

МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/61/4

В.Г. Зубчанинов, А.А. Алексеев, В.И. Гультяев, Е.Г. Алексеева

ПРОЦЕССЫ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ КОНСТРУКЦИОННОЙ СТАЛИ ПО ПЯТИЗВЕННОЙ КУСОЧНО-ЛОМОНОЙ ТРАЕКТОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Для верификации математической модели теории процессов проведены численные расчёты сложного упругопластического деформирования стали 45 по пятизвенной кусочно-ломаной траектории. Выполнено сравнение полученных результатов расчета с данными физического эксперимента, проведенного на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ на тонкостенных трубчатых образцах из стали 45. Программа эксперимента реализована в девиаторном пространстве деформаций (жесткое нагружение) при совместном действии на образец осевой силы и крутящего момента. Показано, что используемая математическая модель качественно и количественно удовлетворительно описывает основные эффекты сложного пластического деформирования для рассматриваемого класса траекторий.

Ключевые слова: *пластичность, теория процессов, сложное нагружение, многозвенная ломаная траектория деформирования, моделирование процессов, экспериментальные данные.*

Проведение экспериментальных исследований по непропорциональному упругопластическому деформированию материалов при сложном напряженно-деформированном состоянии (НДС) является важной частью создания новых и верификации существующих математических моделей теории пластичности. Адекватность математической модели определяется её способностью описывать эффекты и закономерности поведения конструкционных материалов, наблюдаемые в физических экспериментах. Результаты большого количества экспериментальных исследований при сложном нагружении материалов и варианты математических теории пластичности частично представлены в работах [1–14].

Основные соотношения предлагаемой в работе математической модели, а также методика проведения экспериментальных исследований базируются на векторном представлении деформаций и напряжений А.А. Ильюшина в рамках теории упругопластических процессов [3, 4], где девиаторам напряжений и деформаций ставятся в соответствие векторы напряжений и деформаций формоизменения. При таком подходе история изменения напряжений и деформаций с течением времени представляется соответствующими траекториями в пятимерных векторных (девиаторных) пространствах. В качестве материалов в теории рассматриваются поликристаллические металлы и сплавы, которые перед нагружением (в начальном состоянии) с достаточной точностью подчиняются постулату изотропии

А.А. Ильюшина [3], что подтверждается многочисленными экспериментами [1, 2, 15–17]. В соответствии с постулатом изотропии связь между напряжениями и деформациями определяется скалярными и векторными свойствами материалов. Скалярные свойства характеризуют связь между инвариантами девиаторов напряжений и деформаций, а векторные свойства – несоосность девиаторов напряжений, деформаций и их приращений.

В настоящей работе представлены данные эксперимента при совместном растяжении и кручении (P – M -опыт) тонкостенного трубчатого образца при его деформировании по сложной плоской траектории, состоящей из пяти прямолинейных участков (звеньев) с различными углами излома. Данная траектория относится к классу многозвенных кусочно-ломаных траекторий и демонстрирует весьма нетривиальную связь между напряжениями и деформациями. Для верификации предлагаемой математической модели теоретические расчёты сравниваются с результатами эксперимента, проведенного авторами на автоматизированном испытательном комплексе на сложное нагружение СН-ЭВМ. Ранее математическая модель была использована для описания процессов деформирования по двузвенной [18] и многозвенной (4 звена) ломаной траектории с одинаковыми углами излома в 135° [14].

1. Основные положения

Тензоры напряжений и деформаций, являющиеся симметричными тензорами второго ранга и характеризующие НДС точки тела, можно разделить на шаровые тензоры и девиаторы [1–4]

$$\mathbf{T}_\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma_0(\delta_{ij}) + \sigma(S_{ij}^*), \quad \mathbf{T}_\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_0(\delta_{ij}) + \mathfrak{E}(\mathfrak{E}_{ij}^*), \quad (1)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $(i, j = 1, 2, 3)$;

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\delta_{ij}, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \quad \mathfrak{E} = \sqrt{\mathfrak{E}_{ij}\mathfrak{E}_{ij}} \quad (2)$$

– модули шаровых тензоров и девиаторов. Компоненты девиаторов напряжений и деформаций имеют вид

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \mathfrak{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0, \quad (3)$$

а компоненты направляющих тензоров

$$S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\sigma}, \quad \mathfrak{E}_{ij}^* = \frac{\mathfrak{E}_{ij}}{\mathfrak{E}}. \quad (4)$$

При простом (пропорциональном) нагружении $(S_{ij}^*) = (\mathfrak{E}_{ij}^*)$, и определяющие соотношения с учетом упругости объемной деформации имеют вид [1–4]

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = \frac{\sigma}{\mathfrak{E}}\mathfrak{E}_{ij} = 2G_p\mathfrak{E}_{ij}, \quad \sigma = \Phi(\mathfrak{E}), \quad (5)$$

где K – модуль объемной упругости, G_p – пластический модуль сдвига, $\Phi(\mathfrak{E})$ – универсальная единая диаграмма деформирования материалов при простом нагружении. Она определяет только скалярные свойства материалов для произвольного НДС. При сложном нагружении направляющие тензоры $(S_{ij}^*) \neq (\mathfrak{E}_{ij}^*)$ и учет в

определяющих соотношения только скалярных свойств материалов недостаточен. Тензорное изложение теории пластичности не позволяет отобразить геометрически наглядно векторные свойства материалов в физическом пространстве, поэтому в работах А.А. Ильюшина [3, 4] тензоры \mathbf{T}_σ и \mathbf{T}_ε представляются в виде векторов в линейном совмещенном евклидовом пространстве E_6 с ортонормированным неподвижным базисом $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}$ в виде

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}^0 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = S_k \hat{\mathbf{i}}_k, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 + \bar{\boldsymbol{\Theta}}, \quad \bar{\boldsymbol{\Theta}} = \Theta_k \hat{\mathbf{i}}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5). \quad (6)$$

Правомерность такого представления подробно рассмотрена в [6]. Здесь $\bar{\mathbf{S}}^0 = S_0 \hat{\mathbf{i}}_0$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 = \Theta_0 \hat{\mathbf{i}}_0$ – векторы напряжений и деформаций в одномерном подпространстве объемного растяжения и сжатия с гидростатической осью, характеризуемой единичным вектором $\hat{\mathbf{i}}_0$; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\Theta}}$ – векторы напряжений и деформаций формоизменения в пятимерном девиаторном подпространстве E_5 . Координаты векторов связаны с компонентами тензоров и девиаторов взаимно-однозначными формулами [1–4]

$$\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{3}\sigma_0, \quad S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, \quad S_2 = \frac{S_{22} - S_{33}}{\sqrt{2}}, \quad S_3 = \sqrt{2}S_{12}, \quad S_4 = \sqrt{2}S_{23}, \quad S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \\ \Theta_0 &= \sqrt{3}\varepsilon_0, \quad \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\Theta_{11}, \quad \Theta_2 = \frac{\Theta_{22} - \Theta_{33}}{\sqrt{2}}, \quad \Theta_3 = \sqrt{2}\Theta_{12}, \quad \Theta_4 = \sqrt{2}\Theta_{23}, \quad \Theta_5 = \sqrt{2}\Theta_{13}. \end{aligned} \quad (7)$$

Модули векторов в пятимерном подпространстве E_5 равны модулям девиаторов напряжений и деформаций соответственно

$$\sigma = \sqrt{S_k S_k} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_k \Theta_k} = \sqrt{\Theta_{ij} \Theta_{ij}}. \quad (8)$$

Общие определяющие соотношения теории процессов получены в работах [1, 2]. Они отражают связь между векторами напряжений $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ и деформаций $\bar{\boldsymbol{\Theta}}$ формоизменения с учетом скалярных и векторных свойств материалов. Для случая плоских траекторий определяющие соотношения в скалярной форме имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{ds} = M_1 \frac{d\Theta_k}{ds} + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \Theta_1 \right) \frac{S_k}{\sigma} & (k = 1, 3), \\ \frac{d\Theta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \Theta_1, \end{cases} \quad (9)$$

где M_1 , $\frac{d\sigma}{ds}$ – функционалы процесса деформирования, зависящие от параметров внутренней геометрии траектории деформации: s – длины дуги траектории деформирования, ее кривизны κ_1 и углов излома; Θ_1 – угол между векторами напряжения и скорости деформации, называемый углом сближения (запаздывания). Этот угол характеризует отклонение $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ от касательной к траектории деформирования в каждой ее точке и отражает влияние векторных свойств материала на процесс деформирования.

2. Математическая модель

В дополнение к определяющим соотношениям (9) в математической модели теории процессов предлагается использовать аппроксимации функционалов [1, 2]

$$\sigma(s) = \Phi(s) + Af_0^p \Omega(\Delta s) - \Delta\sigma_k; \quad (10)$$

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0)f^q, \quad (11)$$

где $\Phi(s)$ – универсальная функция нагружения Одквиста – Ильюшина для процессов, близких к простым, без учета их истории; $\Delta s = s - s_k^T$ – приращение длины дуги траектории после ее излома в некоторой точке K ; $\Delta\sigma_k = \Phi(s_k^T) - \sigma_k^T$ – разница в точках излома между значениями универсальной функции Одквиста – Ильюшина и реальным значением модуля вектора напряжений σ_k^T ; G – модуль сдвига (модуль упругости второго рода); $2G_p = \Phi(s) / s$ – удвоенный пластический модуль при простом нагружении; индекс «нолик» у пластического модуля сдвига соответствует значению G_p в точке излома траектории;

$$\Omega(\Delta s) = -\left[\gamma\Delta s e^{-\gamma\Delta s} + b(1 - e^{-\gamma\Delta s})\right] \quad (12)$$

– функция, описывающая скалярный нырок напряжений, то есть явление уменьшения модуля вектора напряжений, возникающее после излома траектории при сложной разгрузке и последующем вторичном пластическом деформировании материала;

$$f = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}; \quad f_0 = f(\vartheta_1^0) = \frac{1 - \cos \vartheta_1^0}{2} \quad (13)$$

– функция, учитывающая ориентацию вектора напряжений в процессе деформирования и ее значение в точке излома при значении угла сближения ϑ_1^0 каждого из участков неаналитической траектории; A, b, γ, p, q – параметры аппроксимаций, определяемые по существующей методике [14].

Для аппроксимации универсальной функции упрочнения Одквиста – Ильюшина $\Phi(s)$ при простом нагружении использовались выражения [1]

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} \frac{2G}{\alpha} (1 - e^{-\alpha s}), & \text{при } 0 \leq s \leq s^T, \\ \sigma^T + 2G_*(s - s^T) + \sigma_* (1 - e^{-\beta(s - s^T)}), & \text{при } s > s^T, \end{cases} \quad (14)$$

где $\sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$; σ_T – предел текучести при растяжении; s^T – граница участков диаграммы деформирования, разделяющая упругую часть диаграммы и площадку текучести ($0 \leq s \leq s^T$) от участка самоупрочнения материала ($s > s^T$); σ_* , G_* , α , β – материальные параметры, экспериментально определяемые из опытов на простое нагружение.

При заданных начальных условиях для координат \mathcal{E}_k ($k = 1, 3$) вектора деформаций и начальных значениях угла ϑ_1^0 определяющие соотношения (9) с конкретизированными функционалами (10), (11), приводятся к задаче Коши, где заданными являются траектории вектора деформаций, а траектории вектора напряжений можно получить в результате интегрирования определяющих соотношений.

Для численного решения и определения координат S_k ($k = 1, 3$) вектора напряжений и угла сближения ϑ_1 использовался метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности в программе компьютерной алгебры MathWorks MATLAB.

3. Материалы и методика эксперимента

Экспериментальное исследование было выполнено на автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе СН-ЭВМ имени А.А. Ильюшина, реализующем трехпараметрическое воздействие на образец (осевое растяжение-сжатие, кручение и внутреннее давление) в лаборатории кафедры «Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета. Процесс нагружения предполагался изотермическим, а деформации – малыми. В качестве образцов для серии экспериментальных исследований были использованы тонкостенные цилиндрические оболочки из стали 45 в состоянии поставки, имеющие в рабочей части: длину $l = 110$ мм, толщину $h = 1$ мм и радиус срединной поверхности $r = 15.5$ мм. Материал образцов считался однородным и начально изотропным. Начальная изотропия материала образцов с достаточной степенью точности была подтверждена в опытах на простое нагружение (растяжение, сжатие и кручение), где после обработке этих диаграмм были приняты следующие значения материальных параметров для стали 45 в аппроксимации (14): $\sigma^T = 285$ МПа, $s^T = 0.9 \cdot 10^{-2}$, $2G = 1.57 \cdot 10^5$ МПа, $\beta = 70$, $\alpha = 900$, $\sigma_* = 78.8$ МПа, $2G_* = 1618.9$ МПа.

Для определения компонент тензоров деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} в автоматизированном комплексе СН-ЭВМ используются формулы [1, 2]

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta r}{r}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{r\psi}{2l}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \\ \varepsilon_{33} = -(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \frac{\sigma_0}{K}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}); \quad (15)$$

$$\sigma_{11} = \frac{P}{2\pi rh}, \quad \sigma_{22} = q \frac{r}{h}, \quad \sigma_{12} = \frac{M}{2\pi r^2 h}, \quad \sigma_{33} \approx 0, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \\ \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}, \quad (16)$$

где Δl и Δr – приращения l и r ; ψ – угол закручивания поперечного сечения; P – осевая сила; q – внутреннее давление; M – крутящий момент; E – модуль продольной упругости; μ – коэффициент Пуассона. При обработке экспериментальных данных принималось условие несжимаемости ($\varepsilon_0 = 0$), достаточно точное вне упругой области, так как значение μ с появлением пластических деформаций быстро стремилось к 0.5.

Компоненты векторов деформаций и напряжений формоизменения определялись через компоненты тензоров по формулам (7). Для определения угла сближения ϑ_1 использовалось выражение [1]

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sigma \Delta s} [S_1(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1^0) + S_3(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_3^0)], \quad (17)$$

где \mathcal{E}_1^0 , \mathcal{E}_3^0 – значения \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_3 в начале каждого участка траектории.

Программа эксперимента (рис. 1) реализована в девиаторном пространстве деформаций $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ (жесткое нагружение, в котором координаты вектора деформаций изменялись по заданным зависимостям), и представляет плоскую кусочно-ломаную траекторию, состоящую из пяти прямолинейных участков (звеньев).

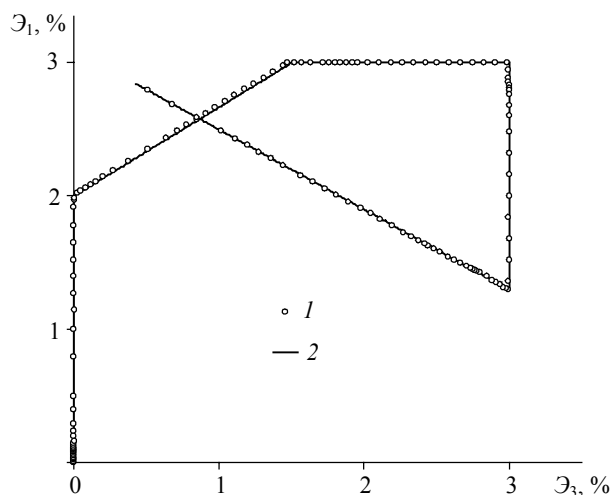


Рис. 1. Траектория деформирования на плоскости $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$:

1 – экспериментальные данные; 2 – модельные данные

Fig. 1. Strain path on the plane $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$; 1, experimental data and 2, calculated results

На первом участке реализовывалось пропорциональное растяжение по компоненте \mathcal{E}_1 до значения $\mathcal{E}_1^* = 2\%$; на втором участке при изломе траектории на угол 56.3° реализовывалось комбинированное растяжение и кручение до значений $\mathcal{E}_1^* = 3\%$, $\mathcal{E}_3^* = 1.5\%$; на третьем участке с изломом на угол 33.7° при $\mathcal{E}_1^* = 3\% = \text{const}$ осуществлялось кручение до значения $\mathcal{E}_3^* = 3\%$; на четвертом участке при ортогональном изломе траектории и $\mathcal{E}_3^* = 3\% = \text{const}$ осуществлялось сжатие до значения $\mathcal{E}_1^* = 1.3\%$; на последнем пятом участке с углом излома 121° реализовывалось комбинированное растяжение с кручением до значения компонент $\mathcal{E}_1^* \approx 2.84$ и $\mathcal{E}_3^* = 0.43\%$.

4. Результаты физического и численного экспериментов

На рис. 2 приведен отклик на реализованную траекторию деформирования в виде траектории нагружения в плоскости $S_1 - S_3$ совмещенного девиаторного подпространства E_5 . На рис. 3 и 4 приведены результаты расчета и экспериментальные данные для диаграмм $\sigma - s$ и $\sigma - \mathcal{E}$, характеризующих скалярные свойства материалов, на рис. 5 – диаграмма $\mathcal{E}_1 - s$, характеризующая векторные свойства материалов. На рис. 6 и 7 приведены локальные диаграммы деформирования растяжения-сжатия по компонентам $S_1 - \mathcal{E}_1$ и чистого сдвига по компонентам $S_3 - \mathcal{E}_3$. Экспериментальные данные на рис. 1–7 отмечены точками (кружочки); модельные расчетные данные – сплошными кривыми.

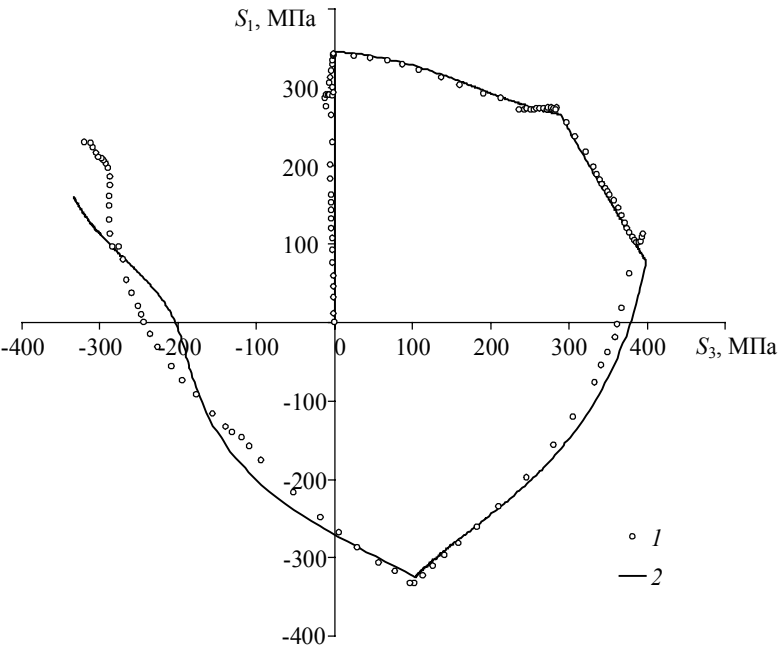


Рис. 2. Отклик по напряжениям на плоскости $S_1 - S_3$:
1 – экспериментальные данные; 2 – модельные данные
Fig. 2. Stress response on the plane $S_1 - S_3$:
1, experimental data and 2, calculated results

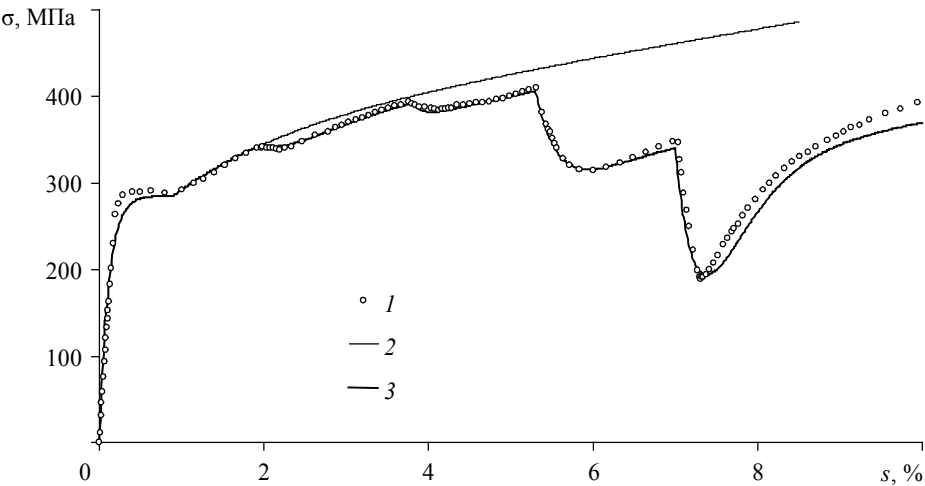


Рис. 3. Диаграмма деформирования $\sigma - s$:
1 – экспериментальные данные; 2 – $\sigma = \Phi(s)$; 3 – модельные данные
Fig. 3. Stress-strain curve $\sigma - s$:
1, experimental data, 2, $\sigma = \Phi(s)$, and 3, calculated results

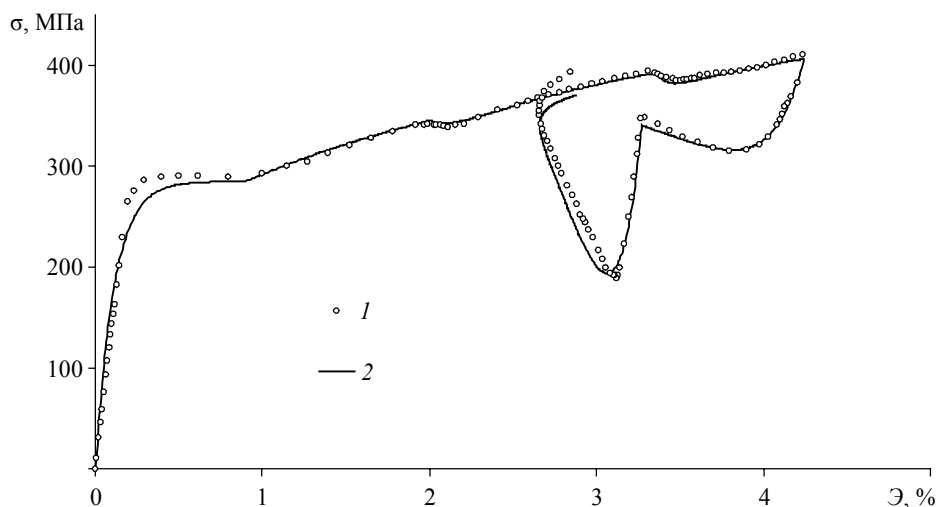


Рис. 4. Диаграмма деформирования $\sigma - \varepsilon$:
1 – экспериментальные данные; 2 – модельные данные

Fig. 4. Stress-strain curve $\sigma - \varepsilon$:
1, experimental data and 2, calculated results

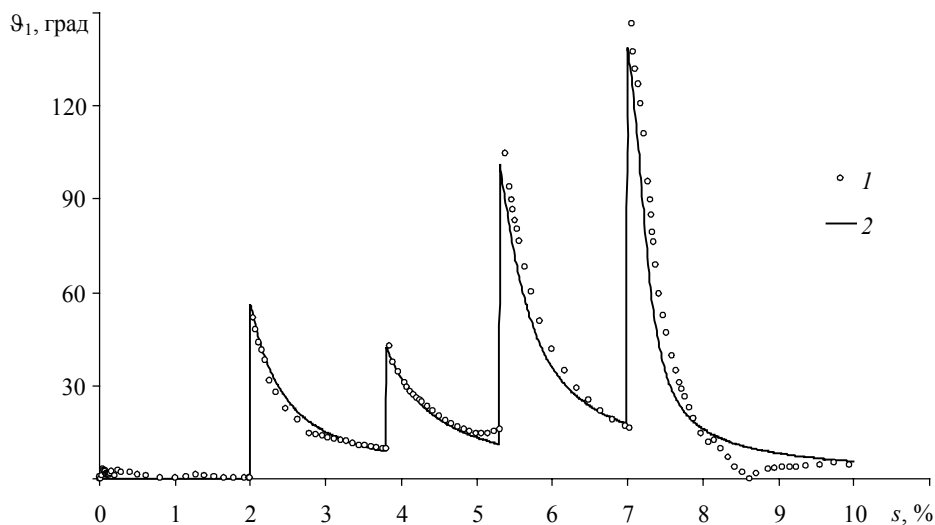


Рис. 5. Диаграмма характеристики векторных свойств материала $\theta_1 - s$:
1 – экспериментальные данные; 2 – модельные данные

Fig. 5. Diagram for characteristics of the vector material properties $\theta_1 - s$:
1, experimental data and 2, calculated results

В расчете использовались параметры аппроксимаций в формулах (10) – (12), значения которых были определены по методике, предложенной в [14]. Эти значения представлены в таблице.

№ участка	b	A , МПа	γ	p	q
2	0.28	504.63	250.6	2	0.5
3	1.45	139.53	468.15	1	0.5
4	1.05	305.11	255.88	1.8	0.7
5	0.05	580.84	261.35	1.5	0.5

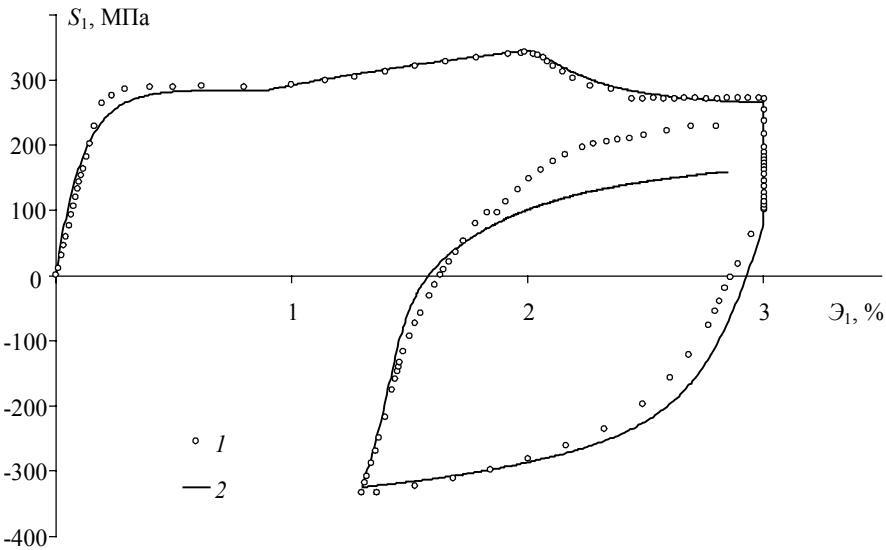


Рис. 6. Локальная диаграмма деформирования $S_1 - \epsilon_1$:
1 – экспериментальные данные; 2 – модельные данные
Fig. 6. Local stress-strain curve $S_1 - \epsilon_1$:
1, experimental data and 2, calculated results

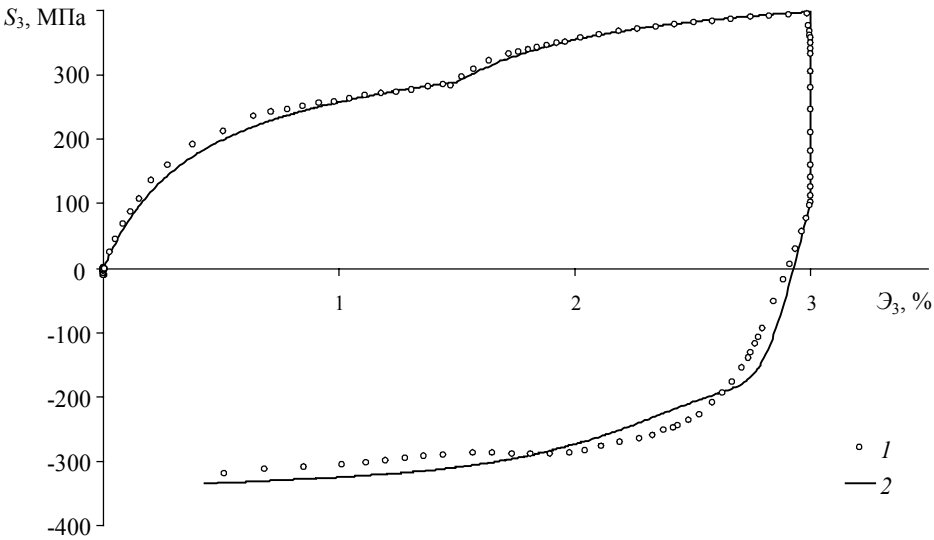


Рис. 7. Локальная диаграмма деформирования $S_3 - \epsilon_3$:
1 – экспериментальные данные; 2 – модельные данные
Fig. 7. Local stress-strain curve $S_3 - \epsilon_3$:
1, experimental data and 2, calculated results

В работе [14] отмечается, что начальное отклонение ϑ_1^0 вектора напряжений не всегда равно углу излома траектории θ . Например, для двузвенных ломаных, при реализации на первом звене простого (пропорционального) нагружения, перед точкой излома направление вектора напряжений совпадает с касательной к траектории деформирования с достаточной точностью, и в этом случае $\vartheta_1^0 = \theta$. В случае изломов, реализуемых после предварительного сложного нагружения при численном моделировании это обстоятельство учитывалось в виде начального условия для участка траектории $\vartheta_1^0 = \theta \pm \vartheta_1^k$, где ϑ_1^k – расчетное значение угла сближения в конце предшествующего участка перед изломом траектории. Знак плюс или минус определяется направлением излома по отношению к имеющемуся отклонению вектора напряжений. В реализованной траектории все изломы производились в сторону, противоположную отклонению вектора напряжений, то есть угол ϑ_1^0 увеличивается. В начале третьего участка (второй излом) принималось $\vartheta_1^0 = 33.7^\circ + 8.9^\circ = 42.6^\circ$; в начале четвертого участка (третий излом) принималось $\vartheta_1^0 = 90^\circ + 11.2^\circ = 101.2^\circ$; а в начале пятого участка (четвертый излом) – $\vartheta_1^0 = 121^\circ + 17.5^\circ = 138.5^\circ$.

Как видно, принятые для модели данные качественно, и с приемлемой точностью для практических расчетов количественно, соответствуют данным эксперимента по скалярным свойствам и смогли достаточно адекватно описать нырки напряжений (рис. 3 и 4), наблюдаемые после изломов траектории деформирования на различные по величине углы. Также наблюдается (рис. 5) хорошее соответствие расчетной и экспериментальных кривых векторных свойств материала, что говорит о правильности моделирования процесса сложного упругопластического деформирования материала.

Заключение

Проведенная верификация математической модели теории процессов путём сопоставления результата численного моделирования с данными физического эксперимента при упругопластическом деформировании материала сталь 45 по плоской пятизвенной кусочно-ломаной траектории подтверждает правильность моделирования процесса сложного нагружения материала для данного класса траекторий деформирования. Это показывает достаточную для практических задач точность построенных аппроксимаций функционалов процессов используемой математической модели теории процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
2. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность. М.: Физматлит, 2008. 336 с.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
5. Дегтярев В.П. Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1967. 131 с.

6. Зубчанинов В.Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроscopicкой определенности и изотропии А.А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2018. № 5 С. 29–46. DOI: 10.3103/S0027133018050011.
7. Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 1: условия математической корректности и методы решения краевых задач // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 6. С. 61–68. DOI: 10.3103/S0025654415060060.
8. Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 110–135. DOI: 10.3103/S0025654416010106.
9. Волков И.А., Игумнов Л.А., Тарасов И.С., Шишулин Д.Н., Маркова М.Т. Моделирование сложного пластического деформирования поликристаллических конструкционных сплавов по плоским и пространственным траекториям произвольной кривизны // Проблемы прочности и пластичности. 2018. Т. 80. № 2. С. 194–208. DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-2-194-208.
10. Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А. и др. Прикладная теория пластичности. М.: Физматлит, 2015. 284 с.
11. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Алексеева Е.Г. Математическое моделирование процессов пластического деформирования материалов по сложным плоским траекториям // Materials Physics and Mechanics (MPM). 2015. V. 24. No. 2. P. 107–118.
12. Зубчанинов В.Г. Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 27–37. DOI: 10.3103/S0025654411010043.
13. Муравлев А.В. Экспериментальное построение функционалов пластичности для траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных в опытах на сплошных цилиндрических областях // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1996. № 5. С. 74–80.
14. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гуляев В.И. Моделирование процессов упругопластического деформирования материалов по многозвенным кусочно-ломаным прямолинейным траекториям // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 3. С. 203–215. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.12.
15. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gulyaev V.I. On drawing the yield surface for steel 45 and verifying the postulate of isotropy on straight-line paths under repeated sign-variable loadings. PNRPU Mechanics Bulletin. 2018. No. 1-2. P. 23–28. DOI: 10.15593/perm.mech/eng.2018.1.03.
16. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Alekseeva E.G., Gultiaev V.I. Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories. Materials Physics and Mechanics. 2017. V. 32. No 3. P. 298–304. DOI: 10.18720/MPM.3232017_10.
17. Ленский В.С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 58–82.
18. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гуляев В.И. Численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования стали по двухзвенным ломаным траекториям // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегород. ун-т, 2014. Вып. 76. Ч. 1. С. 18–25. DOI: 10.32326/1814-9146-2014-76-1-18-25.

Статья поступила 10.12.2018 г.

Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gul'tyaev V.I., Alekseeva E.G. (2019) THE PROCESSES OF A COMPLEX LOADING OF STRUCTURAL STEEL IN A FIVE-LINK PIECEWISE POLYGONAL STRAIN PATH *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 32–44

DOI 10.17223/19988621/61/4

Keywords: plasticity, theory of elastoplastic processes, complex loading, multi-link polygonal strain path, modeling of processes, experimental data.

The paper proposes a mathematical model of the theory of elastoplastic processes for the variety of strain paths such as multi-link straight-line polygonal paths. The constitutive equations of the proposed mathematical model, as well as the methodology of experimental studies, are based on the vector representation of the strain and stress proposed by Ilyushin. In the mathematical model, the approximations of the functional are used, which depend on all parameters of the inner geometry of the strain path. The governing equations of the mathematical model are reduced to the Cauchy problem. A numerical solution to the latter and the calculated results are obtained using the fourth-order Runge-Kutta method.

The experimental data on the complex loading (combined tension-compression and torsion) of a thin-walled tubular sample made of steel 45 according to a deformation program consisting of five straight sections with different break angles of the strain path are presented. The vector and scalar properties of the material are studied.

A mathematical model of the theory of elastoplastic processes is verified by comparing the calculated results with the data of a physical experiment. It is shown that the applied mathematical model gives a qualitatively and quantitatively satisfactory description of the main effects of a complex plastic straining for the variety of strain paths such as multi-link polygonal strain paths.

ZUBCHANINOV Vladimir Georgievich (Doctor of Technical Sciences, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation). E-mail: vlgzub@gmail.com

ALEKSEEV Andrey Alekseevich (Candidate of Technical Sciences, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation). E-mail: alexeev@bk.ru

GUL'TYAEV Vadim Ivanovich (Doctor of Technical Sciences, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation). E-mail: vig0@mail.ru

ALEKSEEVA Elena Gennad'evna (Candidate of Technical Sciences, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: super_aeg@mail.ru

REFERENCES

1. Zubchaninov V.G. (2010) *Mekhanika protsessov plasticheskikh sred* [Mechanics of the processes in plastic media]. Moscow: Fizmatlit.
2. Zubchaninov V.G. (2010) *Ustoychivost' i plastichnost'. T. 2. Plastichnost'* [Stability and plasticity. Vol. 2. Plasticity]. Moscow: Fizmatlit.
3. Ilyushin A.A. (1963) *Plastichnost'. Osnovy obshchey matematicheskoy teorii* [Plasticity. Fundamentals of general mathematical theory]. Moscow: Izdatel'stvo AN SSSR.
4. Ilyushin A.A. (1990) *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. Moscow: Izdatel'stvo MGU.
5. Degtyarev V.P. (1967) *Plastichnost' i polzuchest' v mashinostroitel'nykh konstruktsiyakh* [Plasticity and creep of engineering structures]. Moscow: Mashinostroyeniye.
6. Zubchaninov V.G. (2018) The general mathematical theory of plasticity and the Il'yushin postulates of macroscopic definability and isotropy. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 73(5). pp. 101–116. DOI: 10.3103/S0027133018050011.
7. Peleshko V.A. (2015) Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading. Part 1: Conditions of mathematical well-posedness and

- methods for solving boundary value problems. *Mechanics of Solids*. 50(6). pp. 650–656. DOI: 10.3103/S0025654415060060.
8. Peleshko V.A. (2016) Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading part 2: Identification and verification. *Mechanics of Solids*. 51(1). pp. 91–113. DOI: 10.3103/S0025654416010106.
 9. Volkov I.A., Igumnov L.A., Tarasov I.S., Shishulin D.N., Markova M.T. (2018) Modelirovanie slozhnogo plasticheskogo deformirovaniya polikristallicheskih konstruktivnykh splavov po ploskim i prostranstvennym traektoriyam proizvol'noy krivizny [Modeling complex plastic deformation of polycrystalline structural alloys along plane and spatial trajectories of arbitrary curvature]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*. 80(2). pp. 194–208. DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-2-194-208.
 10. Mitenkov F.M., Volkov I.A., Igumnov L.A., Kaplienkov A.V., Korotkikh Yu.G., Panov V.A. (2015) *Prikladnaya teoriya plastichnosti* [Applied theory of plasticity]. Moscow: Fizmatlit.
 11. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Alekseeva E.G. (2015) Mathematical modeling of plastic deformation of materials on complex flat trajectories. *Materials Physics and Mechanics*. 24(2). pp. 107–118.
 12. Zubchaninov V.G. (2011) Isotropy postulate and the law of complex unloading of continua. *Mechanics of Solids*. 46(1). pp. 21–29. DOI: 10.3103/S0025654411010043.
 13. Muravlev A.V. (1996) Eksperimental'noe postroenie funktsionalov plastichnosti dlya traektoriy deformatsiy tipa dvukhzhvennykh lomanykh v opytakh na sploshnykh tsilindricheskikh oblastiakh [Experimental construction of plasticity functional for a two-link polygonal strain path in the experiments for cylindrical continuous areas]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya I: Matematika. Mekhanika*. 5. pp. 74–80.
 14. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I. (2017) Modelirovanie protsessov uprugoplasticheskogo deformirovaniya materialov po mnogozhvennym kusochno-lomanyim pryamolinейnym traektoriyam [Modeling of elastic-plastic deformation of work material along multi-element piecewise zig-zag linear trajectories]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 3. pp. 203–215. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.12.
 15. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I. (2018) On drawing the yield surface for steel 45 and verifying the postulate of isotropy on straight-line paths under repeated sign-variable loadings. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 1-2. pp. 23–28. DOI: 10.15593/perm.mech/eng.2018.1.03.
 16. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Alekseeva E.G., Gultiaev V.I. (2017) Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories. *Materials Physics and Mechanics*. 32(3). pp. 298–304. DOI: 10.18720/MPM.3232017_10.
 17. Lenskiy V.S. (1961) *Eksperimental'naya proverka osnovnykh postulatov obshchey teorii uprugoplasticheskikh deformatsiy* [Experimental verification of the fundamental postulates of general theory of elastoplastic deformations]. Moscow: Izdatel'stvo AN SSSR.
 18. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I. (2014) Chislennoe modelirovanie protsessov slozhnogo uprugoplasticheskogo deformirovaniya stali po dvuzhvennym lomanyim traektoriyam [Numerical simulation a processes of complex elastoplastic deformation steel on two-link broken trajectories]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*. 76(1). pp. 18–25. DOI: 10.32326/1814-9146-2014-76-1-18-25.

Received: December 10, 2018