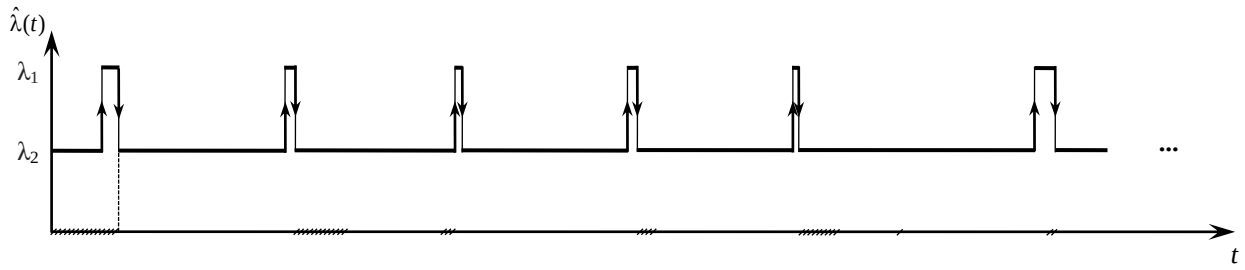


Рис. 4. Поведение оценки $\hat{\lambda}(t)$

В четвертом эксперименте выборочное среднее полной вероятности ошибки – $\hat{P}_{ош} = 0{,}1821$, выборочная дисперсия – $\hat{D}_{ош} = 0{,}0049 \cdot 10^{-3}$. Существенное ухудшение качества оценивания (в смысле малости оценки полной вероятности ошибки) по сравнению с результатами, приведенными в [17] в случае $T = 0$ при том же наборе параметров, объясняется наличием мертвого времени.

Заключение

В настоящей статье предложен основанный на критерии максимума апостериорной вероятности алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка, функционирующего в условиях непродлевающегося мертвого времени. Сформулированы алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ и алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t на основании выборки моментов наступления событий $t_1, t_2, \ldots, t_m$ в наблюдаемом потоке. Проведен ряд статистических экспериментов для установления частоты ошибочных решений о состоянии случайного процесса $\lambda(t)$. Численные результаты проведенных на имитационной модели потока экспериментов не противоречат физической интерпретации и иллюстрируют приемлемую оценку полной вероятности ошибки оценивания и достаточно малую выборочную дисперсию, которые обеспечиваются предложенным алгоритмом оптимального оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во Белорус. гос. ун-та, 2000. 175 с.
2. Basharin G.P., Gaidamaka Yu.V., Samouylov K.E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47, No. 2. P. 62–69.
3. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, No. 3. P. 433–441.
4. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
6. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
7. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
8. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
9. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2. С. 44–65.

10. Горцев А.М., Леонова М.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1. С. 33–47.
11. Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of modulated semisynchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability // Applied Mathematical Sciences. 2015. V. 9, No. 29–32. P. 1433–1451.
12. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // Telecommunications and Radio Engineering. 1996. V. 50, No. 1. P. 56–63.
13. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.
14. Горцев А.М., Нежельская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 6. С. 232–239.
15. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
16. Нежельская Л.А., Сидорова Е.Ф. Алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. Томск : Издательский Дом ТГУ. 2017. Т. 301. С. 105–113.
17. Nezhelskaya L.A., Sidorova E.F. Optimal estimation of the states of synchronous generalized flow of events of the second order under its complete observability // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 157–171.
18. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
19. Normey-Rico J.E. Control of dead-time process. London : Springer Verlag, 2007. 462 p.
20. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М. : Сов. радио, 1968. 256 с.
21. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М. : Сов. радио, 1968. 504 с.
22. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1976. 576 с.
23. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

Поступила в редакцию 4 мая 2018 г.

Nezhel'skaya L.A., Sidorova E.F. (2018) OPTIMAL ESTIMATE OF THE STATES OF A GENERALIZED SYNCHRONOUS FLOW OF SECOND-ORDER EVENTS UNDER CONDITIONS OF INCOMPLETE OBSERVABILITY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 45. pp. 30–41

DOI: 10.17223/19988605/45/4

The paper deals with a generalized synchronous flow second-order events accompanying random process $\lambda(t)$, which is an unobservable piecewise constant process with two states S_1 and S_2. Hereinafter, it is understood the i th state of process $\lambda(t)$ as the state S_i, $i = 1, 2$.

The duration of interval between the flow events at the i th state is determined by random variable $\eta_i = \min(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$, where random variable $\xi_i^{(1)}$ is distributed according to the law $F_i^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, random variable $\xi_i^{(2)}$ is distributed according to the law $F_i^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$; $\xi_i^{(1)}$ and $\xi_i^{(2)}$ are independent of each other, $i = 1, 2$. At the moment when a flow event occurs, process $\lambda(t)$ transits from the i th state to the j th either with probability $P_1^{(1)}(\lambda_j \mid \lambda_i)$ or with probability $P_1^{(2)}(\lambda_j \mid \lambda_i)$ depending on the value of random variable η_i, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. At the moment when a flow event occurs, process $\lambda(t)$ stays in the i th state either with probability $P_1^{(1)}(\lambda_i \mid \lambda_i)$ or with probability $P_1^{(2)}(\lambda_i \mid \lambda_i)$ depending on the value of random variable η_i, $i = 1, 2$. Wherein, $P_1^{(1)}(\lambda_j \mid \lambda_i) + P_1^{(1)}(\lambda_i \mid \lambda_i) = 1$, $P_1^{(2)}(\lambda_j \mid \lambda_i) + P_1^{(2)}(\lambda_i \mid \lambda_i) = 1$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Thus, the duration of interval between the flow events in the i th state of process $\lambda(t)$ is a random variable with the exponential distribution function $F_i(t) = 1 - e^{-(\lambda_i + \alpha_i)t}$, $i = 1, 2$.

In the sequel it is assumed that the state S_1 (the first state) of random process $\lambda(t)$ takes place, if $\lambda(t) = \lambda_1$, and the state S_2 (the second state) of random process $\lambda(t)$ takes place, if $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$).

We consider the situation, where each event registered at the moment t_k generates the period of time T, called a dead time, during which other flow events are lost, and upon its completion, an occurring event also causes the period of non-observability of the

flow. It is necessary to estimate the state of random process $\lambda(t)$ at the moment t, having a sample of the moments of occurrence of events $t_1, t_2, ...$ in the observed flow.

The algorithm of optimal estimation for the states of a generalized synchronous flow of second-order events with unextendable dead time is as follows:

1) at the initial instant $t_0 = 0$ a priori probability of the first state π_1 of the process $\lambda(t)$ is calculated using explicit expression

$$\pi_1 = \frac{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)};$$

2) $k = 0$, at any moment t of the interval (t_0, t_1) a probability $w(\lambda_1 | t)$ is computed according to formula

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w(\lambda_1 | t_k + 0) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k)}}{1 - w(\lambda_1 | t_k + 0) + w(\lambda_1 | t_k + 0) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k)}}, \; w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1;$$

at the moment t_1 calculations are made for determination $w(\lambda_1 | t_1) = w(\lambda_1 | t_1 - 0)$ using the same formula;

3) k increases by 1; for $k = 1$ a posteriori probability is recalculated according to formula

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = W / [(\lambda_2 + \alpha_2) + w(\lambda_1 | t_k - 0)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)],$$

$$W = \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2) + w(\lambda_1 | t_k - 0)[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) - \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) - \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)]; \; w(\lambda_1 | t_1 + 0)$$

is the initial value for $w(\lambda_1 | t)$ at the next step;

4) $k = 1$, at any moment t of the half-interval $(t_1, t_1 + T]$ a probability $w(\lambda_1 | t)$ is calculated according to

$$w(\lambda_1 | t) = \pi_1 + [w(\lambda_1 | t_k + 0) - \pi_1] e^{-a(t - t_k)},$$

$$a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2);$$

here $w(\lambda_1 | t = t_1 + T)$ is the initial value for $w(\lambda_1 | t)$ at the next step of the algorithm;

5) $k = 1$, at any moment t of the $(t_1 + T, t_2)$ a posteriori probability $w(\lambda_1 | t)$ is calculated according to

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w(\lambda_1 | t_k + T) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k - T)}}{1 - w(\lambda_1 | t_k + T) + w(\lambda_1 | t_k + T) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k - T)}};$$

$w(\lambda_1 | t_2) = w(\lambda_1 | t_2 - 0)$ can be found using the same formula when $t = t_2$;

6) the algorithm goes to step 3, after that steps 3–5 are repeated sequentially for $k = 2$ and so on.

Simultaneously with the calculation process of probability $w(\lambda_1 | t)$, the estimation of the flow state is made according to criterion of a posteriori probability maximum: if $w(\lambda_1 | t) \geq w(\lambda_2 | t)$, then $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, else $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

The numerical results of described statistical experiments conducted on the simulation model demonstrate the possibility of sufficiently qualitative estimation of the states of a generalized synchronous flow of second-order events in conditions of a constant dead time.

Keywords: generalized synchronous flow of second-order events; flow state; optimal estimation of states; unextendable dead time; criterion of a posteriori probability maximum.

NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: ludne@mail.ru

SIDOROVA Ekaterina Filippovna (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: katusha_sidorova@mail.ru

REFERENCES

1. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BSU.
2. Basharin, G.P., Gaidamaka, Yu.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks. *Automatic Control and Computer Sciences.* 47(2). pp. 62–69.
3. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
4. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
5. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika – Proc. of USSR Academy of Sciences. Technical Cybernetics.* 6. pp. 92–99.
6. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 2]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika – Proc. of USSR Academy of Sciences. Technical Cybernetics.* 1. pp. 55–61.
7. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability.* 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143

8. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models.* 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
9. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal state estimation of an asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of the states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2. pp. 44–65. (In Russian).
10. Gortsev, A.M. & Leonova, M.A. (2010) Optimal state estimation of a generalized asynchronous doubly stochastic flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1. pp. 33–47. (In Russian).
11. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2015) Optimal estimation of the states of modulated semisynchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability. *Applied Mathematical Sciences.* 9(29–32). pp. 1433–1451. DOI: 10.12988/ams.2015.5135
12. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (1996) Estimation of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method. *Telecommunications and Radio Engineering.* 50(1). pp. 56–63.
13. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A & Nezhelskaya, L.A. (2014) Joint probability density of the duration of intervals of semisyncronous generalized flow of events with unextendable dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 2(27). pp. 19–29. (In Russian).
14. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Dead time period and parameter estimation of synchronous alternating flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal.* 284. pp. 232–239. (In Russian).
15. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Comparison of the ML- and MM-estimates of the dead time period in asynchronous generalized flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32–42. (In Russian).
16. Nezhelskaya, L.A. & Sidorova, E.F. (2017) Algoritm optimal'nogo otsenivaniya sostoyaniy obobshchennogo sinkhronnogo potoka sobytiy vtorogo poryadka [Optimal estimation algorithm for the states of synchronous generalized flow of events of the second order]. *Trudy Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskaya.* 301. pp. 105–113.
17. Nezhelskaya, L.A. & Sidorova, E.F. (2018) Optimal estimation of the states of synchronous generalized flow of events of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science.* 912. pp. 157–171. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_13
18. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskii, A.F. (1988) *Statistical Analysis of Stochastic Flows in Physical Experiment.* Minsk: University Press.
19. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of Dead-Time Process.* London: Springer-Verlag.
20. Khazen, E.M. (1968) *Metody optimal'nykh statisticheskikh resheniy i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods of optimal statistical decisions and problems of optimal control]. Moscow: Sovetskoe radio.
21. Levin, B.R. (1968) *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. Moscow: Sovetskoe radio.
22. Kamke, E. (1976) *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Translated from German by S. Fomin. Moscow: Nauka.
23. Sobol, I.M. (1973) *Chislennye metody Monte-Karlo* [Numerical Monte-Carlo Methods]. Moscow: Nauka.