

УДК 536.46+536.24

DOI 10.17223/19988621/58/10

В.А. Порязов, Д.А. Крайнов

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭРОЗИОННОГО ГОРЕНИЯ
МЕТАЛЛИЗИРОВАННЫХ ТВЕРДЫХ ТОПЛИВ¹**

Представлены математическая модель и методика расчета нестационарной скорости горения смесового металлизированного твердого топлива в условиях обдува. В постановке рассматривается горение плоской поверхности металлизированного топлива в неограниченном обдувающем потоке. Модель эрозийного горения металлизированных твердых топлив строится в пограничном приближении, в рамках которого факт обдува учитывается через турбулентный тепломассоперенос. Проведен расчетно-теоретический анализ влияния добавок порошка металла на скорость горения металлизированных твердых топлив в условиях обдува. Проведено исследование зависимости скорости горения от скорости обдувающего потока.

Ключевые слова: *металлизированное твердое топливо, математическая модель, скорость горения, обдув, эрозийный эффект, частицы алюминия.*

Известно, что при тангенциальном обдуве поверхности горения твердого топлива при некотором соотношении параметров потока и характеристик топлива изменяется линейная скорость горения. Изменение происходит как в большую, так и в меньшую сторону в зависимости от скорости обдувающего потока.

В 1942 г. при изучении горения пороха Н в условиях обдува О.И. Лейпунским был обнаружен эффект увеличения скорости горения. В работах Я.Б. Зельдовича предложена физическая модель, объясняющая увеличение скорости горения увеличением теплового потока, подводимого к поверхности горения, за счет роста турбулентного слагаемого коэффициента теплопроводности [1]. Большое развитие теория эрозийного горения получила в работах В.Н. Вилюнова [2, 3]. Большое внимание уделено изучению эффекта отрицательной эрозии [4]. Общую теорию эрозийного горения твердых ракетных топлив разработали академик А.М. Липанов и профессор В.К. Булгаков [5]. В монографии изложены физико-математические модели и результаты численного моделирования эрозийного горения твердых ракетных топлив. Дано объяснение положительного и отрицательного эрозийного эффекта. Проведен анализ влияния взаимодействия химической реакции с турбулентностью. Проведено исследование горения в условиях обдува нитроглицеринового пороха и смесового твердого топлива на основе перхлората аммония без добавок порошков металлов. В работах [6, 7] представлены результаты исследований внутрикамерных процессов для твердотопливных ракетных двигателей. Учет эффекта эрозии для изучения внутрикамерных процессов для твердотопливных ракетных двигателей носит важнейшую роль. Все современные смеси твердых топлива в своем составе содержат добавки порошков металлов, которые добавляются для повышения теплоты сгорания топлива. Добавки порошков металлов в состав твердого топлива, влияют на характеристики зажигания и горения топлива [8].

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ МК-1763.2017.8.

Актуальным является вопрос о влиянии обдува на скорость горения металлизированного твердого топлива. Расчетно-теоретические исследования эрозионного эффекта при горении в условиях обдува металлизированного твердого топлива не проводились.

Постановка задачи

В представленной работе рассматривается горение плоской поверхности металлизированного топлива в неограниченном обдувающем потоке. Модель эрозионного горения строится в погранслоном приближении в предположении асимптотического режима течения, в рамках которого факт обдува учитывается через турбулентный тепломассоперенос, пульсации температуры и концентрации реагентов. На основе нестационарной модели горения металлизированного твердого топлива в сопряженной постановке [9] построена модель горения металлизированного твердого топлива в условиях обдува. На поверхности топлива учитывается газификация компонентов твердого топлива и записывается условие сохранения потоков массы и энергии компонентов. В твердой фазе, под поверхностью газификации записывается уравнение переноса тепла и разложения топлива. Над поверхностью топлива записываются уравнения течения двухфазной реагирующей среды, учитывающие межфазный обмен импульсом и энергией, конвективный и кондуктивный теплоперенос, зависимость коэффициентов переноса от температуры и интенсивности турбулентности. Для описания характеристик динамической турбулентности в пограничном слое использовалась модель турбулентности Ван Дриста, являющаяся обобщением результатов экспериментов и широко распространенной в инженерных расчетах, так как справедлива во всей внутренней части пограничного слоя [5].

Математическая модель горения металлизированного твердого топлива состоит из уравнений:

Для твердого топлива, при $-\infty < x < x_s$:

$$c_1 \rho_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + u \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + Q_1 k_1 \rho_1 (1 - \eta) \exp \left(-\frac{E_1}{RT_1} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = k_1 (1 - \eta) \exp \left(-\frac{E_1}{RT_1} \right). \quad (2)$$

Для газовой фазы, при $x_s < x < \infty$:

$$c_2 \rho_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} + u_x \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left((\lambda_2 + \lambda_t) \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) + Q_2 Y \rho_2 k_2 \exp \left(\frac{-E_2}{R_y T_2} \right) + 4\pi \alpha r_3^2 n (T_3 - T_2); \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial t} + u_x \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left((D_2 + D_t) \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - Y k_2 \exp \left(\frac{-E_2}{R_y T_2} \right); \quad (4)$$

$$c_3 \rho_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial t} + w_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} \right) = -4\pi \alpha r_3^2 n (T_3 - T_2) + G Q_{Al} \frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_2 u_x)}{\partial x} = -G; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_3 w_3)}{\partial x} = G; \quad (7)$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial x} = -\tau_{fr}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nw_3)}{\partial x} = 0; \quad (9)$$

$$P = \rho_2 R T_2 = \text{const}; \quad (10)$$

$$\rho_c = 1/(\alpha_{Al}/\rho_{Al} + \alpha_{\Pi}/\rho_{\Pi}),$$

$$\frac{du_y}{dx} = \frac{1}{\text{Pr}_m \frac{\lambda_m}{c_2} + \mu_t} (\tau_s + \rho_k V_k u_y + \frac{\partial p}{\partial y} x); \quad (11)$$

$$\lambda_t = \frac{c_2 \mu_t}{\text{Pr}_t} \frac{\varphi}{1 - \delta}; \quad (12)$$

$$\varphi = 1 - \exp\left(\frac{-B \cdot 0.09 k \rho_2^2}{\mu_t \cdot W}\right), \quad \delta = 2 \frac{\mu_t \varphi}{\rho_2^2 k} \frac{Q_2}{c_2} \frac{dW}{dT_2}, \quad W = k_2 Y \rho_2 \exp\left(\frac{-E_2}{R_g T_2}\right),$$

$$c_k = 0.3, \quad x_* = 26, \quad B = 5,$$

$$l = Kx \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{x_*} \sqrt{\tau_s \rho_k} \frac{1}{\mu_m}\right) \right], \quad v_t = l^2 \frac{du_y}{dx}, \quad \mu_t = \rho_2 v_t, \quad k = \frac{1}{c_k} \left(\frac{v_t}{l} \right)^2.$$

В системе уравнений (1) – (12): (1), (3), (5) – уравнения энергии для твердого топлива, газовой фазы и частиц алюминия; (2) – уравнение глубины превращения конденсированной фазы; (4) – уравнение выгорания окислителя в газовой фазе; (6) – уравнение сохранения массы газовой фазы; (7) – уравнение сохранения массы частиц; (8) – уравнение движения частиц; (9) – уравнение числа частиц; (10) – уравнение состояния идеального газа; (11) – уравнение движения тангенциальной составляющей обдувающего потока; (12) – выражение для турбулентного коэффициента теплопроводности, полученного из модели турбулентности Ван Дрифта.

Координата x_s соответствует поверхности горения. На границе x_s граничные условия выражают законы сохранения массы и энергии:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x_s, t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(x_s, t)}{\partial x}, \quad T_1(x_s, t) = T_2(x_s, t),$$

$$\alpha_{Al} \rho_1 u = \rho_3 w_3(x_s, t), \quad (1 - \alpha_{Al}) \rho_1 u = \rho_2(x_s, t) u_x(x_s, t), \quad (13)$$

$$T_3(x_s, t) = T_1(x_s, t), \quad n(x_s, t) = \frac{\rho_3(x_s, t)}{4/3 \pi r_{Al,0}^3 \rho_k}, \quad \rho_2(x_s, t) = p \mu / R T_2(x_s, t),$$

$$(1 - \alpha_{Al}) \rho_1 u = (\rho_2 u_x Y)|_{(x_s, t)} - D \rho_2(x_s, t) \frac{\partial Y(x_s, t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial T_1(-\infty, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_2(\infty, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y(\infty, t)}{\partial x} = 0.$$

Начальные условия:

Для $-\infty < x < x_s$:

$$T_1(x, 0) = T_0, \quad \eta(x, 0) = 0. \quad (14)$$

Для $x_s < x < \infty$:

$$\begin{aligned} T_2(x, 0) &= T_{ig}, \quad T_3(x, 0) = T_{ig}, \quad Y(x, 0) = 0, \\ u_x(x, 0) &= 0, \quad w_3(x, 0) = 0, \quad n(x, 0) = 0, \\ \rho_2(x, 0) &= p_n \mu / RT_{ig}, \quad \rho_3(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В уравнении (8) сила взаимодействия частиц алюминия с газом вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \tau_{fr} &= \frac{F_{fr}}{4/3 \pi r_3^3 \rho_{Al}}, \quad F_{fr} = C_R S_m \frac{\rho_2 (w_3 - u) |u - w_3|}{2}, \\ C_R &= \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.682}), \quad Re = \frac{2 \rho_2 r_3 |u - w_3|}{\mu_m}, \quad S_m = \pi r_3^2, \end{aligned} \quad (16)$$

где Re – число Рейнольдса; S_m – площадь миделева сечения; C_R – коэффициент трения; ρ_{Al} – плотность алюминия; η – коэффициент динамической вязкости.

Коэффициент теплоотдачи α определяется по формуле

$$\alpha = \frac{Nu(\lambda_2 + \lambda_t)}{2r_3}, \quad Nu = 2 + \sqrt{Nu_l^2 + Nu_t^2}, \quad (17)$$

$$Nu_l = 0.664 Re^{0.5}, \quad Nu_t = 0.037 Re^{0.8},$$

где Nu – число Нуссельта.

Скорость изменения массы частиц алюминия при их горении, а также уравнения, определяющие текущие значения размеров частиц и алюминия в частице имеют вид

$$G = \frac{3\mu_O}{2\mu_{Al}} n \rho_{Al} 4\pi a^{0.9} r_{Al}^{3/2} k_{Al}, \quad (18)$$

где k_{Al} – константа скорости горения частицы алюминия в среде окислителя; a – коэффициент избытка окислителя.

$$\begin{aligned} r_{Al} &= \left[\left(\frac{\mu_{Al} + 3/2 \mu_O}{\mu_{Al}} r_{Al,0}^3 - \frac{\rho_3}{(4/3) \pi n \rho_{Al}} \right) \frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O} \right]^{1/3}, \\ r_3 &= \left[r_{Al}^3 + \frac{\mu_{Al} + 3/2 \mu_O}{\mu_{Al}} (r_{Al,0}^3 - r_{Al}^3) \right]^{1/3}, \end{aligned} \quad (19)$$

Система уравнений (1) – (10), с начальными и граничными условиями (13) – (15), выражениями для правых частей (16) – (19), дополненными выражением сохранения движения для тангенциальной составляющей обдувающего потока (11) и моделью турбулентности Ван Дрифта (12), описывает горение твердого ракетного топлива с добавлением частиц алюминия в погранслоном приближении.

В модели (1) – (19) приняты обозначения: c_2 , c_c , c_{Al} – удельные теплоемкости газа при постоянном давлении пороха Н и алюминия; D – коэффициент диффузии; E_2 – энергия активации химической реакции в газе; G – скорость изменения массы частиц при их горении; k_0 – предэкспоненциальный множитель в законе Аррениуса скорости химической реакции в газе; n – число частиц в единице объема; P – давление; Q_2 – тепловой эффект реакции в газовой фазе; Q_{Al} – эффективная теплота сгорания алюминия; R – газовая постоянная; R_y – универсальная газовая постоянная; r_{Al} – радиус алюминия; r_3 – радиус частицы; t – время; T – температура; u_x , u_y – нормальная и тангенциальная компоненты скорости газа; u – скорость горения; w_3 – скорость частиц; x – координата; Y – относительная концентрация окислителя в газовой фазе; α – коэффициент теплоотдачи; α_{Al} – массовая доля алюминия в составе СТТ; λ – коэффициент теплопроводности; ρ_k – плотность металлизированного твердого топлива; ρ_2 – плотность газа; ρ_3 – приведенная плотность частиц (масса частиц в единице объема); ρ_{Al} – плотность алюминия; τ_{fr} – сила трения; μ_{Al} , μ_O – молярные массы молекул алюминия и кислорода, μ_m , μ_t – коэффициенты динамической вязкости молекулярный и турбулентный.

Индексы: 2 – газовая фаза; t – турбулентный; i – номер фракции частиц; 3 – конденсированная фаза продуктов горения; Al – алюминий; c – относится к конденсированному веществу (твердому топливу); ign – воспламенение.

Методика решения

Система уравнений (1) – (10), с начальными и граничными условиями (13) – (15), выражениями для правых частей (16) – (19) решалась методами, описанными в [9]. После установления стационарного распределения параметров над поверхностью горения твердого топлива система решаемых уравнений дополняется уравнениями (11) – (12) [5]. Счет шага по времени повторяется необходимое число раз для нового установления стационарного распределения параметров газодисперсной среды над поверхностью горения при решении системы уравнений (1) – (19). При расчетах, в уравнении (11) принималось, что $\partial p / \partial y = 0$, и уравнение имеет аналитическое решение.

Расчеты проводились для значений теплофизических и формально-кинетических параметров, характерных для пороха Н:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.25 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \lambda_2 = 0.066 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, Q_1 = 556800 \text{ Дж/кг}, \\ Q_2 &= 2435300 \text{ Дж/кг}, Q_{Al} = 36.51 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}, E_1 = 80000 \text{ Дж/моль}, \\ E_2 &= 186107 \text{ Дж/моль}, k_1 = 2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}, k_2 = 3.92 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}, k_{Al} = 2.22 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{1.5}/\text{с}, \\ a &= 0.5, c_1 = 1465 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, c_2 = 1466 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, c_3 = 760 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \\ \rho_1 &= 1600 \text{ кг/м}^3, \rho_k = 2600 \text{ кг/м}^3, \rho_{Al} = 2600 \text{ кг/м}^3, R = 8.31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}, \\ T_0 &= 293 \text{ К}, T_{ig} = 1300 \text{ К}. \end{aligned}$$

Коэффициент диффузии вычисляется через число Льюиса Le : $D_2 = Le \lambda_2 / (c_2 \rho_2)$, число Льюиса принято $Le = 1$. Температура воспламенения частиц алюминия

принята равной 1300 К. Величина начального радиуса частицы в расчетах $r_{Al,0} = 3$ мкм, массовая доля порошка алюминия принята равной 9 % массы топлива. Формально-кинетические параметры взяты из [5].

Результаты расчетов

С использованием изложенной методики расчета проведены численные исследования влияния скорости обдувающего потока на величину скорости горения. Было проведено тестирование разработанной методики и программы ЭВМ решения системы уравнений (1) – (19). В процессе вычислений контролировалась выполнимость законов сохранения массы и полной энергии, которые выполнялись с точностью не менее 99 %.

Расчеты зависимости скорости горения пороха Н с добавлением порошка алюминия проводились при $r_{Al,0} = 3$ мкм, $\alpha_{Al} = 0.09$.

На рис. 1 представлена зависимость скорости горения пороха Н с добавлением 9%масс порошка алюминия начального радиуса $r_{Al,0} = 3$ мкм в зависимости от скорости обдувающего потока.

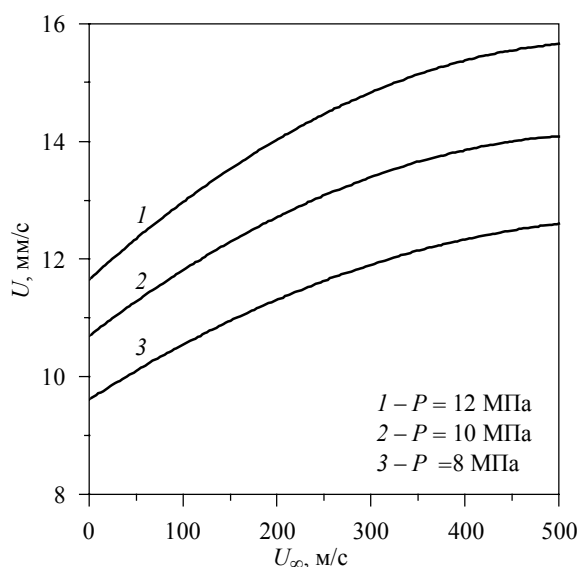


Рис. 1. Зависимость скорости горения пороха Н с добавлением порошка алюминия от скорости обдувающего потока при различных давлениях

Fig. 1. Combustion rate of the powder N with aluminum powder additive as a function of the blowing air velocity at various pressures

Видно, что с увеличением скорости обдувающего потока и давления над поверхностью СТТ скорость горения увеличивается. Характер зависимости скорости горения твердого топлива от скорости обдувающего потока не зависит от давления и соответствует характеру зависимости, описанному в научной литературе [2, 5].

На рис. 2 представлено распределение профиля температуры топлива и газа при горении без обдува и в условиях обдува. Начальный радиус частицы алюминия в расчетах $r_{Al,0} = 3$ мкм, массовая доля порошка алюминия 9 % массы топлива, давление над поверхностью горения $P = 10$ МПа. Видно, что профиль температуры газа существенно деформируется за счет увеличения турбулентного коэффициента теплопроводности и увеличивает тепловой поток к поверхности горения. Профиль тангенциальной составляющей скорости газа и турбулентного коэффициента теплопроводности над поверхностью горения представленного на рис. 3. Полученные зависимости соответствуют предсказанным в научной литературе [1, 2, 5].

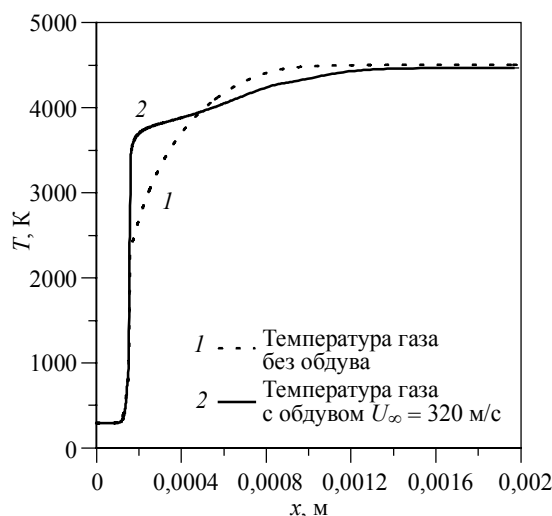


Рис. 2. Распределение температуры металлизированного твердого топлива и газа без обдува (кр. 1) и при обдуве (кр. 2) поверхности горения; $P = 10$ МПа, $U_{\infty} = 320$ м/с

Fig. 2. Distribution of the temperature of a metallized solid propellant and gas under conditions with (curve 1) and without (curve 2) blowing at $P = 10$ MPa and $U_{\infty} = 320$ m/s

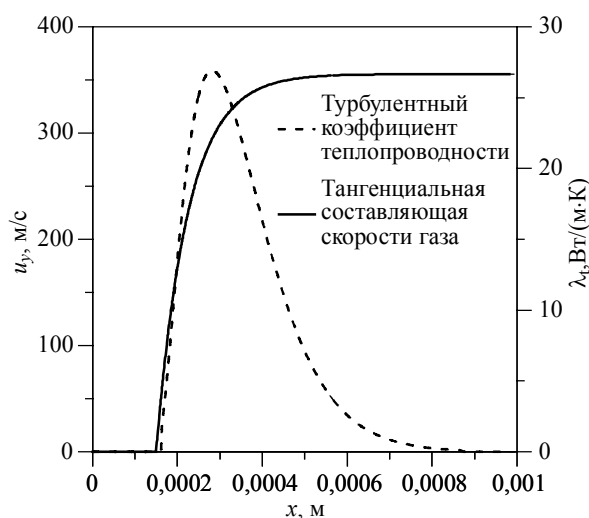


Рис. 3. Распределение тангенциальной составляющей скорости газа и турбулентного коэффициента теплопроводности над поверхностью горения; $P = 10$ МПа

Fig. 3. Distribution of the gas tangential velocity and turbulent coefficient of thermal conductivity over a burning surface at $P = 10$ MPa

Заключение

В работе представлены разработанная математическая модель, методика и результаты расчета нестационарной скорости горения смесового металлизированного твердого топлива в условиях обдува. Факт обдува учитывается через турбулентный тепло - массоперенос.

Проведен расчетно-теоретический анализ влияния добавок порошка алюминия на скорость горения металлизированных твердых топлив в условиях обдува. Проведено исследование зависимости скорости горения от скорости обдувающего потока.

В постановке рассматривается горение плоской поверхности металлизированного топлива в неограниченном обдувающем потоке. Данная модель не позволяет учесть особенности обдувающего потока на начальном участке или реальную геометрию канала РДТТ, но позволяет учесть физические особенности влияния добавок порошка алюминия в состав твердого ракетного топлива при горении в условиях обдува.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я.Б. К теории горения пороха в газовом потоке // Физика горения и взрыва. 1971. Т. 7. № 4. С. 463–476.
2. Вилунов В.Н. К теории эрозионного горения порохов // ДАН СССР. 1961. Т. 136. № 2. С. 381–383.
3. Вилунов В.Н., Дворяшин А.А. О закономерности горения пороха Н в потоке газа // Физика горения и взрыва. 1971. Т. 7. № 1. С. 45–51.
4. Булгаков В.К., Липанов А.М., Вилунов В.Н., Карпов А.И. О механизме отрицательной эрозии при горении твердых топлив // Физика горения и взрыва. 1989. Т. 25. № 4. С. 32–35.
5. Булгаков В.К., Липанов А.М. Теория эрозионного горения твердых ракетных топлив. М.: Наука, 2001. 138 с.
6. Minkov L.L., Shrager E.R. and Kiryushkin A.E. Two Approaches for Simulating the Burning Surface in Gas Dynamics // Key Engineering Materials. 2016. V. 685. P. 114–118. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.114.
7. Глазунов А.А., Еремин И.В., Жильцов К.Н. и др. Численное исследование определения величин пульсаций давления и собственных акустических частот в камерах сгорания с наполнителем сложной формы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 53. С. 59–72. DOI: 10.17223/19988621/53/6.
8. Архипов В.А., Бондарчук С.С., Коротких А.Г. и др. Влияние дисперсности алюминия на характеристики зажигания и нестационарного горения гетерогенных конденсированных систем // Физика горения и взрыва. 2012. Т. 48. № 5. С. 148–159.
9. Порязов В.А., Крайнов А.Ю. Математическая модель и расчет нестационарной скорости горения металлизированных твердых ракетных топлив // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 99–111.

Статья поступила 21.10.18 г.

Poryazov V.A., Krainov D.A. (2019) MATHEMATICAL MODELING OF THE EROSION BURNING OF METALLIZED SOLID PROPELLANTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 58. pp. 119–127

DOI 10.17223/19988621/58/10

This paper proposes a mathematical model and a computational method for unsteady combustion rate of a composite metallized solid propellant under conditions of blowing. A flat surface of the metallized propellant burning in an unlimited blowing flow is considered. The

model of erosive burning for metallized solid propellants is developed using the boundary layer approximation on the assumption of asymptotic flow regime which accounts for a blowing process in terms of turbulent heat and mass transfer, temperature pulsations, and reagent concentrations. The paper provides a computational and theoretical analysis of the impact of metal powder additives on the combustion rate of metallized solid propellants under conditions of blowing. The combustion rate is presented as a function of the blowing stream velocity.

Financial support. This work was supported by the Grant of the President of the Russian Federation (MK-1763.2017.8).

Keywords: metallized solid propellant, mathematical model, combustion rate, blowing effect, erosive burning, aluminum particles.

PORYAZOV Vasily Andreevich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

KRAINOV Dmitry Alekseevich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: krainov@tpu.ru

REFERENCES

1. Zel'dovich Ya.B. (1971) Theory of propellant combustion in a gas flow. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 7(4). pp. 399–408. DOI: 10.1007/BF00740666.
2. Vilyunov V.N. (1961) K teorii erozionnogo gorenija porokhov [On the theory of erosive combustion of gunpowders]. *Dokl. Akad. Nauk*. 136(2). pp. 381–383.
3. Vilyunov V.N., Dvoryashin A.A., Margolin A.D., Ordzhonikidze S.K., Pokhil P.F. (1972) Burning of ballistite type H in sonic flow. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 8(4). pp. 410–413. DOI: 10.1007/BF00741194.
4. Bulgakov V.K., Lipanov A.M., Vilyunov V.N., Karpov A.I. (1989) The negative-erosion mechanism in solid-fuel combustion. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 25(4). pp. 410–412. DOI: 10.1007/BF00751543.
5. Bulgakov V.K., Lipanov A.M. (2001) *Teoriya erozionnogo gorenija tverdykh raketnykh topliv* [Theory of erosive combustion of solid rocket propellants]. Moscow: Nauka.
6. Minkov L.L., Shrager E.R., Kiryushkin A.E. (2016) Two approaches for simulating the burning surface in gas dynamics. *Key Engineering Materials*. 685. pp. 114–118. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.114.
7. Glazunov A.A., Eremin I.V., Zhil'tsov K.N., Kostyushin K.V., Tyryshkin I.M., Shuvarikov V.A. (2018) Chislennoe issledovanie opredeleniya velichin pul'satsiy davleniya i sobstvennykh akusticheskikh chastot v kamerakh sgoraniya s napolnitelem slozhnoy formy [Numerical investigation of the pressure pulsation magnitude and natural aeroacoustic frequencies in the combustion chambers with a charge of a complex shape]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 53. pp. 59–72. DOI: 10.17223/19988621/53/6.
8. Arkhipov V.A., Bondarchuk S.S., Korotkikh A.G., Kuznetsov V.T., Gromov A.A., Volkov S.A., Revyagin L.N. (2012) Influence of aluminum particle size on ignition and nonstationary combustion of heterogeneous condensed systems. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 48(5). pp. 625–635. DOI: 10.1134/S0010508212050140.
9. Poryazov V.A., Krainov A.Yu. (2017) *Matematicheskaya model' i raschet nestatsionarnoy skorosti gorenija metallizirovannykh tverdykh raketnykh topliv* [Mathematical model and calculation of the unsteady combustion rate of the metallized solid rocket propellants]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 99–111. DOI: 10.17223/19988621/50/9.