ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2018 Математика и механика № 56

УДК 512.556.3 MSC: 16S36, 16W80, 22A30
DOI 10.17223/19988621/56/4

Д.И. Юнусова

О ПРОДОЛЖЕНИИ ПСЕВДОНОРМЫ И МЕТРИКИ НА ПОЛУГРУППОВОЕ КОЛЬЦО

Основным результатом работы является теорема, устанавливающая достаточные условия возможности продолжения псевдонормы кольца R и метрики пространства X до такой групповой нормы на полугрупповом кольце RF кольца R и свободного моноида F, порожденного множеством X, что топология, задаваемая этой групповой нормой, является кольцевой.

Ключевые слова: *псевдонорма, топология, полугрупповое кольцо, групповая норма.*

При изучении алгебраических систем с дополнительными структурами (топология, порядок, норма и др.) иногда возникает необходимость продолжать эти дополнительные структуры с кольца на их надкольца. В частности, возникает вопрос о возможности продолжения заданных дополнительных структур группы и кольца на их групповое кольцо.

Настоящая работа посвящена изучению вопроса о возможности продолжения действительнозначной псевдонормы и метрики на полугрупповое кольцо свободного моноида.

Этот результат обобщает теорему 1 из [1].

Примем следующие обозначения:

N – множество всех натуральных чисел;

$|A|$ – мощность множества A;

RF – полугрупповое кольцо моноида F и кольца R;

$<X>_F$ – подмоноид (подгруппа) моноида (группы) F, порожденный множеством X;

$\mathfrak{M}$ – нетривиальное многообразие моноидов (групп), т.е. многообразие, не содержащее одноэлементного моноида (группу);

$F = F(\mathfrak{M},X)$ – свободный моноид (свободная группа) с свободными образующими из X;

τ_ξ – топология, задаваемая нормой ξ на группе;

R – поле действительных чисел с обычным порядком;

R^+ – множество неотрицательных действительных чисел;

Определение 1. Пусть F – моноид. Отображение $\eta : F \to R^+$ называется действительнозначной псевдополунормой, если выполнены следующие условия:

1. $\eta(g) > 0$ для любого $g \in F$.

2. $\eta(e) = 1$, где e – единица в F.

3. $\eta(g \cdot h) \le \eta(g) \cdot \eta(h)$ для любых $g,h \in F$.

Определение 2. Говорим, что на кольце R задана групповая норма ξ, если отображение $\xi : R \to R^+$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\xi(r) = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$.

2. $\xi(-r)=\xi(r)$ для любого $r\in R$.

3. $\xi(r_1+r_2)\le\xi(r_1)+\xi(r_2)$ для любых $r_1,r_2\in R$.

Определение 3. Кольцо R называется псевдонормированным, если на R определена неотрицательно действительнозначная функция ξ, удовлетворяющая следующим условиям:

A. $\xi(r)=0$ тогда и только тогда, когда $r=0$.

B. $\xi(-r)=\xi(r)$ для любого $r\in R$.

C. $\xi(r_1+r_2)\le\xi(r_1)+\xi(r_2)$ для любых $r_1,r_2\in R$.

D. $\xi(r_1\cdot r_2)\le\xi(r_1)\cdot\xi(r_2)$ для любых $r_1,r_2\in R$.

Лемма. Пусть (X,ρ) – метрическое пространство, $F=F(\mathfrak{M},X)$ – свободный в многообразии $\mathfrak{M}$ моноид (группа) с множеством свободных образующих X, (R,ξ) – псевдонормированное кольцо с помощью действительнозначной псевдонормы ξ, $m,p\in N$, $p\ge 2$; $\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_p\in X; \tilde{z}_1,\dots,\tilde{z}_m\in<\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_p>_F$ причем $\tilde{z}_i\ne\tilde{z}_j$ при $1\le i<j\le m$; $0\ne\tilde{r}_1,\dots,\tilde{r}_m\in R$.

Если $f=\sum_{j=1}^{m}\tilde{r}_j\tilde{z}_j$, то для любого разложения $f=\sum_{k=1}^{s}r_kz_k+\sum_{l=1}^{s'}f_l(x_l-y_l)g_l$, где $r_k\in R; z_k\in F$; $1\le k\le s$; $f_l,g_l\in RF$; $x_l,y_l\in X, 1\le l\le s$; $s,s'\in N$ имеем

$$\sum_{k=1}^{s}\xi(r_k)+\sum_{l=1}^{s'}\rho(x_l,y_l)\ge\min\{\xi(\tilde{r}_1),\rho(\tilde{x}_i,\tilde{x}_j)\,|\,1\le i<j\le p\}.$$

Доказательство. Допустим противное, то есть, что

$$\sum_{k=1}^{s}\xi(r_k)+\sum_{l=1}^{s'}\rho(x_l,y_l)<\min\{\xi(\tilde{r}_1),\rho(\tilde{x}_i,\tilde{x}_j)\,|\,1\le i<j\le p\}.$$

Зададим на множестве X отношение эквивалентности δ, определенное множеством пар $\{(x_l,y_l\}\,|\,l=1,\dots,s'\}$, следующим образом:

$x\delta y$ тогда и только тогда, когда $x=y$ либо существует такая конечная последовательность чисел $l_1,\dots,l_t$ где $1\le l_i\le s'$ для $i=1,\dots,t$, что $\{x_{l_i},y_{l_i}\}\cap\{x_{l_{i+1}},y_{l_{i+1}}\}\ne\varnothing$ для $1\le i<t-1$ и $x\in\{x_{l_1},y_{l_1}\}, y\in\{x_{l_t},y_{l_t}\}$.

Покажем, что для любых $i,j\in\{1,\dots,p\}$ из $(\tilde{x}_i\delta\ \tilde{x}_j)$ следует, что $i=j$. Допустим противное, то есть что $(\tilde{x}_i\delta\ \tilde{x}_j)$ и $i\ne j$. Выберем набор пар $(x_{l_1},y_{l_1}),\dots,(x_{l_t},y_{l_t})$ минимальной из возможных длин такой, что $\tilde{x}_i\in(x_{l_1},y_{l_1}),\tilde{x}_j\in(x_{l_t},y_{l_t})$ и $\{x_{l_i},y_{l_i}\}\cap\{x_{l_{i+1}},y_{l_{i+1}}\}\ne\varnothing$ для $1\le i<t-1$.

Можем считать, что $\tilde{x}_i=x_{l_1},\tilde{x}_j=y_{l_t}$. Тогда $\rho(\tilde{x}_i,\tilde{x}_j)=\rho(x_{l_1},x_{l_t})\le\sum_{l=1}^{t}\rho(x_{l_i},y_{l_i})$.

Так как набор пар $(x_{l_1},y_{l_1}),\dots,(x_{l_t},y_{l_t})$ имеет минимальную длину, то в нем нет повторяющихся пар, и поэтому,

$$\sum_{i=1}^{t}\rho(x_{l_i},y_{l_i})\le\sum_{l=1}^{s'}\rho(x_l,y_l)<\min\{\xi(\tilde{r}_1),\rho(\tilde{x}_i,\tilde{x}_j)\,|\,1\le i<j\le p\}\le\rho(\tilde{x}_i,\tilde{x}_j).$$

Полученное противоречие показывает, что из $(\tilde{x}_i \delta\ \tilde{x}_j)$ следует, что $i = j$.

Рассмотрим отображение $\gamma : X \to X$, где $\gamma(x) = \begin{cases} \tilde{x}_i, \text{если } x\delta\ x_i, i = 2,..., p; \\ \tilde{x}_1 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$

Поскольку для $i \neq j$ элемент x_i не эквивалентен элементу x_j, то отображение γ определено корректно. Продолжим γ до эндоморфизма (который будем обозначать также через γ) свободного моноида (свободной группы) F, полагая $\gamma(x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_p^{\varepsilon_p}) = \gamma(x_1)^{\varepsilon_1} \cdots \gamma(x_p)^{\varepsilon_p}$, а затем продолжим полученный эндоморфизм до эндоморфизма полугруппового кольца RF, который будем обозначать через $\hat{\gamma}$, полагая $\hat{\gamma}(\sum_{i=1}^{n} r_i h_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i \gamma(h_i)$.

Так как $\tilde{z}_j \in < \tilde{x}_1,..., \tilde{x}_p >_F$ для $1 \leq j \leq m$ и $\gamma(\tilde{x}_i) = \tilde{x}_i$ для $i = 1,...,p$, то $\gamma(\tilde{z}_j) = \tilde{z}_j$ для любого $j \leq m$ и, значит, $\hat{\gamma}(f) = f$.

Из определения отношения δ и отображения $\hat{\gamma}$ имеем $\hat{\gamma}(x_l - y_l) = 0$ для всех $l = 1,..., s'$ и, поэтому, $\sum_{j=1}^{m} \tilde{r}_j \tilde{z}_j = f = \hat{\gamma}(f) = \sum_{k=1}^{s} r_k \gamma(z_k)$.

Тогда $\tilde{r}_1 = \sum_{\gamma(z_k) = \tilde{z}_1} r_k$ и, значит,

$$\xi(\tilde{r}_1) \leq \sum_{\gamma(z_k) = \tilde{z}_1} \xi(r_k) \leq \sum_{k=1}^{s} \xi(r_k) < \min\{\xi(r_1), \rho(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \mid 1 \leq i < j \leq p\} < \xi(\tilde{r}_1).$$

Получили противоречие. Этим лемма полностью доказана.

Предложение. Пусть X – множество, $\mathfrak{M}$ – нетривиальное многообразие моноидов (групп), F – свободный моноид (свободная группа) в многообразии $\mathfrak{M}$, $x, x_1,..., x_n \in X$. Если $x = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$, то существует такой индекс $i \in \{1,..., n\}$, что $x_i = x$.

Доказательство. Допустим противное, то есть что $x_i \neq x$ для $i = 1,..., n$. Так как $\mathfrak{M}$ – нетривиальное многообразие, то существует такая группа (моноид) $A \in \mathfrak{M}$, что $|A| \geq 2$. Пусть $a \in A$. Так как $|A| \geq 2$, то существует такой $b \in A$, что $b \neq a^n$ (определение числа n смотрите выше). Рассмотрим гомоморфизм $\hat{\psi} : F(\mathfrak{M}, X) \to A$ являющейся продолжением отображения $\psi : X \to A$, определенного следующим образом:

$$\hat{\psi}(x) = b \text{ и } \hat{\psi}(x_i) = a \text{ для } i = 1,..., n. \text{ Тогда } b = \hat{\psi}(x) = \hat{\psi}(x_1) \cdots \hat{\psi}(x_n) = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ раз}} = a^n.$$

Получили противоречие. Этим предложение полностью доказано.

Теорема. Пусть (R, ξ) – псевдонормированное кольцо, (X, ρ) – метрическое пространство, $\mathfrak{M}$ – нетривиальное многообразие моноидов (групп), F – свободный моноид (свободная группа) в многообразии $\mathfrak{M}$, порожденный множеством X. Тогда на полугрупповом кольце RF существует такая групповая норма $\hat{\xi}$, что:

1. $\hat{\xi}(r \cdot e) = \xi(r)$ для любого $r \in R$.

2. $\hat{\xi}(x - y) = \rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$.

3. $\tau_{\hat{\xi}}$ – кольцевая топология.

4. X является замкнутым подмножеством кольца $(RF, \tau_{\hat{\xi}})$.

5. Если $f = \sum_{i=1}^{n} r_i h_i \in RF$, где не все элементы τ_i являются левыми топологическими делителями нуля в R, то подгруппа $R \cdot f = \{r \cdot f \mid r \in R\}$ аддитивной группы кольца RF топологически изоморфна аддитивной группе кольца R.

6. Для любого элемента $x \in X$ подмножество $R \cdot x = \{r \cdot x \mid r \in R\}$ является замкнутым в $(RF, \tau_{\hat{\xi}})$.

Доказательство. Зафиксируем некоторый элемент $x_0 \in X$ и определим на F неотрицательно действительнозначную функцию η, полагая

$$\eta(g) = 1 + \inf\{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_0, x_i) \mid g = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}; \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \in Z\}.$$

Проверим, что η – мультипликативная псевдополунорма на F, удовлетворяющая следующим условиям:

A. $\eta(g) \geq 1$ для любого $g \in F$.

B. $\rho(x, y) \leq \eta(x) + \eta(y)$ для любых $x, y \in X$.

C. $\eta(x) \leq \rho(x, y) + \eta(y)$ для любых $x, y \in X$.

D. $\eta(x_0) = 1$.

В самом деле, из определения функции η следует выполнение условий A, D, а также условий 1 и 2 из определения 1 .

Проверим, что $\eta(g \cdot h) \leq \eta(g) \cdot \eta(h)$ для любых $g, h \in F$.

Пусть g, h – произвольные элементы из F и ε – любое положительное число. Существуют положительное число ε_0 и такие разложения: $g = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ и $h = x'^{\varepsilon'_1}_1 \cdots x'^{\varepsilon'_k}_k$, что

$$\eta(g) \cdot \varepsilon_0 + \eta(h) \cdot \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0 < \varepsilon,$$

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \rho(x_0, x_i) \leq \eta(g) + \varepsilon_0, \; 1 + \sum_{i=1}^{k} \rho(x_0, x'_i) \leq \eta(h) + \varepsilon_0.$$

Тогда
$$g \cdot h = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \cdot x'^{\varepsilon'_1}_1 \cdots x'^{\varepsilon'_k}_k,$$

причем

$$\eta(g \cdot h) \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} \rho(x_0, x_i) + \sum_{i=1}^{k} \rho(x_0, x'_i) \leq$$

$$\leq (1 + \sum_{i=1}^{n} \rho(x_0, x_i))(1 + \sum_{i=1}^{k} \rho(x_0, x'_i)) \leq (\eta(g) + \varepsilon_0) \cdot (\eta(h) + \varepsilon_0) =$$

$$= \eta(g) \cdot \eta(h) + \eta(g) \cdot \varepsilon_0 + \eta(h) \cdot \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0 \leq \eta(g) \cdot \eta(h) + \varepsilon.$$

Из произвольности числа ε получим, что $\eta(g\cdot h)\le\eta(g)\cdot\eta(h)$.

Этим проверено, что η является мультипликативной псевдополунормой.

Теперь покажем, что $\eta(x)=1+\rho(x_0,x)$ для любого $x\in X$.

В самом деле, из задания функции η следует, что $\eta(x)=1+\rho(x_0,x)$.

Допустим, что $\eta(x)<1+\rho(x_0,x)$. Тогда существует такое разложение $x=x_1^{\varepsilon_1}\cdots x_n^{\varepsilon_n}$ (где $x_i\in X,\varepsilon_i\in Z$ для $1\le i\le n$, что $1+\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(x_0,x_i)<1+\rho(x_0,x)$.
Согласно предложению $x=x_{i_0}$ для некоторого $1\le i_0\le n$, и, значит,

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(x_0,x_i)\ge\rho(x_0,x)>\sum_{i=1}^{n}\rho(x_0,x_i).$$

Получили противоречие. Следовательно, $\eta(x)=1+\rho(x_0,x)$.

Теперь проверим выполнение условий B и C.

Пусть $x,y\in X$. Тогда

$$\rho(x,y)\le\rho(x,x_0)+\rho(x_0,y)\le(1+\rho(x_0,x))+(1+\rho(x_0,y)=\eta(x)+\eta(y)$$

и
$$\eta(x)=1+\rho(x_0,x)\le1+\rho(x_0,y)+\rho(y,x)=\eta(y)+\rho(x,y)$$

для любых $x,y\in X$.

Определим теперь на *RF* неотрицательно действительнозначную функцию $\hat{\xi}$ следующим образом:

Для любого $f\in RF$ положим

$$\hat{\xi}(f)=\inf\{\sum_{i=1}^{n}\xi(r_i)\eta(h_i)+\sum_{k=1}^{m}\rho(x_k,y_k)\mid f=\sum_{i=1}^{n}r_ih_i+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(x_k-y_k)\varphi_k^{'};\ \varphi_k,\varphi_k^{'}\in RF\}.$$

Покажем, что $\hat{\xi}$ является групповой нормой на *RF*.

Ясно, что $\hat{\xi}(0)=0$.

Допустим противное, то есть что $\hat{\xi}(f)=0$ для некоторого $f\ne0$. Если $f=\sum\limits_{i=1}^{n}r_ih_i\in RF$ (где $h_i\ne h_j$ при $1\le i<j\le n$ и $r_k\ne0$ для $k=1,...,n)$, то существуют такие попарно различные элементы $\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_p\in X$, что $h_i\in<\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_p>_F$ для $i=1,...,n$.

Пусть $\varepsilon=\min\{\xi(r_1),\rho(\tilde{x}_i,\tilde{x}_j)\mid 1\le i<j\le p\}$. Тогда $\varepsilon>0$ и, значит, найдется такое разложение $f=\sum\limits_{j=1}^{n'}r_j^{'}h_j^{'}+\sum\limits_{t=1}^{m}\varphi_t(x_t-y_t)\varphi_t^{'}$ что

$$\sum_{j=1}^{n'}\xi(r_j^{'})\eta(h_j^{'})+\sum_{t=1}^{m}\rho(x_t,y_t)<\varepsilon. \tag{1}$$

Так как $\eta(g)\ge1$ для любого $g\in F$, то из неравенства (1) и леммы следует, что

$$\varepsilon \le \min\{\xi(r_1), \rho(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \,|\, 1 \le i < j \le p\} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n'} \xi(r_j') + \sum_{t=1}^{m} \rho(x_t, y_t) \le \sum_{j=1}^{n'} \xi(r_j')\eta(h_j') + \sum_{t=1}^{m} \rho(x_t, y_t) < \varepsilon.$$

Получили противоречие, следовательно, $\hat{\xi}(f) \ne 0$.

Этим проверено выполнение условия 1 из определения 2.

Пусть f, φ – произвольные элементы из RF, ε – положительное число. Тогда существуют такие разложения:

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i + \sum_{k=1}^{n'} f_k (x_k - y_k) f_k', \quad \varphi = \sum_{j=1}^{m} b_j g_j + \sum_{t=1}^{m'} \varphi_t (x_t' - y_t') \varphi_t',$$

что

$$\sum_{i=1}^{n} \xi(a_i)\eta(h_i) + \sum_{k=1}^{n'} \rho(x_k, y_k) < \hat{\xi}(f) + \varepsilon/2, \quad \sum_{j=1}^{m} \xi(b_j)\eta(g_j) + \sum_{t=1}^{m'} \rho(x_t', y_t') < \hat{\xi}(\varphi) + \varepsilon/2.$$

Рассмотрим разложение

$$f + \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i + \sum_{j=1}^{m} b_j g_j + \sum_{k=1}^{n'} f_k (x_k - y_k) f_k' + \sum_{t=1}^{m'} \varphi_t (x_t' - y_t') \varphi_t'.$$

Из определения $\hat{\xi}$ следует, что

$$\hat{\xi}(f + \varphi) \le \sum_{i=1}^{n} \xi(a_i)\eta(h_i) + \sum_{j=1}^{m} \xi(b_j)\eta(g_j) + \sum_{k=1}^{n'} \rho(x_k, y_k) + \sum_{t=1}^{m'} \rho(x_t', y_t') < \hat{\xi}(f) + \hat{\xi}(\varphi) + \varepsilon.$$

Из произвольности числа ε следует, что $\hat{\xi}(f + \varphi) \le \hat{\xi}(f) + \hat{\xi}(\varphi)$.

Этим проверено выполнение условия 2 из определения 2.

Так как $\hat{\xi}(-f) = \hat{\xi}(f)$ для любого $f \in RF$, то $\hat{\xi}$ удовлетворяет и условию 3 из определения 2 и, значит, $\hat{\xi}$ – групповая норма.

Проверим выполнение свойств 1–6.

Пусть r – любой элемент кольца R. Тогда из задания функции $\hat{\xi}$ следует, что $\hat{\xi}(r \cdot e) \le \xi(r) \cdot \eta(e) = \xi(r)$, то есть $\hat{\xi}(r \cdot e) \le \xi(r)$. Допустим, что $\hat{\xi}(r \cdot e) < \xi(r)$. Тогда существует такое разложение

$$r \cdot e = \sum_{i=1}^{n} r_i h_i + \sum_{j=1}^{n'} f_j (x_j - y_j) f_j',$$

что

$$\sum_{i=1}^{n} \xi(r_i)\eta(h_i) + \sum_{j=1}^{n'} \rho(x_j, y_j) < \xi(r).$$

Рассмотрим отображение $\hat{\psi} : RF \to R$, определенное по правилу

$$\hat{\psi}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i' h_i'\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i'.$$

Тогда $r = \hat{\psi}(r \cdot e) = \sum_{i=1}^{n} r_i$.

Так как ξ – псевдонорма на кольце R, и $\eta(h) \geq 1$ и $\rho(x, y) \geq 0$ для любых $h \in F, (x, y) \in X$, то $\xi(r) \leq \sum_{i=1}^{n} \xi(r_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \xi(r_i)\eta(h_i) + \sum_{j=1}^{n'} \rho(x_j, y_j)$.

Получили противоречие с допущением, следовательно, $\hat{\xi}(r \cdot e) = \xi(r)$ для любого $r \in R$.

Пусть теперь x, y – произвольные элементы из X. Из задания функции $\hat{\xi}$ следует, что $\hat{\xi}(x - y) \leq \rho(x, y)$.

Допустим, что $\hat{\xi}(x - y) < \rho(x, y)$. Тогда существует такое разложение

$$x - y = \sum_{i=1}^{n} r_i h_i + \sum_{j=1}^{n'} f_j (x_j - y_j) f_j' \tag{2}$$

что

$$\sum_{i=1}^{n} \xi(r_i)\eta(h_i) + \sum_{j=1}^{n'} \rho(x_j, y_j) < \rho(x, y) \tag{2'}$$

Как и при доказательстве леммы рассмотрим отношение эквивалентности δ, задаваемое совокупностью

$$\{(x_1, y_1), \cdots, (x_{n'}, y_{n'})\}.$$

Вначале покажем, что x и y не эквивалентны относительно этого отношения эквивалентности.

В самом деле, в противном случае, согласно определения отношения δ, должен существовать такой конечный набор пар $(x_{j_1}, y_{j_1}), \cdots, (x_{j_t}, y_{j_t})$, что $x \in (x_{j_1}, y_{j_1}), y \in (x_{j_t}, y_{j_t})$ и $(x_{j_i}, y_{j_i}) \cap (x_{j_{i+1}}, y_{j_{i+1}}) \neq \varnothing$ для $1 \leq i \leq t-1$. Можем считать, что $x_{j_1} = x, y_{j_t} = y$. Тогда

$$\rho(x, y) = \rho(x_{j_1}, y_{j_t}) \leq \sum_{i=1}^{t} \rho(x_{j_i}, y_{j_i}) \leq \sum_{j=1}^{n'} \rho(x_j, y_j) < \rho(x, y).$$

Получили противоречие. Следовательно, x и y не находятся в отношении эквивалентности δ.

Определим отображение $\gamma : X \to X$ следующим образом:

$$\gamma(\overline{x}) = \begin{cases} x, & \text{если } \overline{x}\delta x, \\ y, & \text{если } \overline{x}\delta y, \\ x_0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что отображение γ определено корректно. Тогда $\gamma(x_j) = \gamma(y_j)$ для любого $j = 1, \ldots, n'$.

Так как F – свободный моноид (свободная группа) в многообразии $\mathfrak{M}$, то γ можно продолжить до гомоморфизма γ F в себя.

Пусть $A = \{i \mid 1 \leq i \leq n, \gamma(h_i) = x\}, B = \{i \mid 1 \leq i \leq n, \gamma(h_i) = y\}$.

Так как $x-y=\gamma(x)-\gamma(y)=\sum_{i=1}^{n} r_i\gamma(h_i)$, то $A\neq\varnothing, B\neq\varnothing$. Можем считать, что $A=\{1,...,m\}, B=\{m+1,...,m'\}$ где $1\le m<m'\le n$, причем

$$\eta(h_1)\ge\eta(h_i) \text{ для } i=1,...,m, \tag{3}$$

$$\eta(h_{m+1})\ge\eta(h_i) \text{ для } i=m+1,...,m' \tag{3'}$$

(в противном случае провели бы перенумерацию h_i). Тогда разложение (2) примет вид

$$x-y=\gamma(x-y)=\sum_{i=1}^{n} r_i\gamma(h_i)=\sum_{i=1}^{m} r_i x+\sum_{i=m+1}^{m'} r_i y+\sum_{i=m'+1}^{n} r_i x_0.$$

Следовательно, $$\sum_{i=1}^{m} r_i=1, \quad \sum_{i=m+1}^{m'}(-r_i)=1. \tag{4}$$

Пусть ε – такое положительное число, что

$$\sum_{i=1}^{n}\xi(r_i)\eta(h_i)+\sum_{j=1}^{m}\rho(x_j,y_j)+2\varepsilon<\rho(x,y)$$

(из неравенства (2′) следует существование числа ε).

Существуют такие разложения $h_1=x_1'^{\varepsilon_1}\cdots x_s'^{\varepsilon_s}, h_{m+1}=y_1'^{\varepsilon_1'}\cdots y_p'^{\varepsilon_p'}$, что

$$1+\sum_{i=1}^{s}\rho(x_o,x_i')<\eta(h_1)+\varepsilon; \tag{5}$$

$$1+\sum_{i=1}^{p}\rho(x_o,y_i')<\eta(h_{m+1})+\varepsilon. \tag{5′}$$

Тогда $x=\gamma(h_1)=\gamma(x_1')^{\varepsilon_1}...\gamma(x_s')^{\varepsilon_s}$ и $y=\gamma(h_{m+1})=\gamma(y_1')^{\varepsilon_1'}...\gamma(y_p')^{\varepsilon_p'}$.

По предложению существуют такие числа q_1 и q_2, что $\gamma(x_{q_1}')=x,\ \gamma(y_{q_2}')=y.$

Из определения отображения γ следует, что существуют такие последовательности попарно различных чисел $l_1,...,l_{s'}\in\{1,...,n\}$ и $k_1,...,k_{p'}\in\{1,...,n\}$, что

$$x\in\{x_{l_1},y_{l_1}\},\ x_{q_1}'\in\{x_{l_{s'}},y_{l_{s'}}\},\ \{x_{l_i},y_{l_i}\}\cap\{x_{l_{i+1}},y_{l_{i+1}}\}\neq\varnothing \text{ для } i=1,...,s'-1,$$

$$y\in\{x_{k_1},y_{k_1}\},\ y_{q_2}'\in\{x_{k_{p'}},y_{k_{p'}}\},\{x_{k_i},y_{k_i}\}\cap\{x_{k_{i+1}},y_{k_{i+1}}\}\neq\varnothing \text{ для } i=1,...,p'-1.$$

Можем считать, что

$$x=x_{l_1}, y_{l_i}=y_{l_{i+1}} \text{ для } 1\le i\le s', x_{q_1}'=y_{l_{s'}}$$

и $$y=x_{k_1}, y_{k_i}=x_{k_{i+1}},\ y_{q_2}'=y_{l_{p'}} \text{ для } 1\le i\le p'.$$

Из определения множеств A и B следует, что

$$\{l_1,...,l_{s'}\}\subseteq A,\{k_1,...,k_{p'}\}\subseteq B. \tag{6}$$

Тогда последовательно применяя B, C, (5), (5'), (4), (6), (3) и (3'), получим, что

$$\rho(x,y) \le \eta(x) + \eta(y) \le \eta(x'_{q_1}) + \rho(x, x'_{q_1}) + \eta(y'_{q_2}) + \rho(y, y'_{q_2}) =$$
$$= 1 + \rho(x_0, x'_{q_1}) + 1 + \rho(x_0, y'_{q_2}) + \rho(x_{l_1}, y_{l_{s'}}) + \rho(x_{k_1}, y_{l_{p'}}) \le$$
$$\le \eta(h_1) + \varepsilon + \sum_{i=1}^{s'} \rho(x_{l_i}, y_{l_i}) + \eta(h_{m+1}) + \varepsilon + \sum_{i=1}^{p'} \rho(x_{k_i}, y_{k_i}) \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{m} \xi(r_i)\eta(h_1) + \varepsilon + \sum_{i=m+1}^{m'} \xi(r_i)\eta(h_{m+1}) + \varepsilon + \sum_{j=1}^{n'} \rho(x_j, y_j) \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} \xi(r_i)\eta(h_i) + \sum_{j=1}^{n'} \rho(x_j, y_j) + 2\varepsilon.$$

Получили противоречие с выбором числа ε, следовательно, $\hat{\xi}(x-y) = \rho(x,y)$.

Теперь покажем, что $\tau_{\hat{\xi}}$ – кольцевая топология. Согласно предложению 1.2.2 из [2], нужно проверить, что совокупность $\mathfrak{B}_0 = \{V_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ удовлетворяет условиям (БО.1) – (БО.6). Так как $\hat{\xi}$ – групповая норма, то условия (БО.1) – (БО.4) выполнены.

Проверим выполнение условий (БО.5) и (БО.6).

Пусть ε – произвольное положительное число и $\varepsilon_1 > 0$ такое число, что $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 < \varepsilon$.

Если $f, \varphi \in V_{\varepsilon_1}$, то существуют такие разложения:

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i + \sum_{k=1}^{n'} f_k (x_k - y_k) f'_k, \quad \varphi = \sum_{j=1}^{m} b_j g_j + \sum_{t=1}^{m'} \varphi_t (x'_t - y'_t)\varphi'_t,$$

что
$$\sum_{i=1}^{n} \xi(a_i)\eta(h_i) + \sum_{k=1}^{n'} \rho(x_k, y_k) < \varepsilon_1; \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \xi(b_j)\eta(g_j) + \sum_{t=1}^{m'} \rho(x'_t, y'_t) < \varepsilon_1. \tag{7'}$$

Если обозначить элемент $\sum_{i=1}^{n} a_i h_i$ через ψ, то

$$f \cdot \varphi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j h_i g_j + \sum_{t=1}^{m'} \psi\varphi_t (x'_t - y'_t) + \sum_{k=1}^{n'} f_k (x_k - y_k) f'_k \varphi,$$

причем
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \xi(a_i b_j)\eta(h_i g_j) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \xi(a_i)\xi(b_j)\eta(h_i)\eta(g_j) \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} \xi(a_i)\eta(h_i) \cdot \sum_{j=1}^{m} \xi(b_j)\eta(g_j) < \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1.$$

Кроме того, из неравенств (7) и (7') следует, что

$$\sum_{k=1}^{n'}\rho(x_k, y_k) < \varepsilon_1 \text{ и } \sum_{t=1}^{m'}\rho(x_t^{'}, y_t^{'}) < \varepsilon_1 .$$

Тогда

$$\hat{\xi}(f\cdot\varphi) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi(a_i b_j)\eta(h_i g_j) + \sum_{k=1}^{n'}\rho(x_k, y_k) + \sum_{t=1}^{m'}\rho(x_t^{'}, y_t^{'}) < \varepsilon_1\cdot\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 < \varepsilon,$$

то есть $f\cdot\varphi \in V_\varepsilon$. Из произвольности элементов f,φ следует, что $V_{\varepsilon_1}\cdot V_{\varepsilon_1} \subseteq V_\varepsilon$ и, значит, выполнено условие (БО.5).

Пусть $f = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i$ (где $h_i \ne h_j$ для $1 \le i < j \le n$) – произвольный элемент из RF и ε – положительное число.

Если $f = 0$, то $f\cdot V_\varepsilon = \{0\} \subseteq V_\varepsilon$.

Если же $f \ne 0$, то рассмотрим число $s = \sum_{i=1}^{n}\xi(a_i)\eta(h_i)$.

Существует такое число $\varepsilon_1 > 0$, что $s\cdot\varepsilon_1 + \varepsilon_1 < \varepsilon$.

Пусть теперь φ – любой элемент из V_{ε_1}. Существует такое разложение

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} b_j g_j + \sum_{t=1}^{m'}\varphi_t(x_t - y_t)\varphi_t^{'},$$

что
$$\sum_{j=1}^{m}\xi(b_j)\eta(g_j) + \sum_{t=1}^{m'}\rho(x_t, y_t) < \varepsilon_1 .$$

Тогда
$$f\cdot\varphi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j h_i g_j + \sum_{t=1}^{m'} f\varphi_t(x_t - y_t)\varphi_t^{'},$$

причем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi(a_i b_j)\eta(h_i g_j) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi(a_i)\xi(b_j)\eta(h_i)\eta(g_j) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\xi(a_i)\eta(h_i)\cdot\sum_{j=1}^{m}\xi(b_j)\eta(g_j) < s\cdot\varepsilon_1$$

и
$$\sum_{t=1}^{m'}\rho(x_t, y_t) < \varepsilon_1.$$

Из задания функции следует, что

$$\hat{\xi}(f\cdot\varphi) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi(a_i b_j)\eta(h_i g_j) + \sum_{t=1}^{m'}\rho(x_t, y_t) < s\cdot\varepsilon_1 + \varepsilon_1 < \varepsilon,$$

то есть $f\cdot\varphi \in V_\varepsilon$. Из произвольности φ следует, что $f\cdot V_{\varepsilon_1} \subseteq V_\varepsilon$.

Аналогично проверяется, что $V_{\varepsilon_1}\cdot f \subseteq V_\varepsilon$, то есть выполнено условие (БО.6).

Итак, $\tau_{\hat{\xi}}$ – кольцевая топология.

Покажем, что X – замкнутое подмножество в $(RF, \tau_{\hat{\xi}})$.

Допустим противное и пусть $f_0 \in [X] \setminus X$. Тогда найдутся такие конечные подмножества $\{z_1, ..., z_n\} \subseteq F$, $\{x_1, ..., x_p\} \subseteq X$, что $z_i \neq z_j$ при $1 \le i < j \le n$, $f_0 = \sum_{i=1}^{n} r_i h_i$ (где $0 \neq r_i \in R$), $z_i \in < x_1, ..., x_p >_F$, $1 \le i \le n$.

Пусть $\varepsilon = \min\{\xi(1), \xi(-1), \xi(-r_i), \xi(r_i - 1), \rho(x_j, x_k) \mid 1 \le i \le n, 1 \neq r_i, 1 \le i < k \le p\}$.

Тогда $W_{\frac{\varepsilon}{4}} = \left\{\varphi \in RF \mid \hat{\xi}(\varphi) < \frac{\varepsilon}{4}\right\}$ – окрестность нуля в $(RF, \tau_{\hat{\xi}})$ и, значит, $(f_0 + W_{\frac{\varepsilon}{4}}) \cap X \neq \varnothing$.

Пусть $x \in (f_0 + W_{\frac{\varepsilon}{4}}) \cap X$. Тогда $x - f_0 \in W_{\frac{\varepsilon}{4}}$ и, значит,

$$\hat{\xi}(x - f_0) < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (*)$$

Возможны следующие 3 случая:

1. Существует $i_0 \in \{1, ..., p\}$, такое, что $x = x_{i_0}$. Тогда $x - f_0 = \sum_{i=1}^{k} \overline{r_i}\overline{z_i}$, где $r_l \neq 0$ для $1 \le l \le n$ и $\{\overline{r_l} \mid l = 1, ..., k\} \subseteq \{1, -1, -r_i, 1 - r_i \mid i = 1, ..., n; r_i \neq 1\}$, $z_i \neq z_j$ для $1 \le i < j \le k$ и $\{\overline{z_i} \mid i = 1, ..., k\} \subseteq \{z_i, x \mid i = 1, ..., n\}$, причем $\overline{z_i} \in < x_1, ..., x_p >_F$ для $1 \le i \le k$.

Так как $\eta(z) \ge 1$ для любого $z \in F$, то из леммы получим, что $\hat{\xi}(x - f_0) \ge \varepsilon > \frac{\varepsilon}{4}$.

Получили противоречие с неравенством $(*)$.

2. $x \neq x_i$ и $\rho(x, x_i) \ge \frac{\varepsilon}{4}$ для $i = 1, ..., p$. Тогда $x - f_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \overline{r_i}\overline{z_i}$, где $\overline{r_i} = \begin{cases} r_i, \textit{если } i \le n, \\ 1, \textit{если } i = n+1 \end{cases}$ и $\overline{z_i} = \begin{cases} z_i, \textit{если } i \le n, \\ x, \textit{если } i = n+1 \end{cases}$, причем $\overline{z_i} \in < x_1, ..., x_{p+1} >_F$, где $x_{p+1} = x$ для любого $1 \le i \le n+1$. Так как $\eta(z) \ge 1$ для любого $z \in F$, то из леммы получим, что $\hat{\xi}(x - f_0) \ge \min\{\xi(r_1), \rho(x_i, x_j) \mid 1 \le i < j \le p+1\} \ge \frac{\varepsilon}{4}$.

Получили противоречие с неравенством (*).

3. $x = x_i$ для $i = 1, ..., p$, но существует $i_o \le p$, такое, что $\rho(x, x_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Тогда $\hat{\xi}(x_{i_0} - f_0) \le \frac{\varepsilon}{4}$ и, значит, $\hat{\xi}(x_{i_0} - f_0) \le \hat{\xi}(x_{i_0} - x) + \hat{\xi}(x - f_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Так же как и в случае 1, получим, что $x_{i_0} - f_0 = \sum_{i=1}^{k} \overline{r_i}\overline{z_i}$, где $\overline{r_l} \neq 0$ для $1 \leq l \leq k$ и $\{\overline{r_i} \mid i = 1,...,k\} \subseteq \{1, -1, -r_i, 1 - r_i \mid i = 1,...,n; r_i \neq 1\}$, $\overline{z_i} \neq \overline{z_j}$ для $1 \leq i < j \leq k$ и $\{\overline{z_i} \mid i = 1,...,k\} \subseteq \{z_i, x \mid i = 1,...,n\}$, причем $\overline{z_i} \in < x_1,...,x_p >_F$ для $1 \leq i \leq k$.

Так как $\eta(z) \geq 1$ для любого $z \in F$, то из леммы получим, что $\hat{\xi}(x_{i_0} - f_0) \geq \varepsilon$.

Получили противоречие с тем, что $\hat{\xi}(x_{i_0} - f_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Итак, показали, что X – замкнутое подмножество в $(RF, \tau_{\hat{\xi}})$.

Теперь проверим, что подгруппа $R \cdot f = \{r \cdot f \mid r \in R\}$ аддитивной группы кольца RF топологически изоморфна аддитивной группе кольца R для любого элемента $f = \sum_{i=1}^{n} r_i z_i$, где $z_i \neq z_j$ для $1 \leq i < j \leq n$ и для некоторого $i_0 \leq n$ элемент r_{i_0} (можем считать, что r_1) не является левым топологическим делителем нуля в R.

Из предложения 1.8.7 из [2] следует, что отображение $\varphi_f : R \to R \cdot f$ действует по правилу $\varphi_f(r) = r \cdot f$. Проверим, что φ_f – открытое отображение.

Пусть V_0 – произвольная окрестность нуля в R. Так как r_1 не является левым топологическим делителем нуля в R, то согласно предложения 1.8.7 из [2], существует такая окрестность V_1 нуля в R, что $r \cdot r_1 \notin V_1$ для любого элемента $r \notin V_0$.

Пусть ε – такое положительное число, что $\{r \in R \mid \xi(r) < \varepsilon\} \subseteq V_1$.

Если $\{x_1,...,x_p\}$ такое конечное подмножество в X, что $z_i \in < x_1,...,x_p >_F$, $1 \leq i \leq n$ и $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, \rho(x_i, x_j) \mid 1 \leq i < j \leq p\}$, то покажем, что $W_{\varepsilon_1} \cap R \cdot f \subseteq V_0 \cdot f$.

Допустим противное, то есть что существует такой элемент $f_0 \in W_{\varepsilon_1} \cap R \cdot f$, что $f_0 \notin V_0 \cdot f$. Тогда существует такой элемент $r \in R$, что $f_0 = r \cdot f = \sum_{i=1}^{n} (r \cdot r_i) z_i, \hat{\xi}(f_0) < \varepsilon_1$, а $r \notin V_0$.

Из выбора окрестности V_1 следует, что $r \cdot r_1 \notin V_1$ и, значит, $\xi(r \cdot r_1) \geq \varepsilon > \varepsilon_1$. Тогда согласно лемме, $\hat{\xi}(f_0) \geq \min\{\xi(r \cdot r_1), \rho(x_i, x_j) \mid 1 \leq i < j \leq p\} \geq \varepsilon_1$ и, значит, $f_0 \notin W_{\varepsilon_1}$. Получили противоречие с выбором элемента f_0. Следовательно, $W_{\varepsilon_1} \cap R \cdot f \subseteq V_0 \cdot f$.

Итак, мы показали, что подгруппы $R \cdot f(+)$ и $R(+)$ топологически изоморфны.

Проверим, что $R \cdot x$ замкнутое подмножество в $(RF, \tau_{\hat{\xi}})$ для любого $x \in X$.

Допустим противное, то есть что $f_0 \in [R \cdot x] \setminus R \cdot x$.

Существуют такие подмножества $\{z_1,...,z_p\} \subseteq F$ и $\{x_1,...,x_p\} \subset X$, что $f_0 = \sum_{j=1}^{n} r_j z_j$, где $r_j \neq 0$ и $z_j \in < x_1,...,x_p >_F$ при $1 \leq j \leq n$.

Если $\varepsilon = \min\left\{\xi(-r_1), \rho(x_i, x_j) \mid 1 \le i < j \le p\right\}$, то $(f_0 + W_\varepsilon) \cap R \cdot x \ne \varnothing$ для окрестности нуля $W_\varepsilon = \left\{\varphi \in RF \mid \hat{\xi}(\varphi) < \varepsilon\right\}$ в $(RF, \tau_{\hat{\xi}})$.

Пусть $rx \in (f_0 + W_\varepsilon) \cap R \cdot x$. Тогда $rx - f_0 \in W_\varepsilon$, то есть

$$\hat{\xi}(rx - f_0) < \varepsilon . \qquad (**)$$

Возможны следующие 2 случая:

1. $n = 1$. Так как $f_0 \notin R \cdot x$, то $z_1 \ne x$. Полагая в лемме $\tilde{r}_1 = -r_1$, $\tilde{z}_1 = z_1$, получим, что $\hat{\xi}(rx - r_1 z_1) \ge \min\left\{\xi(-r_1), \rho(x_i, x_j) \mid 1 \le i < j \le p\right\} \ge \varepsilon$. Получили противоречие с неравенством (**) .

2. $n \ge 2$. Так как $z_i \ne z_j$, то $i \ne j$, тогда существует такой индекс $i_0 \le n$, что $z_{i_0} \ne x$. Можем считать, что $z_1 \ne x$. Тогда $rx - f_0 = \sum_{i=1}^{k} \overline{r_i}\,\overline{z_i}$, где $\overline{r_1} = -r_1$, $\{\overline{r_i} \mid i = 2, \dots, k\} \subseteq \left\{-r_j, r, r - r_j \mid j = 1, \dots, n\right\}$, $\{\overline{z_i} \mid i = 1, \dots, k\} \subseteq \left\{z_j, x \mid j = 1, \dots, n\right\}$. Полагая в лемме $\tilde{r}_j = \overline{r}_j, \tilde{z}_j = \overline{z}_j$, для $j = 1, \dots, m$ получим, что $\hat{\xi}(rx - f_0) \ge \min\left\{\xi(-r_1), \rho(x_i, x_j) \mid 1 \le i < j \le p\right\} \ge \varepsilon$.

Получили противоречие с неравенством (**) .

Этим теорема полностью доказана.

Следующий пример показывает, что в общем случае подмножество $R \cdot f$ не является замкнутым в $(RF, \tau_{\hat{\xi}})$, даже если $f = \sum_{i=1}^{n} r_i z_i$ (где $z_i \ne z_j$ для $1 \le i < j \le n$) и все элементы r_i не являются левыми топологическими делителями нуля в R .

Пример. Пусть R – кольцо целых чисел, $p = 3$ и норма ξ_p является p-адической нормой на R .

Рассмотрим множество $X = \left\{x_0, x_1\right\}$ с метрикой ρ, где $\rho(x_0, x_1) = 1$.

Ясно, что p – равнобедренная метрика.

Пусть F – свободный моноид, порожденный множеством *X*, и $\hat{\xi}$ – групповая норма на кольце RF, построеннная в теореме для псевдонормы ξ и метрики ρ.

Если $f = 2x_0 + 2x_1$ и $f_0 = x_0 + x_1$, то $f_0 \notin R \cdot f$.

Покажем, что $f_0 \in \left[R \cdot f\right]_{RF}$.

В самом деле, пусть ε – произвольное положительное число и n – такое натуральное число, что $\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Так как числа 2 и 3^n взаимно просты, то существуют такие целые числа k и m, что $2k - 3^n \cdot m = 1$. Тогда $\xi_p(2k - 1) = \xi_p(3^n \cdot m) \le \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $kf - f_0 = (2k - 1)x_0 + (2k - 1)x_1$. Из построения нормы $\hat{\xi}$ следует, что

$$\hat{\xi}(kf - f_0) \le \max\left\{\xi_p(2k - 1), \xi_p(2k - 1) \cdot 2\right\} \le \max\left\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3} \cdot 2\right\} < \varepsilon .$$

Из произвольности числа ε следует, что $f_0 \in [R \cdot f]_{RF}$, причем поскольку ξ_p – норма на кольце R, то элемент 2 не является левым топологическим делителем нуля в R.

Также приведем пример, показывающий, что теорема не может быть усилена в том смысле, что псевдонорму ξ кольца R вообще говоря нельзя продлить до такой псевдонормы $\hat{\xi}$ кольца RF, чтобы $\hat{\xi}(x-y)=\rho(x,y)$, то есть вместо утверждений: $\hat{\xi}$ – групповая норма и $\tau_{\hat{\xi}}$ – кольцевая топология, получить что $\hat{\xi}$ – псевдонорма.

Пример. Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие коммутативных идемпотентных моноидов, то есть коммутативных моноидов в которых выполняется тождество $g^2 = g$; (X,ρ) – такое метрическое пространство, что $|X| \geq 2$ и $\rho(x,y)=1/2$ для любых $x,y \in X$, $x \neq y$; F – свободный моноид, порожденный множеством X, R – двухэлементное поле с обычной нормой ξ, то есть $\xi(r)=\begin{cases} 0, \text{ если } r=0, \\ 1, \text{ если } r=1. \end{cases}$

Покажем, что норму ξ и метрику ρ нельзя продлить до кольцевой псевдонормы $\hat{\xi}$.

Допустим противное, то есть что существует такая псевдонорма $\hat{\xi}$ на полугрупповом кольце RF, что $\hat{\xi}(x-y)=\rho(x,y)$ для любых $x,y \in X$.

Зафиксируем некоторую пару различных элементов $x,y \in X$. Так как $F \in \mathfrak{M}$, то $x^2 = x$ и $y^2 = y$. Тогда из того, что $2r=0$, следует, что

$$\frac{1}{2}=\rho(x,y)=\hat{\xi}(x-y)=\hat{\xi}(x^2-y^2)=\hat{\xi}((x-y)^2)\leq(\hat{\xi}(x-y))^2=(\rho(x,y))^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Получили противоречие с допущением, следовательно, норму ξ и метрику ρ нельзя продлить до кольцевой псевдонормы $\hat{\xi}$ на кольце RF.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бельнов В.К.* О метризации колец многочленов // Bulletin de l’Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sci. Math., Astr. et Phys. 1974. V. XXII. No. 12. P. 1217–1233.
2. *Арнаутов В.И., Водинчар М.И., Михалев А.В.* Введение в теорию топологических колец и модулей. Кишинев: Штиинца, 1981. 175 с.

Статья поступила 24.05.2018 г.

Yunusova D. I. (2018) ON THE EXTENSION OF PSEUDONORM AND METRICS TO THE SEMIGROUP RING. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 56. pp. 42–56

DOI 10.17223/19988621/56/4

Keywords: pseudonorm, topology, semigroup ring, group norm.

In connection with the study of algebraic systems with additional structures (topology, order, norm, etc.), it sometimes becomes necessary to continue these additional structures from the ring to their over-rings. In particular, the question arises of the possibility to extend the given additional structures of a group and a ring to their group ring.

This paper is devoted to the study of the possibility of extending a real-valued pseudonorm and a metric to the semigroup ring of a free monoid.

The main result of the paper is a theorem that establishes sufficient conditions for the possibility of extending the pseudonorm of the ring R and the metric of the space X to such a group norm on the semigroup ring RF of the ring R and the free monoid F generated by the set X such that the topology given by this group norm is annular.

AMS Mathematical Subject Classification: 16S36, 16W80, 22A30

YUNUSOVA Dilfuza Israilovna (Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Republic of Uzbekistan) E-mail: dilfuzaisrailovna@ gmail.com

REFERENCES

1. Bel'nov V.K. (1974) O metrizatsii kolets mnogochlenov [On metrization of polynomial rings]. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences*, *Série des Sci. Math. Astr. et Phys.* XXII(12). pp. 1217–1233.
2. Arnautov V.I., Vodincear M.I., Mikhalev A.V. (1981) *Vvedeniye v teoriyu topologicheskikh kolets i moduley* [Introduction to the theory of topological rings and modules]. Chişinău: Ştiinţa.