УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/47/4

Ю.Г. Дмитриев, Ж.Н. Зенкова, А.Г. Зенков

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНОК МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ
ЦЕНОВОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ PSM**

Анализируются асимптотические свойства оценок ценовых значений, полученных методом измерения ценовой чувствительности PSM (Price Sensitivity Meter), который ориентирован на потребительский спрос, показаны их асимптотическая нормальность и состоятельность, построены доверительные интервалы. Метод апробирован на реальных данных о ценовых предпочтениях потребителей нового программного продукта, выводимого на рынок товаров производственного назначения B2B; предприятию даны рекомендации относительно установления конечной цены на товар-новинку.

Ключевые слова: ценообразование; метод измерения ценовой чувствительности PSM; медиана; асимптотическая нормальность.

Вопрос установления рыночной цены, по которой предприятие будет продавать свою продукцию, особенно если это абсолютно новый для фирмы товар, является не просто ключевым, а жизненно важным для организации любой формы собственности [1]. Затратный подход не всегда позволяет найти такую цену, которую покупатели смогли бы воспринимать как приемлемую и справедливую. Методы ценообразования, ориентированные на спрос [2], решают данную проблему и помогают найти ориентировочные диапазоны справедливых цен еще до начала этапа внедрения товара на рынок. Одним из таких методов является метод измерения ценовой чувствительности – Price Sensitivity Meter (PSM), предложенный датским экономистом Питером Ван Вестендорпом [3]. Его описание приведено ниже.

Данная методика широко применяется за рубежом, однако достаточно редко используется в отечественной маркетинговой практике. Статистические свойства метода изучены весьма слабо, притом этот факт признается также и зарубежными исследователями [4–7]. В работах [8–12] метод PSM рекомендуется к применению за простоту как расчетов, так и интерпретации результатов, а также за относительную дешевизну стоимости маркетинговых исследований. В то же время в [8–10] метод подвергается критике, поскольку его результаты базируются на потребительских ощущениях, которые, с одной стороны, не имеют непосредственной связи с ожидаемой целевой прибылью компании-производителя, а с другой – не могут рассматриваться как четко осознаваемые потребителем данные [10], с чем стоит поспорить, так как после использования товара в течение некоторого временного периода, что предусматривается методом, представители целевой аудитории успевают получить емкое и детальное представление о товаре, а значит, смогут адекватно оценить его потребительскую ценность и указать справедливые, по их мнению, значения цен в процессе опроса.

В [4] предлагается модификация метода PSM, основанная на системе линейных (Чапмана–Колмогорова) и нелинейных дифференциальных уравнений, найдено ее аналитическое решение, представляющее собой комбинацию логистических регрессий. В [13] свойства метода изучены с помощью имитационного моделирования, показано влияние количества опрашиваемых на точность метода. В [13–20] предлагаются модификации на случай как наличия цензурированных данных, так и знания различной дополнительной информации; с помощью имитационного моделирования и метода бутстреп изучено влияние модификаций на свойства метода PSM; показано, что цензурирование негативно сказывается на точности оценивания ценовых предпочтений, в то время как привлечение дополнительной информации может улучшить его качество, в том числе и при наличии любого вида цензурирования.

В данной работе аналитически показана асимптотическая нормальность оценок ценовых значений, полученных с помощью метода PSM. Это позволяет находить доверительные интервалы для каждого из искомых уровней цен.

1. Метод измерения ценовой чувствительности PSM

Рассмотрим последовательность проведения маркетингового исследования согласно методу PSM. На начальном этапе N представителям целевой аудитории предлагается попользоваться товаром на протяжении некоторого периода времени для того, чтобы они смогли объективно воспринять его потребительскую ценность. Далее каждому участнику задаются следующие вопросы:

1. Ниже какого уровня цены x_1 товар кажется Вам настолько дешевым, что начинают возникать подозрения о том, что он некачественный или поддельный?
2. Какая цена x_2 для Вас является приемлемой для покупки товара?
3. Какая цена x_3 кажется Вам высокой, однако Вы еще рассматриваете вопрос о покупке?
4. Начиная с какого уровня цены x_4 товар кажется Вам настолько дорогим, что вопрос о покупке даже не ставится?

Рассмотрим цены в пунктах 1–4 как случайные величины X_j , $j = \overline{1,4}$, с соответствующими функциями распределения $F_j(x) = P(X_j < x)$. Тогда результаты опроса можно представить как четырехмерную выборку $(X_{k1}, X_{k2}, X_{k3}, X_{k4})$, $k = \overline{1, N}$, при этом выборочные элементы можно рассматривать как независимые между собой, так как в процессе исследования представители целевой аудитории не могут оказать влияние друг на друга (опрос проводится тайно, желательно опрашивать каждого респондента отдельно).

Рис. 1. Кривые ценовой чувствительности метода PSM

Fig. 1. Price sensitivity curves of PSM method

По каждому выборочному вектору $\{X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{Nj}\}$ случайной величины X_j , $j = \overline{1,4}$, построим эмпирическую функцию распределения $\hat{F}_j(x)$ по формуле

$$\hat{F}_j(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I_{[0,x)}(X_{kj}), \quad (1)$$

где $I_{[0,x)}(\cdot)$ – индикаторная функция. Для $i = 1, 3$ рассмотрим эмпирическую оценку функции выживания

$$\hat{S}_i(x) = 1 - \hat{F}_i(x). \quad (2)$$

Отобразим функции (1) и (2) на рис. 1. Эти функции называют *кривыми ценовой чувствительности* (Price Sensitivity Curves). Обычно на практике кривые предварительно кусочно-линейно сглаживают, а затем находят искомые цены (рис. 2).

Рис. 2. Сглаженные кривые метода ценовой чувствительности PSM

Fig. 2. Smoothed price sensitivity curves of PSM method

В качестве рекомендуемого диапазона цен рассматривается отрезок, левый конец которого – абсцисса точки пересечения $\hat{F}_4(x)$ и $\hat{S}_1(x)$ – «оптимальная цена» $\hat{x}_{\text{опт}}$, правый – значение, соответствующее пересечению $\hat{F}_2(x)$ и $\hat{S}_3(x)$ – «ожидаемая цена», или «точка безразличия» $\hat{x}_{\text{безр}}$. Назначать цену ниже минимально возможной $\hat{x}_{\text{мин}}$ не рекомендуется, так как потребители будут воспринимать товар как некачественный. Если назначить цену выше максимально возможной $\hat{x}_{\text{макс}}$, то потребители будут воспринимать товар как необоснованно дорогой.

2. Расчет ценовых значений методом PSM

Рассмотрим случай, когда метод PSM базируется на не сглаженных кривых, а на эмпирических функциях распределения, представляющих из себя ступенчатые функции. Заметим, что пересечением оценок кривых ценовой чувствительности могут являться отрезки, при этом в качестве искомой цены будем рассматривать их правые границы. Например, для точки безразличия $\hat{x}_{\text{безр}}$ (см. рис. 1) формула для определения цены принимает вид:

$$\hat{x}_{\text{безр}} = \max \{ x : \hat{F}_2(x) = \hat{S}_3(x) \}.$$

Если несколько участников исследования назвали одинаковые цены, то возможна ситуация, когда пересечения не существует (см. $\hat{x}_{\text{мин}}$ на рис. 1), в результате искомая цена определяется следующим образом:

$$\hat{x}_{\text{мин}} = x : \hat{S}_1(x+0) \leq \hat{F}_3(x) < \hat{S}_1(x).$$

В итоге для $i=1, 3$ и $j=2, 4$

$$\hat{x}^{(ij)} = \begin{cases} \max \{x : \hat{F}_j(x) = \hat{S}_i(x)\} \\ x : \hat{S}_i(x+0) \leq \hat{F}_j(x) < \hat{S}_i(x), \\ x : \hat{F}_i(x) < \hat{S}_j(x) \leq \hat{F}_i(x+0), \end{cases}$$

при этом $\hat{x}^{(12)} = \hat{x}_{\min}$, $\hat{x}^{(14)} = \hat{x}_{\text{опт}}$, $\hat{x}^{(32)} = \hat{x}_{\text{безр}}$, $\hat{x}^{(34)} = \hat{x}_{\max}$. Заметим, что для $i=1, 3$ и $j=2, 4$ истинное значение $x^{(ij)}$ есть абсцисса точки пересечения теоретических кривых $F_i(x)$ и $S_j(x)$, которая определяется в общем виде из уравнения

$$F_j(x) = 1 - F_i(x) \quad (3)$$

или, что то же самое,

$$(F_i(x) + F_j(x))/2 = 0,5.$$

Для $i=1, 3$ и $j=2, 4$ рассмотрим функции

$$G_{ij}(x) = (F_i(x) + F_j(x))/2. \quad (4)$$

Очевидно, что $G_{ij}(x)$ есть функция распределения. Таким образом, решением уравнения (3) является медиана функции распределения (4), то есть такое значение $x_{0,5}^{(ij)}$, что $G_{ij}(x_{0,5}^{(ij)}) = 0,5$ или

$$x_{0,5}^{(ij)} = G_{ij}^{-1}(0,5) = \sup \{x : G_{ij}(x) \leq 0,5\}, \quad (5)$$

где $G_{ij}^{-1}(\cdot)$ – обратная к $G_{ij}(x)$ функция.

Найдем статистическую оценку решения (5). Для этого по двумерной выборке (X_{ki}, X_{kj}) , $k = \overline{1, N}$, для $i=1, 3$ и $j=2, 4$ построим оценки функции распределения (4)

$$\hat{G}_{ij}(x) = (\hat{F}_i(x) + \hat{F}_j(x))/2. \quad (6)$$

Оценки (6) являются несмещенными, т.е. $M\hat{G}_{ij}(x) = G_{ij}(x)$, с дисперсией $D\hat{G}_{ij}(x) = \sigma_{ij}^2(x)/N$, где

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^2(x) &= 1/4 \cdot (F_i(x)(1 - F_i(x)) + F_j(x)(1 - F_j(x)) + 2(F_{ij}(x, x) - F_i(x)F_j(x))) = \\ &= 1/4 \cdot (F_i(x) + F_j(x) - (F_i(x) + F_j(x))^2 + 2F_{ij}(x, x)). \end{aligned}$$

Здесь $F_{ij}(y, z)$ – совместная функция распределения случайной величины X_i и X_j для $i=1, 3$ и $j=2, 4$, $F_{ij}(y, z) \neq F_i(y) \cdot F_j(z)$, так как случайные величины X_i и X_j не являются независимыми.

Кроме того, в силу центральной предельной теоремы

$$\begin{aligned} &L(\sqrt{N} \cdot (\hat{G}_{ij}(x) - G_{ij}(x))) = \\ &= L\left(\sqrt{N} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{I_{[0,x)}(X_{ki}) - F_i(x) + I_{[0,x)}(X_{kj}) - F_j(x)}{2}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N(0, \sigma_{ij}^2(x)). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, оценки ценовых значений $\hat{x}^{(ij)}$ могут быть получены путем подстановки оценки (6) в (5) с последующим вычислением по формуле:

$$\hat{x}_{0,5}^{(ij)} = \hat{G}_{ij}^{-1}(0,5) = \sup \{x : \hat{G}_{ij}(x) \leq 0,5\}. \quad (8)$$

Это приводит к значению $(N+1)$ -й порядковой статистики $X_{(N+1)}^{(ij)}$ в объединенной выборке объема $2N$, составленной из выборок $\{X_{ki}\}$ и $\{X_{kj}\}$, $k = \overline{1, N}$, т.е. $\hat{x}_{0,5}^{(ij)} = X_{(N+1)}^{(ij)}$.

3. Асимптотическая нормальность оценок PSM

Для доказательства асимптотической ($N \rightarrow \infty$) нормальности оценок (8) воспользуемся методом, изложенным в [21]. Представим (8) в виде функционала от оценки функции распределения (6)

$$\hat{x}_{0,5}^{(ij)} = T[\hat{G}_{ij}], \quad (9)$$

в область определения которого входит теоретическая функции распределения $G(x)$ и все функции вида

$$\hat{G}_{ij}^t(x) = G(x) + t(\hat{G}_{ij}(x) - G(x)), \quad t \in [0; 1].$$

Обозначим

$$\eta(t) = T[\hat{G}_{ij}^t], \quad t \in [0; 1].$$

Асимптотические свойства $\hat{x}_{0,5}^{(ij)}$ определяются первой отличной от нуля производной функции $\eta(t)$ в точке $t = 0$. Найдем производную $\eta(t)$. Для этого рассмотрим уравнение

$$H(t, \hat{x}_{0,5}^{(ij)}) = \hat{G}_{ij}^t(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}) - 0,5 = 0,$$

которое при $t = 1$ переходит в (9). Пусть уравнение $H(t, \hat{x}_{0,5}^{(ij)}) = 0$ определяет неявным образом значение функционала $T[\hat{G}_{ij}^t]$ для всех $t \in [0; 1]$. Дифференцируя функцию $\eta(t)$ по t как неявную, имеем в точке $t = 0$

$$\eta'(t=0) = \frac{\partial H / \partial t}{\partial H / \partial x_{0,5}^{(ij)}} \Big|_{t=0} = - \frac{\hat{G}_{ij}(x_{0,5}^{(ij)}) - G_{ij}(x_{0,5}^{(ij)})}{g_{ij}(x_{0,5}^{(ij)})} = - \frac{\hat{G}_{ij}(x_{0,5}^{(ij)}) - 0,5}{g_{ij}(x_{0,5}^{(ij)})},$$

где $g_{ij}(x) = (f_i(x) + f_j(x))/2$ – плотность функции распределения $G_{ij}(x)$, при этом предполагается, что для $m = \overline{1, 4}$ существуют $f_m(x)$ – плотности функции распределения $F_m(x)$ и $g_m(x_{0,5}^{(ij)}) \neq 0$. Отсюда и из (7) следует, что при $N \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая нормальность оценок (8):

$$L(\sqrt{N} \cdot (\hat{x}_{0,5}^{(ij)} - x_{0,5}^{(ij)})) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N(0; v_{ij}^2), \quad (10)$$

где $v_{ij}^2 = F_{ij}(x_{0,5}^{(ij)}, x_{0,5}^{(ij)}) / (2g_{ij}^2(x_{0,5}^{(ij)}))$.

Выражение (10) позволяет строить приближенные доверительные интервалы для $x_{0,5}^{(ij)}$ с заданной доверительной вероятностью $0 < \gamma < 1$:

$$X_{(N+1)}^{(ij)} - \frac{z_{(1+\gamma)/2} \cdot \hat{v}_{ij}}{\sqrt{N}} \leq x_{0,5}^{(ij)} \leq X_{(N+1)}^{(ij)} + \frac{z_{(1+\gamma)/2} \cdot \hat{v}_{ij}}{\sqrt{N}}, \quad (11)$$

где $z_{(1+\gamma)/2}$ – квантиль уровня $(1 + \gamma) / 2$ стандартного нормального распределения,

$$\hat{v}_{ij} = \sqrt{2\hat{F}_{ij}(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}, \hat{x}_{0,5}^{(ij)})} / \left(\hat{f}_i(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}) + \hat{f}_j(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}) \right), \quad (12)$$

$\hat{f}_i(x)$, $\hat{f}_j(x)$ – состоятельные оценки плотностей в точке $x = \hat{x}_{0,5}^{(ij)}$.

4. Состоятельность оценок

Покажем состоятельность оценок (5) и (12). Очевидно, что для $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$ функции распределения $F_{ij}(x, y)$ непрерывны, так как плотности существуют только для непрерывных случайных величин, следовательно, обратные к $F_{ij}(x, y)$ функции также существуют и являются непрерывными.

Воспользуемся интегральными преобразованиями [22]

$$X_{(ks)} = F_s^{-1}(U_{(ks)}), U_{(ks)} = F_s(X_{(ks)}), X_{ks} = F_s^{-1}(U_{ks}), U_{ks} = F_s(X_{ks}), \quad (13)$$

где для $s = \overline{1, 4}$ $X_{(ks)}$ – k -я порядковая статистика выборки $\{X_{ks}\}$, U_{ks} – равномерная в $[0, 1]$ с.в., $U_{(ks)}$ – k -я порядковая статистика выборки $\{U_{ks}\}$. Нетрудно убедиться, что смесь с.в. $\{U_{ki}\}$ и $\{U_{kj}\}$, $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$, $k = \overline{1, N}$, распределена равномерно в $[0, 1]$, следовательно, для медианы

$$\hat{U}_{0,5} = G_{ij}(X_{(N+1)}^{(ij)}) = (F_i(X_{(N+1)}^{(ij)}) + F_j(X_{(N+1)}^{(ij)}))/2$$

объединенной выборки $\{U_k\}$ объема $2N$ верно неравенство Чебышёва:

$$P\left\{|\hat{U}_{0,5} - E\hat{U}_{0,5}| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D\hat{U}_{0,5}}{\varepsilon^2}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где [22]

$$E\hat{U}_{0,5} = \frac{N}{2N+1},$$

$$D\hat{U}_{0,5} = \frac{N \cdot (2N - N + 1)}{(2N + 2) \cdot (2N + 1)^2} = \frac{N}{2 \cdot (2N + 1)^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно, $\hat{U}_{0,5} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{P} \frac{1}{2}$.

Заметим, что в силу непрерывности функций распределения $F_{ij}(x, y)$ и функции распределения $G_{ij}(x) = (F_i(x) + F_j(x))/2$ являются непрерывными, следовательно, их обратные функции также непрерывны. Отсюда, согласно первой теореме непрерывности [23], верно следующее

$$G_{ij}^{-1}(\hat{U}_{0,5}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{P} G_{ij}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right),$$

из чего следует состоятельность оценки $\hat{x}_{0,5}^{(ij)} = X_{(N+1)}^{(ij)}$ (5).

Согласно [23] для любого фиксированного x

$$\hat{F}_{ij}(x, x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{P} F_{ij}(x, x),$$

следовательно, в силу первой теоремы непрерывности [23] $\hat{F}_{ij}(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}, \hat{x}_{0,5}^{(ij)}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{P} F_{ij}(x_{0,5}^{(ij)}, x_{0,5}^{(ij)})$ для непрерывной функции $F_{ij}(x, x)$. Аналогично в силу первой теоремы непрерывности верно, что

$$\sqrt{2\hat{F}_{ij}(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}, \hat{x}_{0,5}^{(ij)})} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{P} \sqrt{2F_{ij}(x_{0,5}^{(ij)}, x_{0,5}^{(ij)})}.$$

Пусть для $s = \overline{1, 4}$ плотности $f_s(x)$ непрерывны и $f_s(x) > 0$. Рассмотрим ядерные оценки плотностей $f_s(x)$ Розенблатта–Парзена [24, 25]:

$$\hat{f}_s(x) = \frac{1}{Nh_N^s} \sum_{i=1}^N K_s\left(\frac{x - X_{is}}{h_N^s}\right),$$

где $K_s(x)$ – ядро оценки (обычно это некоторая плотность распределения вероятностей), при этом должны выполняться следующие условия:

$$K_s(t) \geq 0, t \in \mathbf{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K_s(t) dt = 1, \quad \sup_{t \in \mathbf{R}} K_s(t) < \infty, \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} tK_s(t) = 0,$$

здесь h_N^s – параметр размытости (последовательность положительных величин, такая, что $\lim_{N \rightarrow \infty} h_N^s = 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t K_s(t) dt = 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} K_s^2(t) dt < \infty$, $\lim_{N \rightarrow \infty} N h_N^s = \infty$), тогда $\hat{f}_s(x)$ является состоятельной оценкой непрерывной функции $f_s(x)$. Из этого следует состоятельность $\hat{f}_i(\hat{x}_{0,5}^{(ij)})$ и $\hat{f}_j(\hat{x}_{0,5}^{(ij)})$ в точке $\hat{x}_{0,5}^{(ij)}$ ($\hat{f}_s(x)$ сходятся по вероятности к непрерывной функции, отсюда по первой теореме непрерывности следует состоятельность в точке $\hat{x}_{0,5}^{(ij)}$).

Так как для $s = 1,4$ $f_s(x) > 0$ и непрерывны, то функция $\frac{1}{f_i(x) + f_j(x)}$ также непрерывна, следовательно, по первой теореме непрерывности

$$\frac{1}{\hat{f}_i(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}) + \hat{f}_j(\hat{x}_{0,5}^{(ij)})} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{P} \frac{1}{f_i(x_{0,5}^{(ij)}) + f_j(x_{0,5}^{(ij)})}.$$

Таким образом, в силу непрерывности произведения функций $\sqrt{2F_{ij}(x, x)}$ и $\frac{1}{f_i(x) + f_j(x)}$ при $f_s(x) > 0$ имеет место состоятельность оценки (12).

5. Метод PSM в анализе цены нового программного продукта

Рассматриваемый метод применялся в задаче определения цены нового программного продукта (ПП), выводимого на рынок товаров производственного назначения В2В. В анкетировании принимали участие представители 52 организаций, которым в тестовом режиме в течение двух месяцев предоставлялась возможность воспользоваться ПП. В целях сохранения коммерческой тайны результаты опроса масштабированы и приведены в табл. 1 в условных единицах (у.е./ед.). Итоги подсчетов цен – выборочных медиан – показаны в табл. 2. Предприятию целесообразно назначать цену продажи в диапазоне 205–379 у.е./ед.

Таблица 1

Результаты опроса потребителей по методике PSM (у.е./ед.)

№	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	№	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	№	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	№	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	53	145	204	257	14	109	251	302	360	27	159	277	359	428	40	196	307	403	591
2	58	172	239	287	15	116	253	308	363	28	162	280	362	432	41	198	308	408	611
3	60	173	253	290	16	125	255	310	365	29	163	284	364	436	42	200	311	408	620
4	66	175	254	301	17	126	256	313	374	30	165	286	367	439	43	205	313	424	643
5	73	186	256	302	18	129	257	315	379	31	165	288	367	454	44	206	313	427	660
6	78	186	257	305	19	130	262	333	382	32	167	291	368	462	45	209	314	430	685
7	82	186	260	309	20	138	262	335	384	33	173	293	373	467	46	225	320	438	690
8	85	199	274	318	21	144	264	339	390	34	181	294	374	472	47	238	322	439	773
9	95	201	277	322	22	148	266	341	398	35	183	295	377	489	48	259	323	474	838
10	103	202	279	324	23	151	266	350	418	36	184	300	381	522	49	270	327	474	869
11	104	220	283	327	24	152	271	350	419	37	186	301	391	526	50	288	336	508	1152
12	108	222	293	352	25	155	274	354	421	38	186	303	394	529	51	290	343	581	1309
13	108	236	294	359	26	157	276	355	422	39	193	306	399	560	52	301	361	655	1350

Знание асимптотической нормальности оценок позволило построить доверительные интервалы для каждой цены с вероятностью $\gamma = 0,9$ (см. табл. 2), где значения $\hat{v}_{ij}$ (12) рассчитывались с использованием ядерных оценок плотностей с гауссовым ядром. Доверительные интервалы для $\gamma = 0,9$ бы-

ли также смоделированы бутстреп-методом с объемом бутстреп-выборки $M = 65\,536$. Результаты приведены в табл. 2. На рис. 3 показаны гистограмма, построенная по бутстреп-выборке медиан $\hat{X}_{0,5}^{(13)}$, и плотность нормального распределения с параметрами, оцененными по бутстреп-выборке (см. табл. 2).

Таблица 2

Результаты оценивания числовых характеристик и доверительных интервалов

	$\hat{x}^{(12)} = \hat{x}_{\min}$	$\hat{x}^{(14)} = \hat{x}_{\text{опт}}$	$\hat{x}^{(32)} = \hat{x}_{\text{безр}}$	$\hat{x}^{(34)} = \hat{x}_{\max}$
Оценки $\hat{x}_{0,5}^{(ij)}$	205	290	306	379
Средние по бутстреп-выборке $\bar{X}_{ij}$	206,80	289,88	303,21	376,51
Среднеквадратическое отклонение по бутстреп-выборке	11,00	10,93	6,90	6,02
γ	0,9	0,9	0,9	0,9
$z_{(1+\gamma)/2}$	1,645	1,645	1,645	1,645
$\Delta = z_{(1+\gamma)/2} \hat{\sigma}_{ij} / \sqrt{N}$	25,07	18,42	13,73	12,15
Нижняя граница интервала $\hat{x}_{0,5}^{(ij)} - \Delta$	179,93	271,58	292,27	366,85
Верхняя граница интервала $\hat{x}_{0,5}^{(ij)} + \Delta$	230,07	308,42	319,73	391,15
Δ_B по бутстреп-выборке	2,51	2,49	1,57	1,37
Нижняя граница интервала $\bar{X}_{ij} - \Delta_B$	204,29	287,38	301,64	375,14
Верхняя граница интервала $\bar{X}_{ij} + \Delta_B$	209,31	292,37	304,79	377,88

 Рис. 3. Гистограмма бутстреп-выборки $\hat{X}_{0,5}^{(12)}$ и плотность $N(206,8; 11,0)$

 Fig.3. Bootstrap histogram of $\hat{X}_{0,5}^{(12)}$ and corresponding density $N(206,8; 11,0)$

Таким образом, предприятию рекомендовано рассмотреть в качестве базовых бутстреп-интервалы для оптимальной цены, позволяющей захватить большую долю рынка $X_{0,5}^{(14)} \in (287,38; 292,37)$ у.е./шт., а также для цены безразличия, которая выше оптимальной, но применяется для подчеркивания престижности и статусности товара $X_{0,5}^{(23)} \in (301,64; 304,79)$ у.е./шт.

Заключение

В работе показаны асимптотическая нормальность и состоятельность оценок ценовых значений метода PSM. На основании этого построены приближенные доверительные интервалы, в которых использованы оценки совместной функции распределения и плотностей. Расчеты по реальным дан-

ным результатов опроса представителей организаций – потенциальных потребителей нового программного продукта – показали, что эти доверительные интервалы шире в сравнении с доверительными интервалами, построенными методом бутстреп.

При формировании стратегии ценообразования производителю рекомендуется использовать в качестве базовых бутстреп-интервалы для оптимальной цены, позволяющей охватить большую долю рынка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kotler P., Armstrong G. Principles of Marketing. Prentice-Hall, 2016. 398 p.
2. Коржов М.М., Кузин Д.А. Сравнительный анализ и практическое применение методов ценообразования с ориентацией на спрос // Новости маркетинга. 2007. № 4. С. 9–17.
3. Westendorp P.H. NSS – Price Sensitivity Meter (PSM) – A New Approach to Consumer Perception of Prices // Venice Congress Main Sessions, European Marketing Research Society (ESOMAR). Amsterdam, 1976. P. 139–167.
4. Lipovetsky S. Van Westendorp Price Sensitivity in Statistical Modeling // International Journal of Operations and Quantitative Management. 2006. V. 12, No. 2, P. 141–156.
5. Lipovetsky S., Magnan S., Polzi A.Z. Pricing Models in Marketing Research // Intelligent Information Management. 2011. No. 3. P. 167–174.
6. Roll O., Achterberg L.H., Herbert K.G. Innovative approaches to analyzing the Price Sensitivity Meter: Results of an international comparative study // COMBI2010 Conference proceedings. Vantaa, 2010. P. 181–193.
7. Müller H. Empirische Untersuchung zur Messung der Preiswahrnehmung mittels Pricesensitivity-Meter // Marketing Zeitschrift für Forschung und Praxis. 2009. No 3. P. 171–182.
8. Hofmann T., Lederle D., Felsch M. Innovative Verfahren der empirischen Preisforschung // Planung & Analyse, 2006. No. 6. P. 28–33.
9. Wildner R. Marktforschung für den Preis // Jahrbuch der Absatz- und Verbrauchsforschung. 2003. No. 49 (1). P. 4–26.
10. Nagle T.T., Holden R.K. The Strategy and Tactics of Pricing: A Guide of Profitable Decision Making. 2nd ed. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. NJ, 1995.
11. Kupiec B., Revell B. Measuring consumer quality judgments // British Food Journal. 2001. № 103 (1). P. 7–22.
12. Comley P. What do we know about Pricing research // WARC. Admap, 1997. No. 1.
13. Журко Е.С., Зенкова Ж.Н. Метод ценообразования PSM для случая цензурированных выборок малого объема // Логистические системы в глобальной экономике. Красноярск : СибГАУ, 2016. С. 152–157.
14. Журко Е.С., Зенкова Ж.Н. Влияние априорной информации на результаты метода ценообразования на товар-новинку PSM // Актуальные проблемы и перспективы развития государственной статистики в современных условиях : III Междунар. науч.-практ. конф. Саратов : Саратовстат, 2017. Т. 2. С. 66–68.
15. Журко Е.С., Зенкова Ж.Н. Метод ценообразования PSM для цензурированных данных с учетом квантиля // Наука. Технологии. Производство : междунар. союз ученых. СПб., 2015. № 9 (13). С. 13–16.
16. Журко Е.С., Зенкова Ж.Н. Модификация метода ценообразования PSM с учетом квантиля заданного уровня // Информационные технологии Сибири : сб. матер. Междунар. науч.-практич. конф. Кемерово : КузГТУ, 2016. С. 134–136.
17. Зенкова Ж.Н., Копнова Е.Е., Бараксанов Д.Н. Применение метода PSM и алгоритма Тёрнбулла при определении цены нового программного продукта // Высокие технологии, фундаментальные исследования, инновации : сб. докл. XVII Междунар. науч.-практ. конф. СПб., 2014. С. 301–305.
18. Зенкова Ж.Н., Краковецкая И.В. Маркетинговое исследование цены спроса по интервальным данным с привлечением информации о симметрии распределения // Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности и экономике. Высокие технологии, исследования, финансы : сб. докл. XV Междунар. науч.-практ. конф. СПб. : Политехн. ун-т, 2013. Т. 1. С. 101–104.
19. Зенкова Ж.Н., Краковецкая И.В. Непараметрическая оценка Тёрнбулла для интервально-цензурированных данных в маркетинговом исследовании спроса на биоэнергетические напитки // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 3 (24). С. 64–69.
20. Zenkova Zh., Krakovetskaia I. Marketing of New Bio-Energy Drinks // Theoretical and Empirical Reflections in Marketing. Athens Institute for Education & Research, ATINER, 2014. P. 179–192.
21. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М. : Высшая школа, 1982. 256 с.
22. Шуленин В.П. Математическая статистика : учебник. Томск : НТЛ, 2012. Ч. 3: Робастная статистика. 520 с.
23. Боровков А. А. Математическая статистика. Новосибирск : Наука, 1997. 772 с.
24. Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estimates of a density functions // Ann. Math. Statist. 1956. V. 27, No. 3. P. 832–837.
25. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode // Ann. Math. Statist. 1962. V. 33. P. 1065–1076.

Поступила в редакцию 2 сентября 2018 г.

Dmitriev U.G., Zenkova Z.N., Zenkov A.G. (2019) STATISTICAL PROPERTIES OF PRICE SENSITIVITY METER RESULTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 30–40

DOI: 10.17223/19988605/47/4

Price Sensitivity Meter (PSM) technique is used to estimate prices, which are maximal agreed to consumers. It is based on marketing survey of N target audience representatives' price preferences. The survey forms independent sample $(X_{k1}, X_{k2}, X_{k3}, X_{k4})$, $k = \overline{1, N}$, where for the k -th respondent X_{k1} is minimal acceptable, X_{k2} – bargain, X_{k3} is high but yet acceptable, X_{k4} is too high prices. For $j = \overline{1, 4}$ the empirical distribution functions $\hat{F}_j(x) = \sum_{k=1}^N I_{[0, x)}(X_{kj}) / N$ are considered, for $i = 1, 3$: $\hat{S}_i(x) = 1 - \hat{F}_i(x)$. The final prices are found as the abscissas of $\hat{F}_j(x)$, $j = 2, 4$ and $\hat{S}_i(x)$, $i = 1, 3$, intersections as $\hat{x}^{(ij)} = \left\{ \max \left\{ x : \hat{F}_j(x) = \hat{S}_i(x) \right\}; x : \hat{S}_i(x+0) \leq \hat{F}_j(x) < \hat{S}_i(x) \right\}$, which are the medians' estimates $x_{0,5}^{(ij)}$ of $G_{ij}(x) = (F_i(x) + F_j(x)) / 2$. It was proved that $\hat{x}_{0,5}^{(ij)} = X_{(N+1)}^{(ij)}$ are $(N+1)$ -order statistics of a sample containing random values (X_{ki}, X_{kj}) , $k = \overline{1, N}$, and $\hat{x}_{0,5}^{(ij)}$ are consistent and asymptotically normally distributed:

$$L\left(\sqrt{N}\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)} - x_{0,5}^{(ij)}\right)\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N(0; \nu_{ij}^2),$$

where $\nu_{ij} = \sqrt{2F_{ij}(x_{0,5}^{(ij)}, x_{0,5}^{(ij)})} / g_{ij}(x_{0,5}^{(ij)})$, $F_{ij}(y, z)$ is a joint of X_i and X_j , $F_{ij}(y, z) \neq F_i(y)F_j(z)$ because according to PSM for $i, j = \overline{1, 4}$, $i < j$, prices $X_i < X_j$ and they are not independent; $g_{ij}(x)$ are the density function of $G_{ij}(x)$. Here we suggested that for $m = \overline{1, 4}$ $\exists f_m(x)$ and $g_{ij}(x_{0,5}^{(ij)}) \neq 0$. Equation (1) allows finding approximate confidence intervals

$$X_{(N+1)}^{(ij)} - z_{(1+\gamma)/2} \cdot \hat{\nu}_{ij} / \sqrt{N} \leq X_{0,5}^{(ij)} \leq X_{(N+1)}^{(ij)} + z_{(1+\gamma)/2} \cdot \hat{\nu}_{ij} / \sqrt{N},$$

where $\gamma \in (0, 1)$ is a confidence level, $\hat{\nu}_{ij} = \sqrt{2\hat{F}_{ij}(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}, \hat{x}_{0,5}^{(ij)})} / \left(\hat{f}_i(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}) + \hat{f}_j(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}) \right)$ is consistent estimate of ν_{ij} , based on the sample containing (X_{ki}, X_{kj}) , $k = \overline{1, N}$, $z_{(1+\gamma)/2}$ is a $((1+\gamma)/2)$ -quantile of the standard normal distribution, $\hat{g}_{ij}(x)$ is a consistent estimate of the density at x .

The method was applied to calculate price of new software for B2B market. There were surveyed $N = 52$ target audience representatives. Some recommendations about pricing were given to the enterprise.

Keywords: Price Sensitivity Meter (PSM); median; asymptotical normality.

DMITRIEV Yurii Glebovich (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia)

E-mail: dmit@mail.tsu.ru

ZENKOVA Zhanna Nikolaevna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia)

E-mail: zhanna.zenkova@mail.tsu.ru

ZENKOV Andrei Gennadievich (National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia)

E-mail: zenkov@tpu.ru

REFERENCES

1. Kotler, P. & Armstrong, G. (2016) *Principles of Marketing*. Prentice-Hall.
2. Korzhov, M.M. & Kuzin, D.A. (2007) Sravnitel'nyy analiz i prakticheskoe primeneniye metodov tsenoobrazovaniya s orientatsiey na spros [Comparative analysis and practical application of demand-driven pricing methods]. *Novosti marketinga*. 4. pp. 9–17.
3. Westendorp, P.H. (1976) NSS – Price Sensitivity Meter (PSM) – A New Approach to Consumer Perception of Prices. *Venice Congress Main Sessions, European Marketing Research Society (ESOMAR)*. Proc. of the ESOMAR Congress. Amsterdam. pp. 139–167.
4. Lipovetsky, S. (2006) Van Westendorp Price Sensitivity in Statistical Modeling. *International Journal of Operations and Quantitative Management*. 12(2). pp. 141–156.
5. Lipovetsky, S., Magnan, S. & Polzi, A.Z. (2011) Pricing Models in Marketing Research. *Intelligent Information Management*. 3. pp. 167–174. DOI: 10.4236/iim.2011.35020

6. Roll, O., Achterberg, L.H. & Herbert, K.G. (2010) Innovative approaches to analyzing the Price Sensitivity Meter: Results of an international comparative study. *COMBI2010 Conf. Proc.* Finland: Vantaa. pp. 181–193.
7. Müller, H. (2009) Empirische Untersuchung zur Messung der Preiswahrnehmung mittels Pricesensitivity-Meter. *Marketing Zeitschrift für Forschung und Praxis*. 3. pp. 171–1826. DOI: 10.15358/0344-1369-2009-3-171
8. Hofmann, T., Lederle, D. & Felsch, M. (2006) Innovative Verfahren der empirischen Preisforschung. *Planung & Analyse*. 6. pp. 28–33. (In German).
9. Wildner, R. (2003) Marktforschung für den Preis. *Jahrbuch der Absatz- und Verbrauchsforschung*. 49(1). pp. 4–26.
10. Nagle, T.T. & Holden, R.K. (1995) *The Strategy and Tactics of Pricing: A Guide of Profitable Decision Making*. 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
11. Kupiec, B. & Revell, B. (2001) Measuring consumer quality judgments. *British Food Journal*. 103(1). pp. 7–22. DOI: 10.1108/00070700110382911
12. Comley, P. (1997) What do we know about Pricing research. *WARC. Admap*. 1.
13. Zhurko, E.S. & Zenkova, Z.N. (2016) Metod tsenoobrazovaniya PSM dlya sluchaya tsenzurirovannykh vyborok malogo ob'ema [PSM pricing method for small-sized censored samples]. In: Loginov, Yu.Yu. (ed.) *Logisticheskie sistemy v global'noy ekonomike* [Logistical systems in global economics]. Krasnoyarsk: M.F. Reshetnev Siberian State University. pp. 152–157 (In Russian).
14. Zhurko, E.S. & Zenkova, Z.N. (2017) [The influence of additional information on the PSM method results]. *Aktual'nye problemy i perspektivy razvitiya gosudarstvennoy statistiki v sovremennykh usloviyakh* [Topical problems and development prospects of state statistics in modern conditions]. Proc. of the Third International Conference. Vol. 2. Saratov: Saratovstat. pp. 66–68. (In Russian).
15. Zhurko, E.S. & Zenkova, Z.N. (2015) PSM pricing method for censored data using quantile. *Nauka. Tekhnologii. Proizvodstvo*. 9(13). pp. 13–16. (In Russian).
16. Zhurko, E.S. & Zenkova, Z.N. (2016) [Modification of PSM pricing method considering predetermined level quantile]. *Informatsionnye tekhnologii Sibiri* [Information Siberian Technology]. Proc. of the International Conference. Kemerovo. pp. 134–136. (In Russian).
17. Zenkova, Z.N., Kopnova, E.E. & Baraksanov, D.N. (2014) [The use of PSM method and Turnbull estimator in determination of new software price]. *Vysokie tekhnologii, fundamental'nye issledovaniya, innovatsii* [High Technology, Basic Research, Innovation]. Proc. of the 17th International Conference. St. Petersburg. pp. 301–305. (In Russian).
18. Zenkova, Z.N. & Krakovetskaya, I.V. (2013) Marketingovoe issledovanie tseny sprosa po interval'nym dannym s privilecheniem informatsii o simmetrii raspredeleniya [Marketing research of demand price for interval-censored data using additional information about symmetry of distribution function]. In: *Vysokie tekhnologii, issledovaniya, finansy* [High technology, research, finance]. Vol. 1. St. Petersburg: St. Petersburg Polytechnic University. pp. 101–104.
19. Zenkova, Z.N. & Krakovetskaya, I.V. (2013) Nonparametric Turnbull estimator for interval-censored data in marketing research of demand on bio-energy drinks. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(24). pp. 64–69. (In Russian).
20. Zenkova, Z.N. & Krakovetskaya, I.V. (2014) Marketing of New Bio-Energy Drinks. In: Grigoriou, N. & Veloutsou, C. (eds) *Theoretical and Empirical Reflections in Marketing*. Greece: Atiner. pp. 179–192.
21. Kovalenko, I.N. & Philippova, A.A. (1982) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Theory of probability and mathematical statistics]. Moscow: Vysshaya shkola.
22. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Tomsk: NTL.
23. Borovkov, A.A. (1997) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Novosibirsk: Nauka.
24. Rosenblatt, M. (1956) Remarks on some nonparametric estimates of a density functions. *Annals of Mathematical Statistics*. 27(3). pp. 832–837. DOI: 10.1214/aoms/1177728190
25. Parzen, E. (1962) On estimation of a probability density function and mode. *Annals of Mathematical Statistics*. 33. pp. 1065–1076. DOI: 10.1214/aoms/1177704472