

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/56/9

**В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик****КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ И ОГРАНИЧЕНИЯ НА НАГРУЗКУ  
В ВЕРШИНАХ ПРАВИЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНОЙ  
И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИД**

На основе представления точки деформируемого твердого тела в виде стягиваемого к ней элементарного объема изучены напряжения в вершине многогранников при поверхностных нагрузках на их боковых гранях. Показано, что все компоненты напряжений оказываются заданными, что обуславливает неклассическую постановку задач механики. Сформулированы условия на нагрузку, обеспечивающие корректность постановок рассматриваемых задач.

**Ключевые слова:** *многогранник, особые точки, сингулярность, элементарный объем, неклассические задачи.*

Особые точки упругих тел – это вершины трещин, клиньев, конусов, многогранников, точки края поверхностей соединения, линии пересечения образующих поверхностей (ребра) и т.п. Особые точки являются потенциальными концентраторами напряжений, вблизи них зарождается разрушение. Поэтому изучение особенностей поведения параметров состояния (напряжений и деформаций) тела в окрестностях таких точек актуально и ему посвящено большое число публикаций [1–33 и др.]. В настоящее время для исследования полей напряжений в окрестности особых точек применяются два подхода. Первый из них (далее классический или асимптотический) характерен тем, что особая точка в нем исключается из рассмотрения посредством помещения в нее полюса криволинейной системы координат (в полюсе отсутствует однозначное соответствие между точкой тела и ее координатами, поэтому такая точка не входит в область построения решения, в ней имеют смысл лишь асимптотические значения искомых параметров). Обзоры публикаций по применению классического подхода приведены в работах [14, 19, 24, 25]. Решение в классическом случае строится различными методами: операционного исчисления [1, 5, 6, 14], функций комплексного переменного [8], функций Эри [9], интегральных уравнений [3, 6, 23], разделения переменных [2], разложения в ряды по различным функциям [13, 15, 22, 27] и др. Авторы, применяющие численные методы (метод конечных элементов [11, 12, 16, 18, 25, 26, 28], метод конечных элементов в сочетании с поиском собственных значений методом Арнольда [29], метод граничных элементов [17, 21], метод граничных состояний [24]), реализуют асимптотическую идею посредством неограниченного измельчения КЭ-сетки области вблизи особой точки или конструированием специальных конечных элементов. Многие авторы асимптотических решений при изучении напряженного состояния вблизи особых точек разыскивают показатели сингулярности [1, 5, 11, 20, 21, 25, 27] – параметры решения характеристических уравнений соответствующих однородных задач. Полагается, что при выполнении определенных критериев, формулируемых для таких параметров, решение для напряже-

ний может иметь сингулярный характер при стремлении расстояния до особой точки к нулю.

Исключение в классическом подходе особой точки из области построения решения приводит к неадекватному определению напряжений в ее окрестности, так как при этом не рассматриваются условия (например, граничные), задаваемые непосредственно в самой точке. Такое исключение объясняется невозможностью формулировки граничных условий в особой точке, так как она принадлежит одновременно нескольким поверхностям (в точках пространственного ребра – двум поверхностям, в вершине многогранника – всем его граням). Второй (неклассический) подход к исследованию параметров состояния вблизи особой точки связан с преодолением указанного недостатка классического подхода. В альтернативном подходе, согласно представлению о точке сплошной среды, разработанному учеными XVIII века (Даниил и Иоганн Бернулли, Ж.Л. Д'Аламбер и Л. Эйлер [30]) и признаваемому современными исследователями, особая точка (как и любая другая точка тела) считается стягиваемым к ней элементарным объемом. Рассматривается элементарный объем, содержащий особую точку. Такой объем имеет характерный (линейный) размер, равный представительному объему моделируемого тела, и обладает его механическими свойствами. Параметры состояния элементарного объема однородны, так как они являются осредненными по представительному объему тела значениями параметров более низкого структурного уровня. При стягивании элементарного объема к точке его параметры состояния остаются неизменными. Вследствие сказанного, за ограничения, задаваемые в особой точке, принимаются ограничения, задаваемые для элементарного объема, содержащего эту точку. Впервые такой подход к изучению параметров состояния в особой точке и ее окрестности применялся в работах [31, 32], где показано, что необычность (уникальность) особой точки проявляется в избыточном количестве (по сравнению с обычной граничной точкой) задаваемых в ней ограничений. Это обстоятельство делает задачу механики деформируемого твердого тела с особой точкой неклассической. Неклассические (в указанном смысле) задачи рассматривались в работах [31] (однородные плоские клинья), [32, 33] (составные плоские клинья), [34] (составные пространственные ребра), [35] (внутренние особые точки в плоских элементах конструкций), [36] (круговой и составной конус).

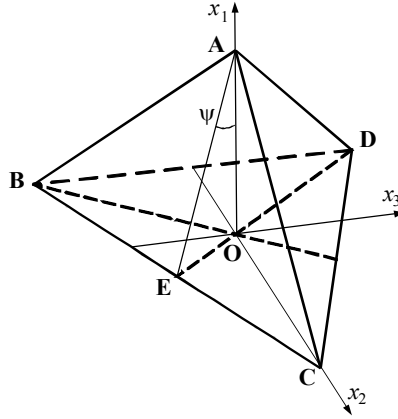
В настоящей статье неклассический подход используется для изучения компонент напряжений в вершинах многогранников – правильных треугольной и четырехугольной пирамид. Построенные решения являются задаваемыми ограничениями в особых точках и должны использоваться в постановках задач механики деформируемых твердых тел, содержащих рассматриваемые элементы.

## 1. Компоненты напряжений и ограничения на нагрузку в вершине тетраэдра

### 1.1. Постановка задачи

Рассматривается упругое тело, содержащее конструктивный элемент в виде части объема правильной треугольной пирамиды. Вблизи вершины А строится ее виртуальное основание – правильный треугольник BCD (рис. 1). Угол между высотой пирамиды и высотой треугольника BAC обозначается через  $\psi$ . С пирамидой связываем декартову ортонормированную систему координат  $O, x_1, x_2, x_3$ . Начало координат (т.О) совпадает с центром основания пирамиды, а координат-

ная плоскость  $x_1, x_2$  содержит ребро AC (рис. 1.1). Базисные векторы введенной системы координат обозначаются  $\bar{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).



**Рис. 1.** Часть правильной треугольной пирамиды вблизи вершины  
**Fig. 1.** Part of a regular triangular pyramid near the vertex

На гранях ACD, ABC и ADB вводятся ортонормированные трехгранники. Эти трехгранники в координатах  $x_1, x_2, x_3$  записываются равенствами:

на грани ACD:

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \bar{e}_3, \\ \bar{n}' &= \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{1}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \bar{e}_3, \quad \bar{n}'' = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{e}_2 - \frac{1}{2} \bar{e}_3,\end{aligned}\quad (1.1)$$

на грани ABC:

$$\begin{aligned}\bar{m} &= \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \bar{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \bar{e}_3, \\ \bar{m}' &= \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{1}{2} \sin \psi \bar{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \bar{e}_3, \quad \bar{m}'' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \bar{e}_2 - \frac{1}{2} \bar{e}_3,\end{aligned}\quad (1.2)$$

на грани ADB:

$$\bar{l} = \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \psi \bar{e}_2, \quad \bar{l}' = \cos \psi \bar{e}_1 + \frac{1}{2} \sin \psi \bar{e}_2, \quad \bar{l}'' = \bar{e}_3. \quad (1.3)$$

Первые орты в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, пара других лежит в их плоскости. Причем второй орт направлен по высоте, исходящей из вершины A образующего грань треугольника. Вблизи вершины A поверхностную нагрузку на гранях пирамиды представим разложениями по базисам (1.1), (1.2), (1.3)

$$\bar{P}_n = p_n \bar{n} + \tau_n \bar{n}' + \vartheta_n \bar{n}'', \quad \bar{P}_m = p_n \bar{m} + \tau_n \bar{m}' + \vartheta_n \bar{m}'', \quad \bar{P}_l = p_n \bar{l} + \tau_n \bar{l}' + \vartheta_n \bar{l}''. \quad (1.4)$$

Здесь  $\bar{P}_n, \bar{P}_m, \bar{P}_l$  – задаваемые векторы напряжений соответственно на гранях ACD, ABC и ADB. Вершина пирамиды (особая точка) отождествляется со стяги-

ваемым к ней элементарным объемом тела. Грани пирамиды являются касательными плоскостями в этой точке для рассматриваемого упругого тела. Поэтому в ней оказываются заданными следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_n = p_n, \quad \tau_{n'} = \tau_n, \quad \tau_{n''} = \vartheta_n, \quad \sigma_m = p_m, \quad \tau_{m'} = \tau_m, \quad \tau_{m''} = \vartheta_m, \\ \sigma_l = p_l, \quad \tau_{l'} = \tau_l, \quad \tau_{l''} = \vartheta_l.\end{aligned}\quad (1.5)$$

В этих равенствах  $\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l$  – нормальные напряжения на гранях пирамиды,  $\tau_{n'}, \tau_{n''}, \tau_{m'}, \tau_{m''}, \tau_{l'}, \tau_{l''}$  – касательные напряжения в направлении соответствующих ортов, определенных равенствами (1.1), (1.2), (1.3). Компоненты тензора напряжений в вершине пирамиды в координатах  $x_1, x_2, x_3$  упорядочим списком  $\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$ . Для вычисления векторов напряжений на площадках, ориентированных ортами  $\bar{n}, \bar{m}, \bar{l}$ , в точке  $A$  используется формула Коши (например  $\bar{P}_n = \bar{n} \cdot \mathbf{P}$ , где  $\mathbf{P}$  – тензор напряжений). Проектируя векторы напряжений на направления ортов (1.1), (1.2), (1.3), приходим к системе девяти уравнений относительно шести компонент напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{4} \sigma_{22} \cos^2 \psi + \frac{3}{4} \sigma_{33} \cos^2 \psi + \sigma_{12} \sin \psi \cos \psi + \\ + \sqrt{3} \sigma_{13} \sin \psi \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{23} \cos^2 \psi = p_n;\end{aligned}\quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \sin \psi \cos \psi - \frac{1}{4} \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \frac{3}{4} \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \cos 2\psi + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{13} \cos 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{23} \sin \psi \cos \psi = \tau_n;\end{aligned}\quad (1.7)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_{22} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_{33} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{12} \sin \psi - \frac{1}{2} \sigma_{13} \sin \psi + \frac{1}{2} \sigma_{23} \cos \psi = \vartheta_n;\quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \sin^2 \psi + \frac{1}{4} \sigma_{22} \cos^2 \psi + \frac{3}{4} \sigma_{33} \cos^2 \psi + \sigma_{12} \sin \psi \cos \psi - \\ - \sqrt{3} \sigma_{13} \sin \psi \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{23} \cos^2 \psi = p_m;\end{aligned}\quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \sin \psi \cos \psi - \frac{1}{4} \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \frac{3}{4} \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \cos 2\psi - \\ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{13} \cos 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{23} \sin \psi \cos \psi = \tau_m;\end{aligned}\quad (1.10)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_{22} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_{33} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{12} \sin \psi - \frac{1}{2} \sigma_{13} \sin \psi + \frac{1}{2} \sigma_{23} \cos \psi = \vartheta_m;\quad (1.11)$$

$$\sigma_{11} \sin^2 \psi + \sigma_{22} \cos^2 \psi - \sigma_{12} \sin 2\psi = p_l;\quad (1.12)$$

$$\sigma_{11} \sin \psi \cos \psi - \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \sigma_{12} \cos 2\psi = \tau_l;\quad (1.13)$$

$$\sigma_{13} \sin \psi - \sigma_{23} \cos \psi = \vartheta_l.\quad (1.14)$$

Задача состоит в исследовании (в зависимости от геометрических параметров и заданной нагрузки) условий существования решения системы уравнений (1.6) – (1.14), и его построения. Условия существования решения образуют ограничения на параметры нагрузки, обеспечивающие корректность постановки рассматриваемой задачи механики. Решение системы уравнений (1.6) – (1.14) формирует задаваемые ограничения на компоненты напряжений в вершине пирамиды. В случае, когда количество таких ограничений окажется больше трех, рассматриваемая задача механики деформируемого тела становится неклассической.

## 1.2. Исследование системы уравнений (1.6) – (1.14)

Посредством эквивалентных преобразований уравнения (1.6) – (1.14) приводятся к двум автономным системам. Первая из них включает четыре уравнения относительно двух компонент напряжений  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$ :

$$2\sqrt{3}\sigma_{13}\sin\psi\cos\psi + \sqrt{3}\sigma_{23}\cos^2\psi = p_n - p_m; \quad (1.15)$$

$$\sqrt{3}\sigma_{13}\cos 2\psi - \sqrt{3}\sigma_{23}\sin\psi\cos\psi = \tau_n - \tau_m; \quad (1.16)$$

$$-\sigma_{13}\sin\psi + \sigma_{23}\cos\psi = \vartheta_n - \vartheta_m; \quad (1.17)$$

и (1.14)  $\sigma_{13}\sin\psi - \sigma_{23}\cos\psi = \vartheta_l.$

Вторая система состоит из пяти уравнений относительно четырех компонент напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$ :

$$2\sigma_{11}\sin^2\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos^2\psi + \frac{3}{2}\sigma_{33}\cos^2\psi + \sigma_{12}\sin 2\psi = p_n + p_m; \quad (1.18)$$

$$\sigma_{11}\sin 2\psi - \frac{1}{4}\sigma_{22}\sin 2\psi - \frac{3}{4}\sigma_{33}\sin 2\psi + \sigma_{12}\cos 2\psi = \tau_n + \tau_m; \quad (1.19)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{22}\cos\psi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{33}\cos\psi + \sqrt{3}\sigma_{12}\sin\psi = \vartheta_n - \vartheta_m; \quad (1.20)$$

и (1.12), (1.13)  $\sigma_{11}\sin^2\psi + \sigma_{22}\cos^2\psi - \sigma_{12}\sin 2\psi = p_l,$

$$\sigma_{11}\sin\psi\cos\psi - \sigma_{22}\sin\psi\cos\psi - \sigma_{12}\cos 2\psi = \tau_l.$$

Изучим систему уравнений (1.15) – (1.17) и (1.14). Ранг этой системы равен двум. Чтобы она была совместна, ранг расширенной матрицы также должен равняться двум. Это условие приводит к двум ограничениям на компоненты вектора нагрузки

$$\vartheta_n + \vartheta_m + \vartheta_l = 0; \quad (1.21)$$

$$(p_n - p_m)(1 - 3\sin^2\psi) - 3(\tau_n - \tau_m)\cos\psi\sin\psi - \sqrt{3}(\vartheta_n + \vartheta_m)\cos\psi = 0. \quad (1.22)$$

При выполнении ограничений (1.21), (1.22) компоненты  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  тензора напряжений имеют значения

$$\sigma_{13} = \frac{1}{\sqrt{3}}[(p_n - p_m)tg\psi + (\tau_n - \tau_m)]; \quad (1.23)$$

$$\sigma_{23} = \frac{1}{\sqrt{3}}[(p_n - p_m)(1 - tg^2\psi) - 2(\tau_n - \tau_m)tg\psi]. \quad (1.24)$$

Обратимся к системе уравнений (1.18)–(1.20) и (1.12), (1.13). Ранг матрицы этой системы равен четырем. Ее совместность возможна лишь при условии, что ранг расширенной матрицы также равен четырем. Это требование приводит к еще одному ограничению на нагрузку:

$$(p_n + p_m - 2p_l)(3\sin^2 \psi - 1) + 3(\tau_n + \tau_m - 2\tau_l)\cos \psi \sin \psi - \sqrt{3}(\vartheta_n - \vartheta_m)\cos \psi = 0. \quad (1.25)$$

При выполнении условия (1.25) рассматриваемая система имеет решение

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{18}(p_n + p_m)(\operatorname{ctg}^2 \psi - 8) + \frac{1}{2}(\tau_n + \tau_m)\operatorname{ctg} \psi - \frac{1}{6\sqrt{3}}(\vartheta_n - \vartheta_m)\frac{\cos \psi}{\sin^2 \psi} + \frac{1}{9}p_l\frac{1}{\sin^2 \psi}; \quad (1.26)$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{36}(p_n + p_m)\left(\frac{1 + 9\cos 2\psi}{\cos^2 \psi}\right) - \frac{1}{2}(\tau_n + \tau_m)\operatorname{tg} \psi + \frac{5}{6\sqrt{3}}(\vartheta_n - \vartheta_m)\frac{1}{\cos \psi} + \frac{4}{9}p_l\frac{1}{\cos^2 \psi}; \quad (1.27)$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(p_n + p_m) - \frac{1}{2}(\tau_n + \tau_m)\operatorname{tg} \psi - \frac{1}{2\sqrt{3}}(\vartheta_n - \vartheta_m)\frac{1}{\cos \psi}; \quad (1.28)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{1}{9}(p_n + p_m - 2p_l)\frac{1}{\sin \psi \cos \psi} + \frac{1}{3\sqrt{3}}(\vartheta_n - \vartheta_m)\frac{1}{\sin \psi}. \quad (1.29)$$

Если условия (1.21), (1.22), (1.25) не выполняются, рассматриваемая задача становится некорректной в том смысле, что она не может быть решена в рамках рассматриваемой теории напряжений.

Из приведенного исследования видно, что в случае, когда на гранях пирамиды задаются нагрузки, напряженное состояние в вершине пирамиды полностью определено. Известны все шесть компонент тензора напряжений. Это означает, что при построении решения задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) в вершине пирамиды необходимо согласовать его с этими шестью условиями. В обычной точке границы тела задаются три ограничения, следовательно, задача МДТТ для пирамиды является неклассической.

### 1.3. Частные случаи

#### 1.3.1. Отсутствие нагрузки на боковых гранях тетраэдра

Ограничения (1.21), (1.22), (1.25) выполняются. В соответствии с формулами (1.23), (1.24), (1.26)–(1.29) все компоненты напряжений в вершине пирамиды обращаются в нуль.

#### 1.3.2. Грани тетраэдра нагружены нормальными поверхностными нагрузками

В рассматриваемом случае  $p_n \neq 0, p_m \neq 0, p_l \neq 0, \vartheta_n = 0, \vartheta_m = 0, \vartheta_l = 0$ . Ограничение (1.21) выполняется, а ограничения (1.22), (1.25) приводятся к виду

$$(p_n - p_m)(1 - 3\sin^2 \psi) = 0; \quad (1.30)$$

$$(p_n + p_m - 2p_l)(1 - 3\sin^2 \psi) = 0. \quad (1.31)$$

Возможны варианты:

$$1) (1 - 3 \sin^2 \psi) = 0$$

В этом случае углы CAD, DAB, BAC при вершине пирамиды равны  $\pi/2$  (например, вершина пирамиды является вершиной прямоугольного параллелепипеда). Напряжения в вершине вычисляются по формулам

$$\sigma_{13} = \frac{1}{\sqrt{6}}(p_n - p_m) \quad \sigma_{23} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(p_n - p_m) \quad \sigma_{11} = \frac{1}{3}(p_n + p_m + p_l),$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{6}(p_n + p_m + 4p_l), \quad \sigma_{33} = \frac{1}{2}(p_n + p_m), \quad \sigma_{12} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(p_n + p_m - 2p_l). \quad (1.32)$$

$$2) (1 - 3 \sin^2 \psi) \neq 0$$

Из равенств (1.30), (1.31) следует, что в данном случае нагрузка должна удовлетворять условию

$$p_n = p_m = p_l = p. \quad (1.33)$$

Напряженное состояние в вершине пирамиды описывается равенствами

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (1.34)$$

Это решение согласуется с хорошо известным решением о напряженном состоянии тела, нагруженного по всей поверхности равномерным давлением.

### 1.3.3. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями $\vartheta_n, \vartheta_m, \vartheta_l$

Ограничения (1.21), (1.22), (1.25) принимают вид

$$\vartheta_n + \vartheta_m + \vartheta_l = 0, \quad \vartheta_n + \vartheta_m = 0, \quad \vartheta_n - \vartheta_m = 0. \quad (1.35)$$

Равенства (1.35) совместны лишь при условии, когда все компоненты нагрузки обращаются в нуль. Следовательно, в случае отличных от нуля параметров нагрузки  $\vartheta_n, \vartheta_m, \vartheta_l$  в рамках механики деформируемого твердого тела данная задача корректно не может быть поставлена.

### 1.3.4. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями $\tau_n, \tau_m, \tau_l$

Ограничения на компоненты нагрузки приводятся к двум равенствам

$$\tau_n - \tau_m = 0, \quad \tau_n + \tau_m - 2\tau_l = 0, \quad (1.36)$$

из которых следует, что нагрузка должна удовлетворять условиям

$$\tau_n = \tau_m = \tau_l = \tau. \quad (1.37)$$

При выполнении ограничений (1.37) напряжения в вершине пирамиды имеют значения

$$\sigma_{11} = \tau \operatorname{ctg} \psi, \quad \sigma_{22} = -\tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{33} = -\tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (1.38)$$

## 2. Компоненты напряжений и ограничения на нагрузку в вершине правильной четырехугольной пирамиды

### 2.1. Постановка задачи

Рассматривается деформируемое твердое тело, содержащее конструктивный элемент в виде части объема правильной четырехугольной пирамиды. Вблизи вершины G строится ее виртуальное основание – квадрат ABCD (рис. 2). Угол между высотой пирамиды и высотой боковой грани обозначается через  $\psi$ . С пирамидой связываем декартову ортонормированную систему координат  $O, x_1, x_2, x_3$ . Начало координат (т. O) совпадает с центром основания пирамиды, а оси  $x_1, x_2$  направляются по его диагоналям. Базисные векторы введенной системы координат обозначаются  $\bar{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

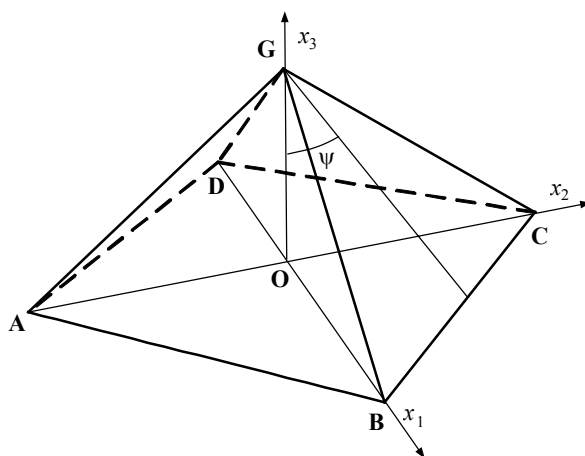


Рис. 2. Часть правильной четырехугольной пирамиды вблизи вершины  
Fig. 2. Part of a regular quadrangular pyramid near the vertex

На боковых гранях пирамиды вводятся левоориентированные ортонормированные тройки векторов:

на грани BCG:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3, \\ \bar{\xi}_n &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \quad \bar{\zeta}_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2; \end{aligned} \quad (2.1)$$

на грани CDG:

$$\begin{aligned} \bar{m} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3, \\ \bar{\xi}_m &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \quad \bar{\zeta}_m = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2; \end{aligned} \quad (2.2)$$



на грани DAG:

$$\begin{aligned}\bar{l} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3, \\ \bar{\xi}_l &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \quad \bar{\zeta}_l = -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2;\end{aligned}\quad (2.3)$$

на грани ABG:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \bar{e}_2 + \sin \psi \bar{e}_3, \\ \bar{\xi}_k &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \bar{e}_2 - \cos \psi \bar{e}_3, \quad \bar{\zeta}_k = -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Первые орты в приведенных тройках ортогональны соответствующим граням, пара других лежит в их плоскости. Причем второй орт направлен по высоте, исходящей из вершины G треугольника, образующего грань. Вблизи вершины G поверхностную нагрузку на гранях пирамиды представим разложениями по базисам (2.1) – (2.4)

$$\begin{aligned}\bar{P}_n &= p_n \bar{n} + \tau_n \bar{\xi}_n + \vartheta_n \bar{\zeta}_n, \quad \bar{P}_m = p_m \bar{m} + \tau_m \bar{\xi}_m + \vartheta_m \bar{\zeta}_m, \\ \bar{P}_l &= p_l \bar{l} + \tau_l \bar{\xi}_l + \vartheta_l \bar{\zeta}_l, \quad \bar{P}_k = p_k \bar{k} + \tau_k \bar{\xi}_k + \vartheta_k \bar{\zeta}_k.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Здесь  $\bar{P}_n, \bar{P}_m, \bar{P}_l, \bar{P}_k$  – задаваемые векторы напряжений соответственно на гранях BCG, CDG, DAG, ABG. Вершина пирамиды (особая точка) отождествляется со сжимаемым к ней элементарным объемом тела. Грани пирамиды являются касательными плоскостями в этой точке для рассматриваемого деформируемого тела. Поэтому в ней оказываются заданными следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= p_n, \quad \tau_{\xi_n} = \tau_n, \quad \tau_{\zeta_n} = \vartheta_n, \quad \sigma_m = p_m, \quad \tau_{\xi_m} = \tau_m, \quad \tau_{\zeta_m} = \vartheta_m, \\ \sigma_l &= p_l, \quad \tau_{\xi_l} = \tau_l, \quad \tau_{\zeta_l} = \vartheta_l, \quad \sigma_k = p_k, \quad \tau_{\xi_k} = \tau_k, \quad \tau_{\zeta_k} = \vartheta_k.\end{aligned}\quad (2.6)$$

В этих равенствах  $\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l, \sigma_k$  – нормальные напряжения на гранях пирамиды,  $\tau_{\xi_n}, \tau_{\zeta_n}, \tau_{\xi_m}, \tau_{\zeta_m}, \tau_{\xi_l}, \tau_{\zeta_l}, \tau_{\xi_k}, \tau_{\zeta_k}$  – касательные напряжения в направлении соответствующих ортов, определенных равенствами (2.1)– (2.3). Компоненты тензора напряжений в вершине пирамиды в координатах  $x_1, x_2, x_3$  упорядочим списком  $\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$ . С использованием формулы Коши для вычисления векторов напряжений на гранях пирамиды условия (2.6) представляются двенадцатью уравнениями относительно шести компонент напряжений:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \sigma_{11} \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \sigma_{22} \cos^2 \psi + \sigma_{33} \sin^2 \psi + \sigma_{12} \cos^2 \psi + \\ &\quad + \sqrt{2} \sigma_{13} \sin \psi \cos \psi + \sqrt{2} \sigma_{23} \sin \psi \cos \psi = p_n, \\ &\frac{1}{2} \sigma_{11} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - \sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \sigma_{12} \cos 2\psi - \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{13} \cos 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{23} \cos 2\psi = \tau_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\sigma_{11}\cos\psi - \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13}\sin\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23}\sin\psi = \vartheta_n, \\
& \frac{1}{2}\sigma_{11}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos^2\psi + \sigma_{33}\cos^2\psi - \sigma_{12}\sin\psi\cos\psi - \\
& \quad - \sqrt{2}\sigma_{13}\sin\psi\cos\psi - \sqrt{2}\sigma_{23}\sin\psi\cos\psi = p_m, \\
& \frac{1}{2}\sigma_{11}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\sin\psi\cos\psi - \sigma_{33}\sin\psi\cos\psi - \frac{1}{2}\sigma_{12}\sin\psi\cos\psi + \\
& \quad + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13}\cos 2\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23}\cos 2\psi = \tau_m, \\
& -\frac{1}{4}\sigma_{11}\cos\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13}\sin\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23}\sin\psi = \vartheta_m, \\
& \frac{1}{2}\sigma_{11}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos^2\psi + \sigma_{33}\sin^2\psi + \sigma_{12}\cos\psi - \\
& \quad - \sqrt{2}\sigma_{13}\cos\psi\sin\psi - \sqrt{2}\sigma_{23}\cos\psi\sin\psi = p_l, \\
& \frac{1}{2}\sigma_{11}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\sin\psi\cos\psi - \sigma_{33}\sin\psi\cos\psi + \sigma_{12}\sin\psi\cos\psi + \\
& \quad + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13}\cos 2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23}\cos 2\psi = \tau_l, \\
& \frac{1}{2}\sigma_{11}\cos\psi - \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13}\sin\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23}\sin\psi = \vartheta_l, \\
& \frac{1}{2}\sigma_{11}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos^2\psi + \sigma_{33}\sin^2\psi - \sigma_{12}\cos\psi + \\
& \quad + \sqrt{2}\sigma_{13}\cos\psi\sin\psi - \sqrt{2}\sigma_{23}\cos\psi\sin\psi = p_k, \\
& \frac{1}{2}\sigma_{11}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\sin\psi\cos\psi - \sigma_{33}\sin\psi\cos\psi - \sigma_{12}\sin\psi\cos\psi - \\
& \quad - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13}\cos 2\psi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23}\cos 2\psi = \tau_k, \\
& -\frac{1}{2}\sigma_{11}\cos\psi + \frac{1}{2}\sigma_{22}\cos\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13}\sin\psi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23}\sin\psi = \vartheta_k.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Задача состоит в исследовании (в зависимости от геометрических параметров и заданной нагрузки) условий существования решения системы уравнений (2.7) и его построения. Условия существования решения образуют ограничения на параметры нагрузки, обеспечивающие корректность постановки рассматриваемой задачи механики. Решение системы уравнений (2.7) формирует задаваемые ограничения на компоненты напряжений в вершине пирамиды. В случае, когда количество таких ограничений окажется больше трех, задача механики деформируемого тела для рассматриваемого тела становится неклассической.

## 2.2. Исследование системы уравнений (2.7)

Посредством эквивалентных преобразований уравнения (2.7) приводятся к двум автономным системам. Первая из них включает шесть уравнений относительно четырех компонент напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \cos^2 \psi + \sigma_{22} \cos^2 \psi + 2\sigma_{33} \sin^2 \psi + 2\sigma_{12} \cos^2 \psi &= p_n + p_l, \\ \sigma_{11} \cos^2 \psi + \sigma_{22} \cos^2 \psi + 2\sigma_{33} \sin^2 \psi - 2\sigma_{12} \cos^2 \psi &= p_m + p_k, \\ \sigma_{11} \sin \psi \cos \psi + \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - 2\sigma_{33} \sin \psi \cos \psi + 2\sigma_{12} \sin \psi \cos \psi &= \tau_n + \tau_l, \\ \sigma_{11} \sin \psi \cos \psi + \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi - 2\sigma_{33} \sin \psi \cos \psi - 2\sigma_{12} \sin \psi \cos \psi &= \tau_m + \tau_k, \\ \sigma_{11} \cos \psi - \sigma_{22} \cos \psi &= \vartheta_n + \vartheta_l, \\ -\sigma_{11} \cos \psi + \sigma_{22} \cos \psi &= \vartheta_m + \vartheta_k.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Вторая система состоит из шести уравнений относительно двух компонент напряжений  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\sigma_{13} \sin 2\psi + \sqrt{2}\sigma_{23} \sin 2\psi &= p_n - p_l, \quad \sqrt{2}\sigma_{13} \cos 2\psi - \sqrt{2}\sigma_{23} \cos 2\psi = \tau_m - \tau_k, \\ -\sqrt{2}\sigma_{13} \sin 2\psi + \sqrt{2}\sigma_{23} \sin 2\psi &= p_m - p_k, \quad \sqrt{2}\sigma_{13} \sin \psi - \sqrt{2}\sigma_{23} \sin \psi = \vartheta_n - \vartheta_l, \\ -\sqrt{2}\sigma_{13} \cos 2\psi - \sqrt{2}\sigma_{23} \cos 2\psi &= \tau_n - \tau_l, \quad \sqrt{2}\sigma_{13} \sin \psi + \sqrt{2}\sigma_{23} \sin \psi = \vartheta_m - \vartheta_k.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Изучим систему уравнений (2.8). При изменении угла  $\psi$  в интервале  $0 < \psi < \pi/2$  ранг этой системы равен четырем. Ее совместность возможна лишь при условии, что ранг расширенной матрицы также равен четырем. Это требование приводит к двум ограничениям на нагрузку

$$\vartheta_n + \vartheta_m + \vartheta_l + \vartheta_k = 0, \quad (2.10)$$

$$(p_m + p_k - p_n - p_l) \sin \psi + (\tau_n + \tau_l - \tau_m - \tau_k) \cos \psi = 0. \quad (2.11)$$

При выполнении ограничений (2.10), (2.11) уравнения (2.8) имеют решение

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{1}{4 \cos^2 \psi} [(p_n + p_l) \cos 2\psi + (p_m + p_k) + (\tau_n + \tau_l) \sin 2\psi + 2(\vartheta_n + \vartheta_l) \cos \psi], \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{4 \cos^2 \psi} [(p_n + p_l) \cos 2\psi + (p_m + p_k) + (\tau_n + \tau_l) \sin 2\psi - 2(\vartheta_n + \vartheta_l) \cos \psi], \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{2} [p_n + p_l - (\tau_n + \tau_l) \operatorname{ctg} \psi], \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{4 \cos^2 \psi} [p_n + p_l - p_m - p_k]\end{aligned}\quad (2.12)$$

Обратимся к системе уравнений (2.9). Ранг матрицы этой системы равен двум. Ее совместность возможна лишь при условии, что ранг расширенной матрицы также равен двум. Это требование накладывает еще четыре ограничения на компоненты нагрузки:

$$\begin{aligned}(p_n - p_l) \cos 2\psi + (\tau_n - \tau_l) \sin 2\psi &= 0, \quad (p_m - p_k) \cos 2\psi + (\tau_m - \tau_k) \sin 2\psi = 0, \\ (p_m - p_k) + 2(\vartheta_n - \vartheta_l) \cos \psi &= 0, \quad -(p_n - p_l) + 2(\vartheta_m - \vartheta_k) \cos \psi = 0.\end{aligned}\quad (2.13)$$

При выполнении условия (2.13) уравнения (2.9) имеют решение

$$\sigma_{13} = \frac{\sqrt{2}}{4 \sin 2\psi} [p_n - p_l - p_m + p_k], \quad \sigma_{23} = \frac{\sqrt{2}}{4 \sin 2\psi} [p_n - p_l + p_m - p_k]. \quad (2.14)$$

Из приведенного исследования видно, что в случае, когда на гранях пирамиды задаются нагрузки, согласованные с ограничениями (2.10), (2.11), (2.13), напряженное состояние в вершине пирамиды полностью определено. Известны все шесть компонент тензора напряжений. Это означает, что при построении решения задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) в вершине пирамиды необходимо согласовать его с этими шестью условиями. В обычной точке границы тела задаются три ограничения. Следовательно, задача МДТТ для пирамиды является неклассической. В случае, когда нагрузка, приложенная к граням пирамиды в ее вершине, не согласуется с условиями (2.10), (2.11), (2.13), компоненты напряжений в особой точке оказываются несовместными с такой нагрузкой. Поэтому задача МДТТ оказывается некорректной.

## 2.3. Частные случаи

### 2.3.1. Отсутствие нагрузки на боковых гранях пирамиды

В данном случае все компоненты векторов напряжений (2.5) в вершине пирамиды обращаются в нуль. Ограничения (2.10), (2.11), (2.13) выполняются. В соответствии с формулами (2.12), (2.14) все шесть компонент тензора напряжений в вершине равны нулю. Постановка задачи механики деформируемого твердого тела с рассматриваемой особенностью должна быть неклассической.

### 2.3.2. Грани пирамиды нагружены нормальными поверхностными нагрузками

В рассматриваемом случае отличны от нуля компоненты  $p_n \neq 0$ ,  $p_m \neq 0$ ,  $p_l \neq 0$ ,  $p_k \neq 0$  векторов нагрузки (2.5). Ограничения (2.10), (2.11), (2.13) приводятся к виду

$$p_n = p_m = p_l = p_k = p. \quad (2.15)$$

Напряжения в вершине находим по формулам (2.12), (2.14):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} &= p, \\ \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

**Замечание 1.** Решение (2.16) согласуется с известным аналитическим решением о напряженном состоянии упругого тела, нагруженного по всем поверхностям давлением  $p$ .

**Замечание 2.** Решение (2.16) при нагрузке (2.15) в вершине пирамиды может быть получено методом сечений.

### 2.3.3. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями $\vartheta_n, \vartheta_m, \vartheta_l, \vartheta_k$

В этом случае ограничения (2.10) принимают вид

$$\vartheta_n = \vartheta_l = \vartheta, \quad \vartheta_m = \vartheta_k = -\vartheta. \quad (2.17)$$

При выполнении условий (2.17) напряжения в вершине находятся по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{\vartheta}{\cos \psi}, \quad \sigma_{22} = -\frac{\vartheta}{\cos \psi}, \quad \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (2.18)$$

Рассматриваемый случай отвечает кручению пирамиды усилиями, приложенными в вершине. Напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  неограниченно возрастают, если угол  $\psi$  стремится к значению  $\pi/2$ . Это связано с тем, что площади сечений, на которых действуют эти напряжения, стремятся к нулю. Решение (2.18) получается и с использованием метода сечений.

#### 2.3.4. Грани пирамиды нагружены касательными усилиями $\tau_n, \tau_m, \tau_l, \tau_k$

Ограничения на компоненты нагрузки (2.10), (2.11), (2.13) приводятся к двум равенствам

$$\tau_n = \tau_m = \tau_l = \tau_k = 0. \quad (2.19)$$

Если равенства (2.19) выполняются, напряжения в вершине имеют значения

$$\sigma_{11} = \tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{22} = \tau \operatorname{tg} \psi, \quad \sigma_{33} = -\tau \operatorname{ctg} \psi, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (2.20)$$

При стремлении  $\psi$  к нулю напряжение  $\sigma_{33}$  неограниченно возрастает. Также ведут себя напряжения  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  при стремлении  $\psi$  к  $\pi/2$ . Это объясняется тем, что площади, на которых действуют эти напряжения, при указанных условиях стремятся к нулю, в то время как площади, на которых приложена нагрузка, остаются конечными. Решение (2.20) согласуется с решением, получаемым методом сечений.

### Заключение

Общепринятое исследователями представление о точке сплошной среды в виде стягиваемого к ней элементарного объема распространяется на особую точку – вершину многогранника. Компоненты напряжений в вершине многогранника отождествляются с напряжениями в содержащем ее элементарном объеме тела. В результате анализа напряженного состояния такого элементарного объема:

- получены формулы для вычисления всех компонентов тензора напряжений в вершине многогранника;
- установлено, что задачи механики для тел, содержащих особые точки в виде многогранников, являются неклассическими;
- сформулированы условия на компоненты векторов нагрузки, обеспечивающие корректность постановок рассматриваемых задач.

Приведенные результаты найдут применение в изучении напряженного состояния деформируемых тел с особыми точками в виде вершин многогранников, в частности, при исследовании взаимодействия инденторов Берковича и Виккерса с образцами.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension // J. App. Mech. 1952. V. 19. P. 526–528.
2. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // Прикладная математика и механика. 1967. № 1. С. 178–186.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1967. 402 с.
4. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.

5. Bogy D.B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // Trans. ASME. Ser. E. 1971. V. 38. No. 2. P. 377–386.
6. Cook T.S., Erdogan F. Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface // Int. J. Eng. Sci. 1972. V. 10. No. 8. P. 677–696.
7. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // ДАН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С. 33–36.
8. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
9. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
10. Шемякин Е.И. О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) // Докл. АН. 1996. Т. 347. № 3. С. 342–345.
11. Hideo Koguchi, Takashi Muramoto. The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints // Int. J. Solids and Structures. 2000. V. 37(35). P. 4737–4762. [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00159-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00159-6).
12. Barut A., Guven I., Madenci E. Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // Int. J. of Solid and Structures. 2001. V. 38. No. 50–51. P. 9077–9109.
13. Shannon S., Peron V. and Yosibash Z. Singular asymptotic solution along an elliptical edge for the Laplace equation in 3-D // Engineering Fracture Mechanics. 2015. No. 134. P. 174–185.
14. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis // App. Mech. Rev. 2004. V. 57. No. 4. P. 251–297.
15. Shannon S., Peron V. and Yosibash Z. The Laplace equation in 3-D domains with cracks: Dual singularities with log terms and extraction of corresponding edge flux intensity functions // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2016. V. 34. P. 4951–4963.
16. Xu L.R., Kuai H., Sengupta S. Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis // Experimental Mechanics. 2004. V. 44. No. 6. P. 616–621.
17. Christian Mittelstedt, Wilfried Becker. Efficient computation of order and mode of three-dimensional stress singularities in linear elasticity by the boundary finite element method // Int. J. Solids and Structures. 2006. V. 43(10). P. 2868–2903. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.05.059.
18. Yongwoo Lee, Insu Jeon, Seyoung Im. The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite // Int. J. Solids and Structures. 2006. V. 43(9). P. 2710–2722. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.050.
19. Paggi M., Carpinteri A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // Mech. Rev. 2008. V. 61. 22 p. DOI: 10.1115/1.2885134.
20. Zhixue Wu. A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity // Engineering Fracture Mechanics. 2005. V. 73(7). P. 953–962. DOI: 10.1016/j.engfractmech.2005.10.010.
21. Hideo Koguchi, Joviano Antonio da Costa. Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface // Int. J. Solids and Structures. 2010. V. 47. P. 3131–3140. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015.
22. Коваленко М.Д., Галаджиев С.В., Гоголева О.С., Трубников Д.В. Особенности напряженного состояния в конечных областях вблизи угловых точек границы // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17. № 1. С. 53–60.
23. Андреев А.В. Суперпозиция степенно-логарифмических и степенных сингулярных решений в двумерных задачах теории упругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2013. № 1. С. 5–30.
24. Рязанцева Е.А. Метод граничных состояний в задачах теории упругости с сингулярностями физического и геометрического характера: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Липецк, 2015. 215 с.

25. Федоров А.Ю. Исследование и оптимизация напряженного состояния в окрестности особых точек упругих тел : дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Пермь, 2016. 157 с.
26. Xu W., Tong Z., Leung, A.Y.T., Xu X., Zhou Z. Evaluation of the stress singularity of an interface V-notch in a bimaterial plate under bending // *Engineering Fracture Mechanics*. 2016. V. 168. P. 11–25. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.09.009.
27. He Z., Kotousov A. On Evaluation of Stress Intensity Factor from In-Plane and Transverse Surface Displacements // *Experimental Mechanics*. 2016. V. 56(8). P. 1385–1393. DOI: 10.1007/s11340-016-0176-8.
28. Dimitrov A., Andra H., Schnack E. Efficient computation of order and mode of corner singularities in 3D-elasticity // *Int. J. Num. Meth. Engng*. 2001. V. 52(8). P. 805–827.
29. Apel T., Mehrmann V., Watkins D. Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities in 3D anisotropic elastic structures // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*. 2002. No. 191. P. 4459–4473.
30. Ковалев Б.Д. Формирование Эйлеровой гидродинамики // *Исследования по истории механики: сб. статей*. М.: Наука, 1983. С. 146–167.
31. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Нестандартные задачи для однородных элементов конструкций с особенностями в виде клиньев в условиях плоской задачи // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2014. № 1(27). С. 95–109.
32. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины составного клина с жестко защемленными образующими // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. № 3. С. 131–147. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.09.
33. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2017) Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface // *Latin American J. Solids and Structures*. V. 14. No. 11. P. 2067–2088. DOI: 10.1590/1679-78253826.
34. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs // *Mechanics of Composite Materials*. 2015. V. 51. No. 4. P. 489–504.
35. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure // *Mechanics of Composite Materials*. 2017. V. 53. No. 1. P. 107–116. DOI: 10.1007 / s11029-017-9644-1.
36. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Ограничения на параметры напряженного состояния в вершине кругового конуса // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 52. С. 89–101. DOI: 10.17223/19988621/52/9.

Статья поступила 22.04.2018 г.

Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2018) STRESS COMPONENTS AND LOADING RESTRICTIONS AT THE VERTICES OF REGULAR TRIANGULAR AND QUADRANGULAR PYRAMIDS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 56 pp. 102–119

DOI 10.17223/19988621/56/9

Keywords: polyhedron, singular points, singularity, elementary volume, non-classical problems.

A special point of structural element (the vertex of a polyhedron) is considered as an ordinary point of deformable body representing an infinitely small particle obtained by contracting elementary volume to a point. Using this concept, the stress state at the vertices of regular triangular and quadrangular pyramids is studied in the case of a surface loading of the lateral faces of pyramids. It is shown that the stress state at the vertices of polyhedra is fully known for any loading. This fact leads to a non-classical formulation of the problem of solid mechanics for such structural elements. The conditions for load vector components are proposed, which provide the correct problem statements within the solid mechanics. The particular cases of the loading of

considered structural elements are introduced. The obtained solutions are found to be in a good agreement with known analytical results.

The reported results will find application in the formulation of solid mechanics problems containing vertices (recesses) in the shape of polyhedra, in particular, when studying the interaction of the Berkovich and Vickers indenters with samples.

*PESTRENIN Valery Mihaylovich* (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: PestreninVM@mail.ru

*PESTRENINA Irena Vladimirovna* (Candidate of Engineering Sciences, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: IPestrenina@gmail.com

*LANDIK Lidia Vladimirovna* (Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

## REFERENCES

1. Williams M.L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension. *J. App. Mech.* 19. pp. 526–528.
2. Aksentyan O.K. (1967) Osobennosti napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya plity v okrestnosti rebra [Features of the stress-strain state of plate in the vicinity of the rib]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1. pp. 178–186.
3. Ufyand Ya.S. (1967) *Integral'nye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti* [Integral transformations in the problems of the theory of elasticity]. Moscow: Izd. AN SSSR.
4. Kondrat'ev V.A. (1967) Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastiakh s konicheskimi ili uglovymi tochkami [Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points]. *Tr. Mosk. Mat. Obs.* 16. pp. 209–292.
5. Bogy D.B. (1971) Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. *J. Appl. Mech.* 38(2). pp. 377–386. DOI: 10.1115/1.3408786.
6. Cook T.S., Erdogan F. (1972) Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface. *Int. J. Eng. Sci.* 10(8). pp. 677–697. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90063-8.
7. Maz'ya V.G., Plamenevskiy B.A. (1976) O koeffitsientakh v asimptotike resheniy ellipticheskikh kraevykh zadach vblizi rebra [On the coefficients in the asymptotics of the solutions of elliptic boundary value problems near the edge]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 229(1). pp. 33–36.
8. Parton V.Z., Perlin P.I. (1981) *Metody matematicheskoy teorii uprugosti* [Methods of the mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka.
9. Chobanyan K.S. (1987) *Napryazheniya v sostavnykh uprugikh telakh* [Stresses in the composite elastic bodies]. Yerevan: Izd-vo AN ArmSSR.
10. Shemyakin E.I. (1996) O kraevykh zadachakh teorii uprugosti dlya oblastey s uglovymi tochkami (ploskaya deformatsiya) [On the boundary-value problems of the theory of elasticity for the domains with angular points (plane deformation)]. *Dokl. Akad. Nauk*. 347(3). pp. 342–345.
11. Koguchi H., Muramoto T. (2000) The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints. *Int. J. of Solid and Structures*. 37(35). pp. 4737–4762. DOI: 10.1016/S0020-7683(99)00159-6.
12. Barut A., Guven I., Madenci E. (2001) Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading. *Int. J. of Solid and Structures*. 38(50-51). pp. 9077–9109. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00206-2.
13. Shannon S., Peron V., Yosibash Z. (2015) Singular asymptotic solution along an elliptical edge for the Laplace equation in 3-D. *Engineering Fracture Mechanics*. 134. pp. 174–185. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.12.018.
14. Sinclair G.B. (2004) Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation, and analysis. *App. Mech. Rev.* 57(4). pp. 251–298. DOI: 10.1115/1.1762503.
15. Shannon S., Peron V., Yosibash Z. (2016) The Laplace equation in 3D domains with cracks: dual singularities with log terms and extraction of corresponding edge flux intensity functions. *Math. Methods in the Applied Sciences*. 34. pp. 4951–4963. DOI: 10.1002/mma.3562.



16. Xu L.R., Kuai H., Sengupta S. (2004) Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis. *Experimental mechanics*. 44(6). pp. 616–621. DOI: 10.1007/BF02428251.
17. Mittelstedt C., Becker W. (2006) Efficient computation of order and mode of three-dimensional stress singularities in linear elasticity by the boundary finite element method. *Int. J. of Solid and Structures*. 43(10). pp. 2868–2903. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.05.059.
18. Lee Y., Jeon I., Im S. (2006) The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite. *Int. J. of Solid and Structures*. 43(9). pp. 2710–2722. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.050.
19. Paggi M., Carpinteri A. (2008) On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Appl. Mech. Rev.* 61(2). 020801. DOI: 10.1115/1.2885134.
20. Wu Z. (2005) A method for eliminating the effect of 3-D bi-material interface corner geometries on stress singularity. *Engineering Fracture Mechanics*. 73(7). pp. 953–962. DOI: 10.1016/j.engfractmech.2005.10.010.
21. Koguchi H., Joviano Antonio da Costa (2010) Analysis of the stress singularity field at a vertex in 3D-bonded structures having a slanted side surface. *Int. J. of Solid and Structures*. 47(22-23). pp. 3131–3140. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.015.
22. Kovalenko M.D., Galadzhiev S.V., Gogoleva O.S., Trubnikov D.V. (2011) Osobennosti napryazhennogo sostoyaniya v konechnykh oblastiakh vblizi uglovyykh tochek granitsy [Features of the stress state for finite regions near to angular points of a boundary]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*. 17(1). pp. 53–60.
23. Andreev A.V. (2013) Superpozitsiya stepenno-logarifmicheskikh i stepennykh singulyarnykh resheniy v dvumernykh zadachakh teorii uprugosti [Superposition of power-logarithmic and power singular solutions in two-dimensional elasticity problems]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 1. pp. 5–30.
24. Ryazantseva E.A. (2015) *Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti s singulyarnostyami fizicheskogo i geometricheskogo kharaktera* [The method of boundary states in problems of the theory of elasticity with singularities of physical and geometric nature]. Dissertation. Lipetsk.
25. Fedorov A.Yu. (2016) *Issledovanie i optimizatsiya napryazhennogo sostoyaniya v okrestnosti osobykh tochek uprugikh tel* [Investigation and optimization of the stress state in the vicinity of singular points of the elastic bodies]. Dissertation. Perm.
26. Xu W., Tong Z., Leung, A.Y.T., Xu X., Zhou Z. (2016) Evaluation of the stress singularity of an interface V-notch in a bimaterial plate under bending. *Engineering Fracture Mechanics*. 168A. pp. 11–25. DOI: 10.1016/j.engfractmech.2016.09.009.
27. He Z., Kotousov A. (2016) On evaluation of stress intensity factor from in-plane and transverse surface displacements. *Experimental Mechanics*. 56 (8). pp. 1385–1393. DOI: 10.1007/s11340-016-0176-8.
28. Dimitrov A., Andra H., Schnack E. (2001) Efficient computation of order and mode of corner singularities in 3D-elasticity. *Int. J. Num. Meth. Engng*. 52(8). pp. 805–827. DOI: 10.1002/nme.230.
29. Apel T., Mehrmann V., Watkins D. (2002) Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities in 3D anisotropic elastic structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 191(39-40). pp. 4459–4473. DOI: 10.1016/S0045-7825(02)00390-0.
30. Kovalev B.D. (1983) *Formirovanie Eylerovoy gidrodinamiki* [Formation of Euler hydrodynamics]. Moscow: Nauka. pp. 146–167.
31. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2014) Nestandartnye zadachi dlya odnorodnykh elementov konstruksiy s osobennostyami v vide klin'ev v usloviyakh ploskoy zadachi [Non-standard problems of homogeneous structural elements with wedge shape features in the plane case]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 27(1). pp. 95–109.

32. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2016) Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie v okrestnosti vershiny sostavnogo klina s zhestko zashchemlennymi obrazuyushchimi [Stress-strain state near the wedge top with rigid fastening of sides]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 3. pp. 131–147. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.09.
33. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2017) Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 14(11). pp. 2067–2088. DOI: 10.1590/1679-78253826.
34. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2015) Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs. *Mechanics of Composite Materials*. 51(4). pp. 489–504. DOI: 10.1007/s11029-015-9520-9.
35. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. (2017) Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure. *Mechanics of Composite Materials*. 53(1). pp. 107–116. DOI: 10.1007 / s11029-017-9644-1.
36. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2018) Ogranicheniya na parametry napryazhenного sostoyaniya v vershine krugovogo konusa [Restrictions on stress components in the top of round cone]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 89–101. DOI: 10.17223/19988621/52/9.