М.А. Шкленник, А.Н. Моисеев

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКОВ ЗАЯВОК В ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ПРИБОРОВ И ПОВТОРНЫМИ ОБРАЩЕНИЯМИ

Рассматривается двухфазная система массового обслуживания с неограниченным числом приборов на каждой фазе и возможностью повторного обращения заявок к каждой из фаз. Исследуется многомерный случайный процесс, описывающий потоки заявок, поступающие на фазы системы. Получено аналитическое выражение для производящей функции исследуемого процесса в нестационарном режиме, позволяющее определить его вероятностные характеристики.

Ключевые слова: двухфазная система массового обслуживания с неограниченным числом приборов; повторное обслуживание; производящая функция; произвольное время обслуживания; метод предельной декомпозиции.

В теории массового обслуживания решение значительного числа задач проводится в предположении, что входящий поток заявок является стационарным и имеет распределение Пуассона. В большинстве случаев это предположение подтверждается статистическим анализом реальных потоков [1]. Также пуассоновские процессы могут быть использованы для аппроксимации процессов в случае наблюдения достаточно большого числа независимых потоков [2–6].

Большинство задач теории массового обслуживания для моделей с простейшим входящим потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания были решены еще в XX в. В 1956 г. Б.А. Севастьянов решил задачу Эрланга для систем с произвольной функцией распределения времени обслуживания $M/G/N$ [7, 8] и показал, что, что при $N \rightarrow \infty$ распределение числа занятых приборов сходится к пуассоновскому. В 1969 г. Л. Такач [9] показал, что количество клиентов в системе $M/G/\infty$ имеет распределение Пуассона в стационарном режиме, которое зависит от средней скорости поступления заявок и среднего времени обслуживания вызовов. В работах [10, 11] доказано, что число занятых приборов в системе $M/M/\infty$ имеет распределение Пуассона. В работе [12] проведено исследование суммарного потока заявок в системе $M/M/\infty$ с повторным обслуживанием. Исследование процессов числа заявок в многофазных системах и сетях массового обслуживания с рекуррентным обслуживанием представлено в работах [13–15].

Однако исследованию потоков в системах массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов с произвольным временем обслуживания, а также многофазных СМО с возможностью повторного обращения заявки в систему посвящено не так уж много работ. В [16] проведено исследование суммарного потока заявок в однофазной системе с входящим ММРР-потоком и повторными обращениями. В работе [17] для исследования системы $M/GI/\infty$ предложен метод предельной декомпозиции. В работе [18] методом предельной декомпозиции исследованы суммарный и двумерный потоки обращений к системе $M/GI/\infty$. В работах [19–21] исследованы потоки обращений в двухфазных СМО с неограниченным числом приборов на каждой фазе и повторными обращениями. В настоящей работе предлагается метод предельной декомпозиции для анализа различных потоков в двухфазной СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов и возможностью повторного обращения заявки к любой фазе системы.

1. Математическая модель

Рассмотрим двухфазную систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих устройств на каждой фазе (рис. 1). На вход системы поступает простейший поток заявок

с параметром λ . Время обслуживания заявок на первой фазе независимо и имеет одинаковое распределение для каждого прибора с произвольной функцией распределения $B_1(x)$. По завершении обслуживания на первой фазе заявка с вероятностью r_{11} может обратиться к первой фазе для повторного обслуживания, либо с вероятностью r_{12} может перейти на вторую фазу, либо с вероятностью $(1 - r_{11} - r_{12})$ может покинуть систему. На второй фазе время обслуживания также имеет одинаковое распределение для каждого прибора с произвольной функцией распределения $B_2(x)$. По завершении обслуживания на второй фазе заявка с вероятностью r_{21} может обратиться к первой фазе для повторного обслуживания, либо с вероятностью r_{22} может повторно обратиться ко второй фазе, либо с вероятностью $(1 - r_{21} - r_{22})$ может покинуть систему.

Рис. 1. Двухфазная система массового обслуживания с обратной связью

Введем следующие обозначения:

$l(t)$ – число обращений к системе из внешнего источника (первичные заявки), реализованных к моменту времени t ;

$n_{12}(t)$ – число обращений ко второй фазе системы после обслуживания на первой фазе;

$n_{11}(t)$ – число повторных обращений к первой фазе системы после обслуживания на первой фазе;

$n_{21}(t)$ – число повторных обращений к первой фазе системы после обслуживания на второй фазе;

$n_{22}(t)$ – число повторных обращений ко второй фазе системы после обслуживания на второй фазе.

Пусть в начальный момент времени система была пуста. Ставится задача исследования многомерного случайного процесса $\{l(t, N), n_{11}(t, N), n_{12}(t, N), n_{21}(t, N), n_{22}(t, N)\}$, описывающего потоки заявок в системе.

2. Метод предельной декомпозиции

Входящий поток заявок, интенсивность которого равна λ , разделим на N независимых потоков по полиномиальной схеме с равными вероятностями. Интенсивность каждого такого потока будет равна λ/N . Определим для заявок каждого из полученных потоков единственную однолинейную двухфазную линию обслуживания с отказами (рис. 2). В этой системе заявки, поступающие в период времени, когда хотя бы одна фаза линии занята, не обслуживаются (теряются).

Рис. 2. Однолинейная двухфазная СМО с отказами

Нетрудно доказать, что при $N \rightarrow \infty$ вероятностью потерь заявок можно пренебречь, и тогда характеристики исходной системы будут сходиться к суммарным характеристикам совокупности N однолинейных двухфазных СМО. Итак, задача нахождения распределения вероятностей числа обращений в двухфазной бесконечнолинейной СМО сводится к решению задачи нахождения распределения вероятностей числа обращений в однолинейной СМО с отказами.

3. Исследование однолинейной двухфазной СМО с отказами

В описанной выше однолинейной системе будем рассматривать многомерный случайный процесс $\{l(t, N), n_{11}(t, N), n_{12}(t, N), n_{21}(t, N), n_{22}(t, N)\}$, описывающий число обращений, реализованных за время t в систему извне, с первой фазы на первую фазу, с первой на вторую фазу, со второй на первую и со второй на вторую фазу соответственно. Введем производящую функцию данного многомерного процесса в виде:

$$g(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t, N) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n_{11}=0}^{\infty} \sum_{n_{12}=0}^{\infty} \sum_{n_{21}=0}^{\infty} \sum_{n_{22}=0}^{\infty} x^l y_{11}^{n_{11}} y_{12}^{n_{12}} y_{21}^{n_{21}} y_{22}^{n_{22}} \cdot P(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, t, N).$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема. Пусть функции $f_k(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t)$, $k = 1, 2$ определяются следующими преобразованиями Фурье–Стилтьеса:

$$\begin{aligned} \phi_1(\alpha, x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}) &= \int_0^{\infty} e^{j\alpha t} d_t f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) = \\ &= \frac{\lambda B_1^*(\alpha)}{(1 - r_{11} y_{11} B_1^*(\alpha))(1 - r_{22} y_{22} B_2^*(\alpha)) - r_{12} y_{12} r_{21} y_{21} B_1^*(\alpha) B_2^*(\alpha)} \times \\ &\times \left\{ (1 - r_{22} y_{22} B_2^*(\alpha)) \cdot \left(x - \frac{1 - r_{22}}{r} (1 - r_{11} y_{11}) + \frac{r_{12}}{r} r_{21} y_{21} \right) + \right. \\ &\left. + B_2^*(\alpha) r_{21} y_{21} \left(\frac{1 - r_{22}}{r} r_{12} y_{12} - \frac{r_{12}}{r} (1 - r_{22} y_{22}) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(\alpha, x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}) &= \int_0^{\infty} e^{j\alpha t} d_t f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) = \\ &= \frac{\lambda B_2^*(\alpha)}{(1 - r_{11} y_{11} B_1^*(\alpha))(1 - r_{22} y_{22} B_2^*(\alpha)) - r_{12} y_{12} r_{21} y_{21} B_1^*(\alpha) B_2^*(\alpha)} \times \\ &\times \left\{ (1 - r_{11} y_{11} B_1^*(\alpha)) \cdot \left(\frac{1 - r_{22}}{r} r_{12} y_{12} - \frac{r_{12}}{r} (1 - r_{22} y_{22}) \right) + \right. \\ &\left. + B_1^*(\alpha) r_{12} y_{12} \left(x - \frac{1 - r_{22}}{r} (1 - r_{11} y_{11}) + \frac{r_{12}}{r} r_{21} y_{21} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $B_k^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha t} dB_k(t)$ – преобразование Фурье–Стилтьеса от функции распределения $B_k(t)$ времени обслуживания на фазах системы, $k = 1, 2$; $r = (1 - r_{11})(1 - r_{22}) - r_{12}r_{21}$. Тогда производящая функция $g(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t, N)$ многомерного случайного процесса $\{l(t, N), n_{11}(t, N), n_{12}(t, N), n_{21}(t, N), n_{22}(t, N)\}$ в двухфазной однолинейной системе с повторными обращениями к фазам имеет вид:

$$\begin{aligned} g(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t, N) &= 1 + \frac{1}{N} \cdot \left\{ (x - 1) \lambda t + [r_{11}(y_{11} - 1) + r_{12}(y_{12} - 1)] \int_0^t f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds + \right. \\ &\left. + [r_{21}(y_{21} - 1) + r_{22}(y_{22} - 1)] \int_0^t f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds \right\} + o(N^{-2}). \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство. Поскольку процесс $\{l(t, N), n_{11}(t, N), n_{12}(t, N), n_{21}(t, N), n_{22}(t, N)\}$ не является марковским, введем в рассмотрение дополнительные переменные: процесс $k(t)$ – состояние линии обслуживания, т.е. если k -я фаза линии занята, то $k(t) = k, k = 1, 2$, а если линия свободна, то $k(t) = 0$; $z(t)$ – длина интервала времени от момента t до момента окончания текущего обслуживания, если линия занята.

Процесс $\{k(t), l(t, N), n_{11}(t, N), n_{12}(t, N), n_{21}(t, N), n_{22}(t, N), z(t)\}$ является марковским. Распределение вероятностей этого процесса обозначим следующим образом:

– $P_0(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, t, N) = P\{k(t) = 0, l(t, N) = l, n_{11}(t, N) = n_{11}, n_{12}(t, N) = n_{12}, n_{21}(t, N) = n_{21}, n_{22}(t, N) = n_{22}\}$ – вероятность того, что в момент времени t линия свободна и к этому моменту к системе обратилось l заявок из внешнего источника, n_{11} заявок обратилось для повторного обслуживания с первой фазы на первую, n_{12} заявок обратилось с первой фазы на вторую, n_{21} заявок обратилось повторно к первой фазе после обслуживания на второй фазе, n_{22} заявок повторно обратилось ко второй фазе системы после обслуживания на второй фазе системы;

– $P_k(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, z, t, N) = P\{k(t) = k, l(t, N) = l, n_{11}(t, N) = n_{11}, n_{12}(t, N) = n_{12}, n_{21}(t, N) = n_{21}, n_{22}(t, N) = n_{22}, z(t) < z\}, k = 1, 2$, – вероятность того, что в момент времени t занята k -я фаза системы, к этому моменту к системе обратилось l заявок из внешнего источника, n_{11} заявок обратилось для повторного обслуживания с первой фазы на первую, n_{12} заявок обратилось с первой фазы на вторую, n_{21} заявок обратилось повторно к первой фазе после обслуживания на второй фазе, n_{22} заявок повторно обратилось ко второй фазе системы после обслуживания на второй фазе системы, и остаточное время обслуживания заявки, находящейся в системе, меньше z .

Для распределения вероятностей многомерного процесса $\{k(t), l(t, N), n_{11}(t, N), n_{12}(t, N), n_{21}(t, N), n_{22}(t, N), z(t)\}$ составим прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, t, N)}{\partial t} &= (1 - r_{11} - r_{12}) \frac{\partial P_1(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, 0, t, N)}{\partial z} + \\ &+ (1 - r_{21} - r_{22}) \frac{\partial P_2(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, 0, t, N)}{\partial z} - \frac{\lambda}{N} P_0(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, t, N), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, z, t, N)}{\partial t} &= \frac{\partial P_1(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, z, t, N)}{\partial z} - \\ &- \frac{\partial P_1(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, 0, t, N)}{\partial z} + \frac{\lambda}{N} P_0(l - 1, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, t, N) B_1(z) + \\ &+ r_{11} B_1(z) \frac{\partial P_1(l, n_{11} - 1, n_{12}, n_{21}, n_{22}, 0, t, N)}{\partial z} + r_{21} B_1(z) \frac{\partial P_2(l, n_{11}, n_{12}, n_{21} - 1, n_{22}, 0, t, N)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, z, t, N)}{\partial t} &= \frac{\partial P_2(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, z, t, N)}{\partial z} - \\ &- \frac{\partial P_2(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, 0, t, N)}{\partial z} + r_{12} B_2(z) \frac{\partial P_1(l, n_{11}, n_{12} - 1, n_{21}, n_{22}, 0, t, N)}{\partial z} + \\ &+ r_{22} B_2(z) \frac{\partial P_2(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22} - 1, 0, t, N)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Начальные условия для системы (4)–(6) запишем в виде:

$$\begin{aligned} P_0(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, 0, N) &= \begin{cases} 0, & \text{если } l > 0, n_{11} > 0, n_{12} > 0, n_{21} > 0, n_{22} > 0, \\ R_0(N), & \text{если } l = n_{11} = n_{12} = n_{21} = n_{22} = 0, \end{cases} \\ P_k(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, z, 0, N) &= \begin{cases} 0, & \text{если } l > 0, n_{11} > 0, n_{12} > 0, n_{21} > 0, n_{22} > 0, \\ R_k(z, N), & \text{если } l = n_{11} = n_{12} = n_{21} = n_{22} = 0, \quad k = 1, 2, \end{cases} \end{aligned}$$

где $R_0(N), R_1(z, N), R_2(z, N)$ – стационарное распределение вероятностей занятости фаз в однолинейной СМО, удовлетворяющее условию нормировки:

$$R_0(N) + R_1(\infty, N) + R_2(\infty, N) = 1.$$

Введем следующие функции:

$$g_0(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t, N) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n_{11}=0}^{\infty} \sum_{n_{12}=0}^{\infty} \sum_{n_{21}=0}^{\infty} \sum_{n_{22}=0}^{\infty} x^l y_{11}^{n_{11}} y_{12}^{n_{12}} y_{21}^{n_{21}} y_{22}^{n_{22}} \cdot P_0(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, t, N),$$

$$g_k(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t, N) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n_{11}=0}^{\infty} \sum_{n_{12}=0}^{\infty} \sum_{n_{21}=0}^{\infty} \sum_{n_{22}=0}^{\infty} x^l y_{11}^{n_{11}} y_{12}^{n_{12}} y_{21}^{n_{21}} y_{22}^{n_{22}} \cdot P_k(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, z, t, N), \quad k = 1, 2.$$

Тогда, из уравнений (4)–(6) следует, что эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_0(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t, N)}{\partial t} &= (1 - r_{11} - r_{12}) \frac{\partial g_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, 0, t, N)}{\partial z} + \\ &+ (1 - r_{21} - r_{22}) \frac{\partial g_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, 0, t, N)}{\partial z} - \frac{\lambda}{N} g_0(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t, N), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t, N)}{\partial t} &= \frac{\partial g_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t, N)}{\partial z} - \\ &- \frac{\partial g_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, 0, t, N)}{\partial z} + \frac{\lambda}{N} x B_1(z) g_0(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t, N) + \\ &+ r_{11} y_{11} B_1(z) \frac{\partial g_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, 0, t, N)}{\partial z} + r_{21} y_{21} B_1(z) \frac{\partial g_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, 0, t, N)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t, N)}{\partial t} &= \frac{\partial g_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t, N)}{\partial z} - \\ &- \frac{\partial g_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, 0, t, N)}{\partial z} + r_{12} y_{12} B_2(z) \frac{\partial g_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, 0, t, N)}{\partial z} + \\ &+ r_{22} y_{22} B_2(z) \frac{\partial g_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, 0, t, N)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Начальные условия для системы (7)–(9) имеют вид:

$$g_0(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, 0, N) = R_0(N),$$

$$g_k(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, 0, N) = R_k(z, N), \quad k = 1, 2.$$

В работе [22] показано, что

$$R_1(z, N) = \frac{\lambda}{N} \cdot \frac{1 - r_{22}}{r} \int_0^z (1 - B_1(u)) du,$$

$$R_2(z, N) = \frac{\lambda}{N} \cdot \frac{r_{12}}{r} \int_0^z (1 - B_2(v)) dv,$$

где $r = (1 - r_{11})(1 - r_{22}) - r_{12}r_{21}$.

Тогда

$$R_0(N) = 1 - R_1(\infty, N) - R_2(\infty, N) = 1 - \frac{\lambda}{N} \cdot \frac{1}{r} [(1 - r_{22})b_1 + r_{12}b_2],$$

где b_1 и b_2 – математические ожидания времени обслуживания на первой и второй фазах соответственно.

Решение системы уравнений (7)–(9) будем искать в виде:

$$g_0(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t, N) = 1 - \frac{1}{N} F_0(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) + o(N^{-2}), \quad (10)$$

$$g_k(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t, N) = \frac{1}{N} F_k(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t) + o(N^{-2}), \quad k = 1, 2, \quad (11)$$

где $F_0(\cdot)$, $F_1(\cdot)$ и $F_2(\cdot)$ – некоторые функции, не зависящие от N .

Подставив выражения (10), (11) в систему (7)–(9), получим систему уравнений для функций $F_0(\cdot)$ и $F_k(\cdot)$, $k = 1, 2$:

$$\frac{\partial F_0(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t)}{\partial t} = \lambda - (1 - r_{11} - r_{12})f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) - (1 - r_{21} - r_{22})f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t), \quad (12)$$

$$\frac{\partial F_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t)}{\partial z} + \lambda x B_1(z) + (r_{11} y_{11} B_1(z) - 1)f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) + r_{21} y_{21} B_1(z) f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t), \quad (13)$$

$$\frac{\partial f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t)}{\partial z} + (r_{22} y_{22} B_2(z) - 1)f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) + r_{12} y_{12} B_2(z) f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t), \quad (14)$$

где $f_k(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) = \frac{\partial F_k(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, 0, t)}{\partial z}$, $k = 1, 2$,

с начальными условиями:

$$F_0(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, 0) = N \cdot (1 - R_0(N)), \quad (15)$$

$$F_k(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, 0) = N \cdot R_k(z, N), \quad k = 1, 2. \quad (16)$$

Решая дифференциальные уравнения (13) и (14) в частных производных первого порядка, найдем вид функций $F_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t)$ и $F_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t)$:

$$F_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t) = \frac{\lambda}{r} (1 - r_{22}) \int_0^{z+t} (1 - B_1(u)) du + \int_0^t [\lambda x B_1(z + t - s) + (r_{11} y_{11} B_1(z + t - s) - 1)f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) + r_{21} y_{21} B_1(z + t - s) f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s)] ds, \quad (17)$$

$$F_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t) = \frac{\lambda}{r} r_{12} \int_0^{z+t} (1 - B_2(v)) dv + \int_0^t [r_{12} y_{12} B_2(z + t - s) f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) + (r_{22} y_{22} B_2(z + t - s) - 1)f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s)] ds. \quad (18)$$

Из уравнения (12) несложно найти вид функции $F_0(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t)$:

$$F_0(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) = \lambda \left[\frac{1 - r_{22}}{r} b_1 + \frac{r_{12}}{r} b_2 + t \right] + (1 - r_{11} - r_{12}) \int_0^t f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds - (1 - r_{21} - r_{22}) \int_0^t f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds. \quad (19)$$

Тогда, учитывая (10), (11), получаем

$$g(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t, N) = 1 - \frac{1}{N} F_0(y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) + \frac{1}{N} F_1(y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t) + \frac{1}{N} F_2(y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z, t) + o(N^{-2}). \quad (20)$$

При $z \rightarrow \infty$ выражения (17), (18) примут вид:

$$F_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) = \frac{\lambda}{r} (1 - r_{22}) b_1 + \lambda x t + (r_{11} y_{11} - 1) \int_0^t f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds + r_{21} y_{21} \int_0^t f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds, \\ F_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) = \frac{\lambda}{r} r_{12} b_2 + r_{12} y_{12} \int_0^t f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds + (r_{22} y_{22} - 1) \int_0^t f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds.$$

Тогда, учитывая (20), производящая функция $g(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t, N)$ многомерного случайного процесса $\{l(t, N), n_{11}(t, N), n_{12}(t, N), n_{21}(t, N), n_{22}(t, N)\}$ в двухфазной однолинейной системе с повторными обращениями к фазам имеет вид:

$$\begin{aligned} g(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t, N) = \\ = 1 + \frac{1}{N} \cdot \left\{ (x-1)\lambda t + [r_{11}(y_{11}-1) + r_{12}(y_{12}-1)] \int_0^t f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds + \right. \\ \left. + [r_{21}(y_{21}-1) + r_{22}(y_{22}-1)] \int_0^t f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds \right\} + o(N^{-2}), \end{aligned}$$

что совпадает с выражением (3) теоремы.

Для нахождения неизвестных функций $f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t)$ и $f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t)$ продифференцируем равенства (17) и (18) и рассмотрим их при $z = 0$. Получим систему интегральных уравнений для функций $f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t)$ и $f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t)$:

$$\begin{aligned} f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) = \lambda \left[\frac{(1-r_{22})}{r} (1-B_1(t)) + x B_1(t) \right] + \\ + r_{11} y_{11} \int_0^t b_1(t-s) f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds + r_{21} y_{21} \int_0^t b_1(t-s) f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) = \lambda \frac{r_{12}}{r} (1-B_2(t)) + \\ + r_{12} y_{12} \int_0^t b_2(t-s) f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds + r_{22} y_{22} \int_0^t b_2(t-s) f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds, \end{aligned} \quad (22)$$

где $b_1(t)$ и $b_2(t)$ – плотность распределения времени обслуживания на первой и второй фазах соответственно.

Решение системы интегральных уравнений (21)–(22) относительно неизвестных функций $f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t)$ и $f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t)$ можно найти, используя преобразование Фурье–Стилтьеса вида:

$$\begin{aligned} \Phi_k(\alpha, x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}) = \int_0^\infty \frac{\partial f_k(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t)}{\partial t} e^{j\alpha t} dt = \\ = \int_0^\infty e^{j\alpha t} d_t f_k(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t), \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда из системы уравнений (21)–(22) можно получить систему для функций $\Phi_1(\alpha, x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22})$ и $\Phi_2(\alpha, x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22})$:

$$\begin{aligned} (r_{11} y_{11} B_1^*(\alpha) - 1) \Phi_1(\alpha, x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}) + r_{21} y_{21} B_1^*(\alpha) \Phi_2(\alpha, x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}) = \\ = -\frac{\lambda}{r} (x r - (1-r_{22})(r_{11} y_{11} - 1) + r_{12} r_{21} y_{21}) B_1^*(\alpha), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} r_{12} y_{12} B_2^*(\alpha) \Phi_1(\alpha, x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}) + (r_{22} y_{22} B_2^*(\alpha) - 1) \Phi_2(\alpha, x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}) = \\ = -\frac{\lambda}{r} (r_{12} (1-r_{22}) y_{12} + r_{12} (r_{22} y_{22} - 1)) B_2^*(\alpha), \end{aligned} \quad (24)$$

где $B_k^*(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial B_k(t)}{\partial t} e^{j\alpha t} dt = \int_0^\infty e^{j\alpha t} b_k(t) dt$, $k = 1, 2$.

Решая систему (23)–(24), получим выражения (1) и (2) для функций $\Phi_1(\alpha, x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22})$ и $\Phi_2(\alpha, x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22})$, определяющие вид функций $f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t)$ и $f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t)$.

Теорема доказана.

4. Исследование двухфазной СМО с неограниченным числом приборов и повторными обращениями на каждой фазе

Определим совместную производящую функцию многомерного процесса $\{l(t), n_{11}(t), n_{12}(t), n_{21}(t), n_{22}(t)\}$, описывающего потоки в двухфазной системе с неограниченным числом линий и повторными обращениями на каждой фазе, в виде:

$$G(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n_{11}=0}^{\infty} \sum_{n_{12}=0}^{\infty} \sum_{n_{21}=0}^{\infty} \sum_{n_{22}=0}^{\infty} x^l y_{11}^{n_{11}} y_{12}^{n_{12}} y_{21}^{n_{21}} y_{22}^{n_{22}} \cdot P(l, n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, t).$$

Тогда, в силу независимости однолинейных систем, рассмотренных выше, производящая функция $G(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} G(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} g(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t, N)^N = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N} \cdot \left\{ (x-1)\lambda t + [r_{11}(y_{11}-1) + r_{12}(y_{12}-1)] \int_0^t f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [r_{21}(y_{21}-1) + r_{22}(y_{22}-1)] \int_0^t f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds \right\} + o(N^{-2}) \right)^N = \\ &= \exp \left\{ (x-1)\lambda t + [r_{11}(y_{11}-1) + r_{12}(y_{12}-1)] \int_0^t f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds + \right. \\ &\quad \left. + [r_{21}(y_{21}-1) + r_{22}(y_{22}-1)] \int_0^t f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Так как совместная производящая функция многомерного распределения вероятностей процесса $\{l(t), n_{11}(t), n_{12}(t), n_{21}(t), n_{22}(t)\}$ не равна произведению производящих функций одномерных распределений, то очевидно, что потоки не являются независимыми, поэтому анализ таких потоков требует их совместного рассмотрения.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена математическая модель обслуживания заявок в неоднородной двухфазной системе массового обслуживания $M/GI/\infty \rightarrow GI/\infty$ с возможностью повторного обращения заявки к любой фазе системы. Методом предельной декомпозиции получено аналитическое выражение для производящей функции многомерного потока обращений заявок к фазам системы. Полученное выражение может быть использовано для определения вероятностных характеристик компонент рассматриваемого многомерного потока.

Полученные результаты могут быть использованы для анализа потоков в различных социально-экономических системах, где имеет место повторное обращение клиентов к системе при различных условиях, например в торговых или страховых компаниях, а также в технических системах распределенной обработки больших данных и облачных сервисах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brown L., Gans N., Mandelbaum A., Sakov A. Statistical Analysis of a Telephone Call Center // A Queueing-Science Perspective. Journal of the American Statistical Association. 2005. V. 100. P. 36–50.
2. Neuts M.F. The infinite-server queue with Poisson arrivals and semi Markovian services // Operations Research. 1972. V. 20, No. 2. P. 425–433.

3. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М. : Физматлит, 1963. 236 с.
4. Ососков Г.А. Одна предельная теорема для потоков однородных событий // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1, № 2. С. 274–282.
5. Григелионис Б.И. Об асимптотическом разложении остаточного члена в случае сходимости к закону Пуассона // Литовский математический сборник. 1962. Т. 2, № 1. С. 135–143.
6. Григелионис Б.И. О сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому // Теория вероятностей и ее применения. 1963. Т. 8, № 2. С. 189–194.
7. Севастьянов Б.А. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами // Теория вероятностей и ее применения. 1957. Т. 2, № 1. С. 106–116.
8. Севастьянов Б.А. Формулы Эрланга в телефонии при произвольном законе распределения длительности разговора // Труды Третьего Всесоюз. матем. съезда. 1956. М. : АН СССР, 1959. Т. 4. С. 68–70.
9. Takács L. On Erlang's formula // Annals of Mathematical Statistics. 1969. V. 40. P. 71–78.
10. Kleinrock L. Queueing systems. New York : Wiley Interscience, 1975. V. 1: Theory. 417 p.
11. Кёнинг Д., Рыков В.В., Штоян Д. Теория массового обслуживания. М. : Моск. ин-т нефтехим. и газовой промышленности, 1979. 112 с.
12. Моисеева С.П., Морозова А.С., Назаров А.А. Исследование суммарного потока обращений в бесконечно линейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 290. С. 173–175.
13. Назаров А.А., Моисеев А.Н. Исследование открытой немарковской сети массового обслуживания $GI-(GI)^\infty$ с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком // Проблемы передачи информации. 2013. Т. 49, вып. 2. С. 78–91.
14. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Асимптотический анализ многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком // Автотметрия. 2014. Т. 50, № 2. С. 67–76.
15. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ. 2015. 240 с.
16. Melikov A., Zadiranova L., Moiseev A. Two Asymptotic Conditions in Queue with MMPP Arrivals and Feedback // Communications in Computer and Information Science. 2016. V. 678. P. 231–240.
17. Назаров А.А., Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 55. С. 88–92.
18. Моисеева С.П., Ананина И.А., Назаров А.А. Исследование потоков в системе $M/GI/\infty$ с повторными обращениями // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 3 (8). С. 56–66.
19. Ананина И.А. Исследование суммарного потока обращений в двухфазной бесконечнолинейной СМО с повторными обращениями // Научное творчество молодежи : материалы XIV Всерос. науч.-практ. конф. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2010. Ч. 1. С. 3–5.
20. Моисеева С.П., Захорольная И.А. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // Автотметрия. 2011. Т. 47. № 6. С. 51–58.
21. Ананина И.А. Математическая модель процесса изменения дохода торговой компании, расширяющей свое присутствие на рынке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 2 (15). С. 5–14.
22. Shklennik M., Moiseeva S., Moiseev A. Analysis of Queueing Tandem with Feedback by the Method of Limiting Decomposition // CCIS. 2017. V. 800. P. 147–157.

Поступила в редакцию 12 февраля 2018 г.

Shklennik M.A., Moiseev A.N. (2018) ANALYSIS OF CUSTOMERS FLOWS IN THE INFINITE-SERVER QUEUEING TANDEM WITH FEEDBACK. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 45. pp. 48–58

DOI: 10.17223/19988605/45/6

The paper presents the study of a two-stage infinite-server queueing system with feedback. The arrival process is a stationary Poisson process with the rate equals to λ . Service times at the first stage are independent and identically distributed (i.i.d.) with an arbitrary distribution function $B_1(x)$. After a completion of the service at the first stage, the customer may return back to the first stage for a new service with the probability r_{11} or it may move to the second stage with the probability r_{12} or it may leave the system with the probability $(1 - r_{11} - r_{12})$. Service times at the second stage are i.i.d. with an arbitrary distribution function $B_2(x)$. When the service at the second stage is completed, the customer may return to the first stage with the probability r_{21} or it may get a new service at the second stage with the probability r_{22} or it may leave the system with the probability $(1 - r_{21} - r_{22})$.

The problem is to study multidimensional stochastic process describing the flows of requests in the system.

The method of limiting decomposition is used for the study. We divide the arrival process in the considered tandem into N independent processes according to a polynomial scheme with identical probabilities. As the rate of the original arrivals was equal to λ ,

then the intensity of each generated Poisson process will be equal to λ/N . After that we construct a single-line tandem for each of these arrival processes to serve their customers. The considered single-line two-stage queueing tandem is a system with losses, that is, the customers arrived during a period of any stage busyness are not servicing (they are lost). The total probability characteristics of the independent one-line systems constructed in this way coincide with the corresponding characteristics of the original infinite-server system if $N \rightarrow \infty$.

It is shown that the generating function of multidimensional stochastic process $\{l(t), n_{11}(t), n_{12}(t), n_{21}(t), n_{22}(t)\}$ is as follows:

$$G(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t) = \exp \left\{ (x-1)\lambda t + [r_{11}(y_{11}-1) + r_{12}(y_{12}-1)] \int_0^t f_1(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds + \right. \\ \left. [r_{21}(y_{21}-1) + r_{22}(y_{22}-1)] \int_0^t f_2(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, s) ds \right\},$$

where for functions $f_k(x, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, t)$, $k = 1, 2$ analytic expressions of Fourier-Stieltjes transformations are obtained.

The obtained results can be used for the analysis of flows in different social and economic systems, where there is a repeated circulation of customers to the system under different conditions, for example, in trading or insurance companies, as well as in technical systems for distributed processing of big data and cloud services.

Keywords: infinite-server queueing tandem; feedback; generation function; method of limiting decomposition.

SHKLENNIK Mariya Alexandrovna (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: Shklennikm@yandex.ru

MOISEEV Alexander Nikolaevich (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: moiseev.tsu@gmail.com

REFERENCES

1. Brown, L., Gans, N., Mandelbaum, A. & Sakov, A. (2005) Statistical analysis of a telephone call center. *A Queueing-Science Perspective. Journal of the American Statistical Association*. 100. pp. 36–50. DOI: 10.1198/016214504000001808
2. Neuts, M.F. (1972) The infinite-server queue with Poisson arrivals and semi Markovian services. *Operations Research*. 20(2). pp. 425–433. DOI: 10.1287/opre.20.2.425
3. Khinchin, A.Ya. (1963) *Raboty po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya* [Works on the mathematical theory of queueing]. Moscow: Fizmatlit.
4. Ososkov, G.A. (1956) A limit theorem for flows of similar events. *Theory of Probability and Its Applications*. 1(2). pp. 248–255. DOI: 10.1137/1101020
5. Grigelionis, B.I. (1962) Ob asimptoticheskom razlozhenii ostatocnogo chlena v sluchaye skhodimosti k zakonu Puassona [Accuracy of approximation of a superposition of renewal process by a Poisson process]. *Litovskii Matematicheskii Sbornik*. II(2). pp. 135–143.
6. Grigelionis, B.I. (1961) On the convergence of sums of random step processes to a Poisson process. *Theory of Probability and Its Applications*. 8. pp. 177–182. DOI: 10.1137/1108017
7. Sevastyanov, B.A. (1957) An ergodic theorem for Markov processes and its application to telephone systems with refusals. *Theory of Probability and Its Applications*. 2. pp. 104–112. DOI: 10.1137/1102005
8. Sevastyanov, B.A. (1956) Formuly Erlanga v telefonii pri proizvol'nom zakone raspredeleniya dlitel'nosti razgovora [Erlang Formulas in Telephony under an Arbitrary Law of the Distribution of the Duration of a Conversation]. In: Abramov, A.A. & Nikolskiy, S.M. (eds) *Trudy Tret'ego Vsesoyuznogo matematicheskogo s'ezda* [Proceedings of the Third All-Russian Mathematics Congress]. Vol. 4. Moscow: USSR AS. pp. 68–70.
9. Takács, L. (1969) On Erlang's formula. *Annals of Mathematical Statistics*. 40. pp. 71–78. DOI: 10.1214/aoms/1177697805
10. Kleinrock L. (1975) *Queueing systems*. Vol. 1. New York: Wiley.
11. König, D., Rykov, V., & Shtoyan, D. (1979) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing models (Markov models and Markovization methods)]. Moscow: Institute of Petrochemical and Gas Industry.
12. Moiseeva, S.P., Morozova, A.S. & Nazarov, A.A. (2006) Investigation of the flow of appeals in infinite lines queueing system with repeated service. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 290. pp.173–175. (In Russian)
13. Nazarov, A.A. & Moiseev, A.N. (2013) Analysis of an open non-Markovian $GI-(GI|_{\infty})^K$ queueing network with high-rate renewal arrival process. *Problemy Peredachi Informatsii – Problems of Information Transmission*. 49(2). pp. 167–178. (In Russian).
14. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2014) Asymptotic analysis of a multistage queueing system with a high-rate renewal arrival process. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 50(2). pp. 163–171.
15. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2015) *Beskonechnolinyne sistemy i seti massovogo obsluzhivaniya* [Infinite-server queueing systems and networks]. Tomsk: NTL.

16. Melikov, A., Zadiranova, L. & Moiseev, A. (2016) Two Asymptotic Conditions in Queue with MMPP Arrivals and Feedback. *CCIS*. 678. pp. 231–240.
17. Nazarov, A.A., Moiseeva, S.P. & Morozova, A.S. (2008) Analysis of queueing system with unlimited number of servers and feedback by the method of limiting decomposition. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computation Technologies*. 13(55). pp. 88–92. (In Russian).
18. Moiseeva, S.P., Ananina, I.A. & Nazarov, A.A. (2009) Research of streams in system $M|GI|_{\infty}$ with repeated references the method of limiting decomposition. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(8). pp. 56–66. (In Russian).
20. Ananina, I.A. (2010) [Analysis of total flow of customers in queueing tandem system with unlimited number of servers and feedback by the method of limiting decomposition]. *Nauchnoe tvorchestvo molodezhi* [Scientific creativity of youth]. Proc. of the 14th All-Russian Conference. Tomsk, April 15–16, 2010. Tomsk. pp. 3–5. (In Russian).
20. Moiseeva, S.P. & Zakhornaya, I.A. (2011) Mathematical model of parallel retrial queueing of multiple requests. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 47(6). pp. 567–572. DOI: 10.3103/S8756699011060276
21. Ananina, I.A. (2011) Mathematical model of the income change process of the trading company expanding the presence in the market. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(15). pp. 5–14. (In Russian).
22. Shklennik, M., Moiseeva, S. & Moiseev, A. (2017) Analysis of queueing tandem with feedback by the method of limiting decomposition. *CCIS*. 800. pp. 147–157.