

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/61/5

Д.А. Иваницhev

## МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ В РЕШЕНИИ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ С МАССОВЫМИ СИЛАМИ<sup>1</sup>

Сформулирован подход на основе метода граничных состояний, позволяющий определить напряженно-деформированное состояние для анизотропных тел вращения с заданными на границе перемещениями и находящимися под действием массовых сил. Особенность решения состоит в том, что след искомого упругого поля удовлетворяет одновременно заданным граничным условиям и условиям внутри области (массовым силам), а не представляет собой сумму решений частных задач.

**Ключевые слова:** *метод граничных состояний, анизотропия, массовые силы, краевые задачи, вторая основная задача, пространство состояний, анизотропный цилиндр.*

Современные материалы, такие, как эластомеры, поликристаллические металлы, керамика, а также композитные материалы, применяемые в конструкциях, механизмах и машинах, часто пребывают в сложных кинематических условиях. Данные материалы обладают значительной анизотропией в отношении упругих свойств. На тела, находящиеся в таких условиях, действуют массовые силы, а на перемещения точек границы наложены ограничения. Определение напряженно-деформированного состояния (НДС) от совокупности таких воздействий в силу сложной физической природы материалов составляет актуальную научную задачу.

В механике объемные или массовые силы рассматривались в задачах разного направления. Например, в работе [1] построено численно-аналитическое решение плоской задачи теории упругости с использованием метода взвешенных невязок в форме метода граничного решения. Найдено распределения напряжений и смещений в упругом теле, подверженном действию заданной системы объемных сил и заданных напряжений или смещений на границах. В работе [2] исследовались вынужденные деформации в виде суммы воздействий поверхностных и объемных сил. В работе [3], используя фиктивные расчетные схемы, основанные на эквивалентности воздействий в механике деформируемого твердого тела, получены напряженно-деформированные состояния для балки на двух опорах, находящейся под действием массовых сил; вращающегося тонкого круглого диска; плотины треугольного поперечного сечения, находящейся под действием объемных фильтрационных сил. Авторы работы [4] рассматривали задачи теории упругости с заданными объемными и поверхностными силами в функциональных энергетических пространствах тензоров напряжений и деформаций. Методом ортогональных проекций решены конкретные задачи. Объемные силы рассматривались и в механике разрушения [5]; дается решение задачи о зарождении трещин в метал-

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 "p\_a".

лическом круговом диске под действием объемных сил. В работе [6] для перемещений получено условие эквивалентности поверхностных и объемных сил при использовании вариационного уравнения Лагранжа. Авторами работы [7] было построено поле перемещений для изотропного упругого тела, ограниченного концентрическими сферами и находящегося под действием осесимметричных нестационарных объемных сил. Автором [8] получены точные аналитические решения задач о равновесии толстостенных трансверсально-изотропных составных сфер с жестко закрепленной или закрепленной только в радиальном направлении внешней поверхности, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления.

В работах [9, 10] редуцирован обратный метод определения напряженно-деформированного состояния изотропных упругих тел от действия непрерывных непотенциальных объемных сил. Метод граничных состояний (МГС) с участием объемных сил для изотропной среды применен в работе [11]. А в работе [12] продемонстрирован прием включения в круг расчетных вопросов МГС объемных сил, составляющих линейную комбинацию «эталонных» воздействий на односвязное ограниченное тело. В работе [13] разработана методика получения полнопараметрических решений для анизотропных тел, где возникновение фиктивных массовых сил являлось следствием применения метода Пуанкаре. Методом граничных состояний вопрос кручения анизотропных стержней сложного сечения исследовался в работе [14]. Этот метод оперирует понятием внутренней энергии упругой деформации. С помощью метода минимизации полной энергии деформации в работе [15] решена задача по определению напряженно-деформированного состояния, возникающего при осадке жесткопластической тонкой квадратной заготовки. Авторами [16] представлено решение уравнения Лапласа в осесимметричных областях с осесимметричными граничными условиями с помощью непрямого метода граничных элементов рассмотрено в работе. В работе [17] рассмотрены контактные задачи для трансверсально-изотропного цилиндра в условиях одновременного действия массовых сил и условий на границе.

В рамках настоящей работы предполагается применение энергетического метода граничных состояний для решения осесимметричной второй основной задачи теории упругости с массовыми силами для трансверсально-изотропных тел вращения. Особенность искомого упругого поля состоит в том, что его след одновременно удовлетворяет заданным условиям на границе и внутри области, т.е. массовым силам, а не представляет собой сумму отдельных полей в задаче эластостатики и в задаче от действия массовых сил.

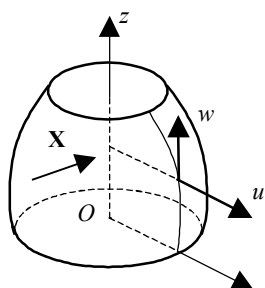


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения  
Fig. 1. A transversely isotropic body of revolution

## 1. Постановка задачи

Рассматривается трансверсально-изотропное тело, ограниченное одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения с заданными перемещениями точек границы  $\mathbf{u} = \{u, w\}$  и массовыми силами  $\mathbf{X} = \{R, Z\}$ , симметричными относительно оси вращения (рис. 1).

Решение поставленной задачи можно провести простым путем: сначала решить краевую задачу механики в зависимости заданных на границе перемещений [18], затем отдельно решить задачу по определению упругого состояния под действием массо-

вых сил и полученные поля характеристик напряженно-деформированного состояния сложить. Однако в этом случае сложно проводить анализ полученного результата исходя из теорий прочности и жесткости, возникает необходимость дискретно корректировать граничные условия в краевой задаче, что составляет непростую и трудоемкую задачу, особенно если граница тела частично или полностью закреплена. Например, естественно, что напряжения внутри тела, находящегося, например, под действием сил инерции со свободной границей, отличаются от напряжений в том же теле с закрепленной границей, вопрос состоит в том, каким образом происходит это перераспределение.

Целью работы является создание подхода на основе метода граничных состояний, позволяющего получить заданное перераспределение напряжений, деформаций и перемещений.

## 2. Определяющие соотношения для среды

Для однородной трансверсально-изотропной среды в цилиндрических координатах имеют место следующие соотношения [19]:

Дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрической системе координат  $z, r, \theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} + Z &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + Q &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $R, Z, Q$  – массовые силы.

Соотношения Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Обобщенный закон Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)]; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z; \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G_z} \tau_{zr}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_r)}{E_r} \tau_{r\theta}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $E_z$  и  $E_r$  – модули упругости соответственно в направлении оси  $z$  и в плоскости изотропии;  $\nu_z$  – коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль  $r$  при растяжении вдоль оси  $z$ ;  $\nu_r$  – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскостях изотропии при растяжении в этих же плоскостях;  $G_r$  и  $G_z$  – модуль сдвига в плоскостях изотропии и перпендикулярных к ним.

### 3. Задача эластостатики

С помощью метода интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженным и деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела и определенными вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат  $z$  и  $y$  (переменных) [19].

В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация, возникающая в цилиндрах бесконечной длины, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости  $zy$  (направление  $\eta \perp$  плоскости  $zy$ ):

$$\begin{aligned}\sigma_z^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_1^2 \phi_1'(\zeta_1) + \gamma_2^2 \phi_2'(\zeta_2)]; \\ \sigma_y^{pl} &= \operatorname{Re}[\phi_1'(\zeta_1) + \phi_2'(\zeta_2)]; \\ \sigma_{zy}^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_1 \phi_1'(\zeta_1) + \gamma_2 \phi_2'(\zeta_2)]; \\ \sigma_\eta^{pl} &= \nu_r \sigma_y^{pl} + \nu_z \frac{E_r}{E_z} \sigma_z^{pl}; \quad \tau_{z\theta} = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0; \\ u_z^{pl} &= \operatorname{Re}[p_1 \phi_1(\zeta_1) + p_2 \phi_2(\zeta_2)]; \\ u_y^{pl} &= \operatorname{Re}[iq_1 \phi_1(\zeta_1) + iq_2 \phi_2(\zeta_2)],\end{aligned}\tag{4}$$

где константы  $q_1$  и  $p_1$  определены упругими параметрами материала,  $\zeta_j = z/\gamma_j + iy$ ,  $\gamma_j$  – комплексные корни характеристического уравнения, функции  $\phi_j(\zeta_j)$  – аналитические по своим переменным.

Переход к осесимметричному пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по зависимостям [18]

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_z^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{zr} = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{zy}^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{z\theta} = \sigma_{r\theta}; \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl})(2y^2 - r^2)}{r^2 \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \\ \sigma_r + \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} + \sigma_\eta^{pl})}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \\ u &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_y^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad w = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_z^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy, \quad v = 0.\end{aligned}\tag{5}$$

#### 4. Метод решения

Для решения поставленной задачи прибегнем к понятиям метода граничных состояний (МГС) [20]. Основу метода составляют пространства внутренних  $\Xi$  и граничных  $\Gamma$  состояний:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \quad \Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}. \quad (6)$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений:

$$\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\}. \quad (7)$$

Воспользуемся при построении решения основных задач механики уравнением Клапейрона [21]:

$$\int_V \mathbf{X} \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{P}_v \mathbf{u}_v dS - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 0. \quad (8)$$

Придавая перемещениям возможные вариации  $\delta \mathbf{u}$ , последнее уравнение преобразуется в вариационное уравнение Лагранжа [21].

Скалярное произведение в пространстве  $\Xi$  внутренних состояний выражается через внутреннюю энергию упругого деформирования (отсюда и принадлежность метода к классу энергетических). Например, для 1-го и 2-го внутренних состояний тела, занимающего область  $V$ :

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV, \quad (9)$$

причем в силу тождества Бетти:

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV = \int_V \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 dV.$$

Граничное состояние  $\gamma_k$ , в зависимости от традиционного  $\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k\}$ , определяемого в [20], будем формировать наборами компонент вектора перемещения точек границы  $u_{vi}$ , поверхностными усилиями  $p_i$  и массовыми силами  $X_i$  (последнее условно в силу того, что массовые силы не относятся к элементу поверхности тела):

$$\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k, X_i^k\}, \quad p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j, \quad (10)$$

где  $n_j$  – компонента нормали к границе.

В пространстве граничных состояний  $\Gamma$ , согласно (8), скалярное произведение выражает работу внешних сил по поверхности тела  $S$  и работу массовых сил на перемещениях  $u_i$  внутренних точек тела:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV,$$

причем свойство коммутативности выполняется:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV = \int_S p_i^2 u_{vi}^1 dS + \int_V X_i^2 u_i^1 dV.$$

В случае гладкой границы и в силу (8) оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом. По определению, каждому элементу

$\xi_k \in \Xi$  соответствует единственный элемент  $\gamma_k \in \Gamma$ , причем это соответствие взаимно-однозначное:  $\xi_k \leftrightarrow \gamma_k$ . Это позволяет поиски внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от граничных условий (ГУ).

Ортонормирование базиса пространства  $\Xi$  осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [22], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимается (9).

Проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье и разложению искомым внутреннего  $\xi$  и граничного  $\gamma$  состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k, \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k$$

или в развернутом виде

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k; \quad u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k; \quad X_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_i^k. \quad (11)$$

В случае второй основной задачи заданы массовые силы  $\mathbf{X} = \{R, Z\}$  и перемещения точек границы тела  $\mathbf{u}_v = \{u_v, w_v\}$ .

Ортонормированность базиса граничных состояний позволяет для его элементов записать

$$\int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS + \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS = 2\delta_{ij}, \quad (12)$$

причем

$$\int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS = - \left[ \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS \right], \quad i \neq j.$$

Заменяя в (12) базисные характеристики  $\mathbf{X}^j$ ,  $\mathbf{u}_v^j$  заданными  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{u}_v$  и осуществляя перебор по индексу  $j$ , образуем матрицы коэффициентов:

$$\beta_{ij} = \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS; \quad \mathbf{B} = [\beta_{ij}]_{N \times N}; \quad (13)$$

$$\alpha_j = \int_V \mathbf{X} \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v dS; \quad \mathbf{A} = [\alpha_j]_N,$$

где  $\mathbf{u}^j$  – вектор перемещения в  $j$ -м элементе базиса внутренних состояний (7);  $\mathbf{X}^i$  – вектор массовых сил в  $i$ -м элементе базиса граничных состояний (10);  $\mathbf{p}_v^j$ ,  $\mathbf{u}_v^i$  – вектор усилий и перемещений на границе тела в элементах базиса граничных (10) состояний.

Следует отметить, что матрица  $\mathbf{B}$  является кососимметричной ( $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$ ,  $i \neq j$ ).

Коэффициенты Фурье  $c = \{c_k\}_N$  рассчитываются так:

$$c = \{c_k\}_N = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}, \quad (14)$$

где  $N$  – число используемых элементов базиса.

Окончательно решение имеет вид (11).

### 5. Формирование базиса

Основной сложностью формирования решения в МГС является конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды. Также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

В работе [9] изложена методика определения напряженно-деформированного состояния изотропных тел от объемных сил.

Для построения поля перемещений от массовых сил для плоских вспомогательных состояний применяется фундаментальная ортонормированная система многочленов  $y^\alpha z^\beta$ , которую можно поместить в любую позицию вектора перемещения  $\mathbf{u}^{pl}(y, z)$ , образуя некоторое допустимое упругое плоское вспомогательное состояние:

$$\mathbf{u}^{pl} = \left\{ \left\{ y^\alpha z^\beta, 0 \right\}, \left\{ 0, y^\alpha z^\beta \right\} \right\}.$$

Перебор всевозможных вариантов в пределах  $\alpha + \beta \leq n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) позволяет получить множество состояний. Далее по формулам (5) определяются компоненты вектора перемещения  $\mathbf{u}(r, z)$  пространственного осесимметричного состояния и по цепочке (2), (3), (1) определяются соответствующие тензоры деформаций, напряжений и массовые силы, образуя конечномерный базис в задаче от массовых сил:

$$\Xi^X = \left\{ \xi_1^X, \xi_2^X, \xi_3^X, \dots, \xi_k^X, \dots \right\}.$$

Базисные наборы в задаче эластостатики можно конструировать, генерируя возможные варианты для двух аналитических функций  $\varphi_1(\zeta_1)$  и  $\varphi_2(\zeta_2)$  плоского вспомогательного состояния (4).

Базисные наборы плоских вспомогательных состояний в этом случае генерируются согласно

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\zeta_1) \\ \varphi_2(\zeta_2) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \zeta_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\zeta_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i\zeta_2^n \end{pmatrix}, \dots \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Далее определяются все механические характеристики плоского вспомогательного состояния, и затем следует переход к трехмерному состоянию по зависимостям (5), образуя конечномерный базис в задаче эластостатики:

$$\Xi^S = \left\{ \xi_1^S, \xi_2^S, \xi_3^S, \dots, \xi_k^S, \dots \right\}.$$

Результирующий базис (6) представляет собой объединение:

$$\Xi = \left\{ \xi_1^S, \xi_2^X, \xi_3^S, \xi_4^X, \dots, \xi_{k-1}^S, \xi_k^X, \dots \right\}. \quad (15)$$

Окончательный базис представляет собой объединение двух базисов в силу того, что перемещения, задаваемые на границе тела, могут вызывать одновременно как «уравновешенные» так и «неуравновешенные» (удовлетворяющие уравнению равновесия с массовыми силами) напряжения и после восстановления последних потребуются наличие «уравновешенных» элементов, в противном случае будет наблюдаться расхожимость решения. Окончательный базис граничных состояний редуцируется из (15).

6. Решение задачи для цилиндра

Апробацию предложенной методики проведем на исследовании упругого состояния трансверсально-изотропного кругового в плане цилиндра из горной породы алевролита крупного темно-серого [21]. После процедуры обезразмеривания, аналогия которой приведена в работе [23], упругие характеристики материала:  $E_z = 6.21$ ;  $E_r = 5.68$ ;  $G_z = 2.55$ ;  $\nu_z = 0.22$ ;  $\nu_r = 0.24$  и цилиндр занимает область  $V = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, -2 \leq z \leq 2\}$  (рис. 2).

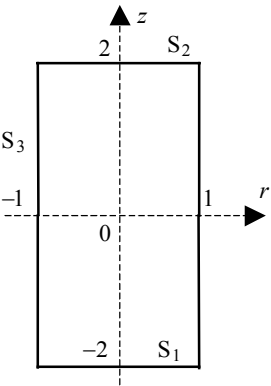


Рис. 2. Меридианное сечение тела вращения  
Fig. 2. A meridian section of the body of revolution

Цилиндр находится под действием массовых сил  $\mathbf{X} = \{r, z^3\}$ , граница защемлена  $\mathbf{u}_v = 0$ . После процедуры ортонормирования и исключения линейно-зависимых элементов, базисный набор для компонент вектора перемещения представлен в табл. 1 (показано 9 элементов).

Т а б л и ц а 1

Перемещения ортонормированного базиса

	$u$	$w$
$\xi_1$	0	$0.26389z$
$\xi_2$	$0.18528r$	$-0.10429z$
$\xi_3$	0	$0.11427z^2$
$\xi_4$	$0.14435rz$	$0.06455r^2 - 0.04062z^2$
$\xi_5$	$0.07007rz$	$-0.31671r^2 - 0.01972z^2$
$\xi_6$	$-0.09006r - 0.02311r^3 + 0.08488rz^2$	$0.18204z + 0.08488r^2z - 0.05612z^3$
$\xi_7$	$-0.05853r - 0.01502r^3 + 0.05516rz^2$	$-0.23356z + 0.05516r^2z + 0.05149z^3$
$\xi_8$	$0.19119r - 0.03733r^3 - 0.11539rz^2$	$-0.2256z + 0.278r^2z + 0.02165z^3$
$\xi_9$	$-0.23702r + 0.23608r^3 + 0.00071rz^2$	$-0.01291z + 0.0269r^2z - 0.000133z^3$



Усеченная до  $N = 8$  матрица коэффициентов  $\beta_{ij}$  представлена в табл. 2 ( $i$  определяется по строке,  $j$  – по столбцу).

Таблица 2

Матрица коэффициентов  $\beta_{ij}$ 

1	0	0	0	0	0	-2.666	-1.167	-0.198	0
0	1	0	0	0	0	1.054	0.461	-2.255	0
0	0	1	-0.496	0.269	0	0	0	0	0.404
0	0	0.496	1	-0.641	0	0	0	0	-0.032
0	0	-0.269	0.641	1	0	0	0	0	-0.504
0	0	0	0	0	1	-0.907	-0.391	-0.164	0
2.666	-1.054	0	0	0	0.907	1	0.014	0.001	0
1.167	-0.461	0	0	0	0.397	-0.014	1	-0.129	0
0.198	2.255	0	0	0	0.164	-0.001	0.129	1	0
0	0	-0.404	0.032	0.504	0	0	0	0	1

При решении использовался базис в 55 элементов. На рис. 3 приведен график, иллюстрирующий «насыщение» суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя). Это является косвенным признаком сходимости решения.

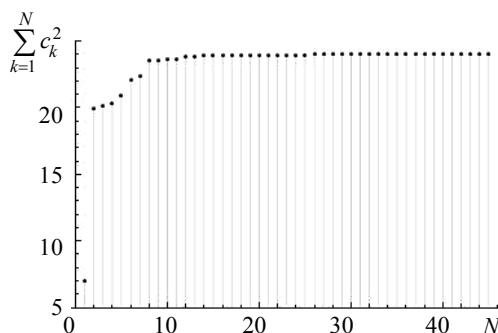
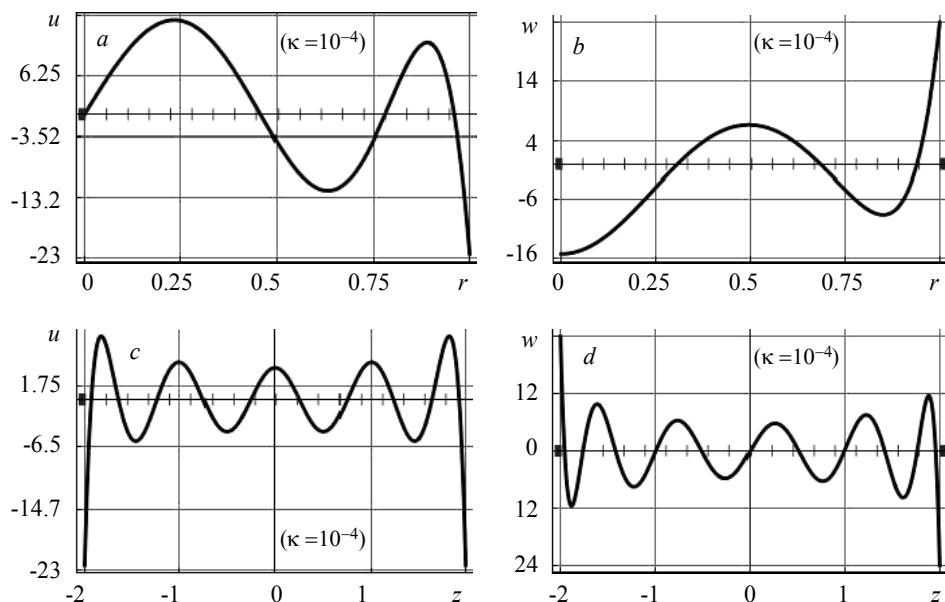


Рис. 3. Сумма Бесселя в задаче для цилиндра  
Fig. 3. The Bessel sum in the problem for a cylinder

Коэффициенты Фурье рассчитываются по зависимости (14), искомые характеристики НДС – по зависимостям (11). Проверка результата и оценка точности осуществляется сопоставлением заданных ГУ с восстановленными в результате решения (рис. 4), а также сопоставлением полученного поля массовых сил с заданным полем.

Здесь и далее, заданные (| | | |) и восстановленные (————) ГУ изображены на графиках в масштабе. Например, истинное значение на графике рис. 4,  $a$  равно значению на графике, умноженному на коэффициент  $k$ . Аналогично и для выражений.



**Рис. 4.** Верификация перемещений на границе: *a* – компоненты  $u$  на участке  $S_1$ , *b* – компоненты  $w$  на участке  $S_1$ , *c* – компоненты  $u$  на участке  $S_3$ , *d* – компоненты  $w$  на участке  $S_3$

**Fig. 4.** Verification of displacements on the boundary: (*a*) the components of  $u$  in the section  $S_1$ , (*b*) the components of  $w$  in the section  $S_1$ , (*c*) the components of  $u$  in the section  $S_3$ , and (*d*) the components of  $w$  in the section  $S_3$

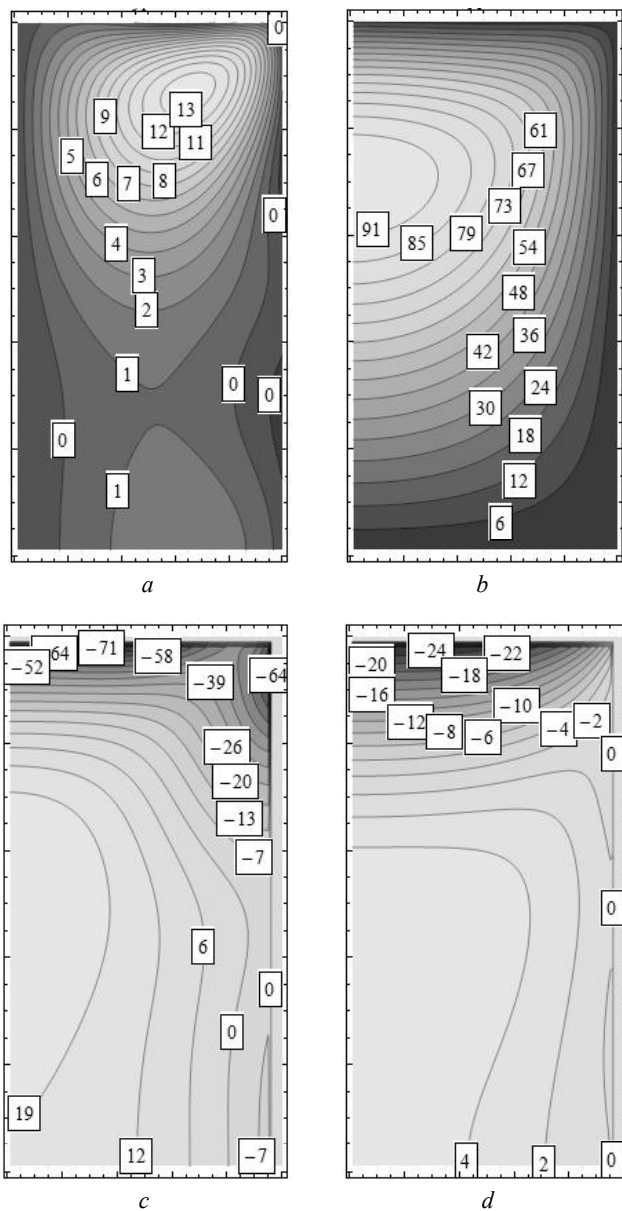
Приведем восстановленные массовые силы ( $\kappa = 10^{-5}$ ):

$$\begin{aligned} R &= 97140.3r + 11750.7r^3 - 9911.8r^5 + \\ &+ 394.636rz^2 - 786.119r^3z^2 + 35.973rz; \\ Z &= -294.709z + 570.086r^2z - 412.157r^4 + \\ &+ 100228z^3 - 14.666r^2z^3 - 56.777z^5. \end{aligned}$$

Остальные характеристики НДС представим в виде изолиний (в явном виде необозримы) (рис. 5). В силу осевой симметрии показана область  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ . Относительно плоскости  $z = 0$  компоненты  $u$ ,  $\sigma_{rr}$  обладают симметрией,  $w$  и  $\sigma_{zz}$  – косой симметрией.

Полученные поля удовлетворяют уравнениям (1) – (3), а также уравнениям совместности деформаций [24].

При практической реализации приема решения второй основной задачи для цилиндра и его тестирования при различных видах функций заданных массовых сил наблюдалась следующая особенность. Если область интегрирования  $V$  симметрична относительно плоскости  $z = 0$ , то задачи с несимметричной и не кососимметричной относительно этой плоскости компонентой  $Z$ , например  $Z = z + 1$ , сходимостью решения в области восстановления массовых сил не обладают. Для получения корректного решения в этом случае необходимо задать несимметричную относительно плоскости  $z = 0$  область цилиндра  $V$ , например с координатой  $0 \leq z \leq 4$ .



**Рис. 5.** Механические характеристики:  $a$  – компонента вектора перемещения  $u$  ( $\kappa = 10^{-3}$ ),  $b$  – компонента вектора перемещения  $w$  ( $\kappa = 10^{-3}$ ),  $c$  – компонента тензора напряжений  $\sigma_{rr}$  ( $\kappa = 10^{-2}$ ),  $d$  – компонента тензора напряжений  $\sigma_{zz}$  ( $\kappa = 10^{-1}$ )

**Fig. 5.** Mechanical characteristics: (a) a component of the displacement vector  $u$  ( $\kappa = 10^{-3}$ ), (b) a component of the displacement vector  $w$  ( $\kappa = 10^{-3}$ ), (c) a component of the stress tensor  $\sigma_{rr}$  ( $\kappa = 10^{-2}$ ), and (d) a component of the stress tensor  $\sigma_{zz}$  ( $\kappa = 10^{-1}$ )

### Заключение

Таким образом, сформулирован метод решения второй основной задачи для трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся под действием стационарных массовых сил. Заданные перемещения на границе и массовые силы носят осесимметричный характер. Особенность решения заключается в том, что наиболее трудоемкие вычисления, а именно построение ортонормированного базиса и матрицы коэффициентов  $\beta_{ij}$  строятся для тела один раз и могут быть использованы при решении задач с различными краевыми условиями и массовыми силами. Сложность задачи обусловлена тем, что восстановление искомого упругого поля осуществляется одновременно по двум направлениям (два интеграла в выражении для  $\alpha_j$  (13)): массовые силы  $\mathbf{X}$  и перемещения точек границы  $\mathbf{u}$ .

Основным преимуществом представленного метода перед численными методами заключается в том, что в своей структуре метод оперирует квадратурами, которые берутся средствами компьютерной алгебры с абсолютной точностью. Это ликвидирует причину формирования результирующей ошибки вычислений, связанной с промежуточным характером численного счета. Также предложенный подход позволяет получить численно-аналитическое решение задачи теории упругости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Голоскоков Д.П., Данилюк В.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел с помощью полиномов // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2013. № 1. С. 8–14.
2. Агаханов Э.К. О развитии комплексных методов решения задач механики деформируемого твердого тела // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2013. № 2 (29). С. 39–45.
3. Агаханов Э.К. Решение задач механики деформируемого твердого тела с использованием фиктивных расчетных схем // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2015. № 3 (38). С. 8–15.
4. Стружанов В.В. О решении краевых задач теории упругости методом ортогональных проекций // Математическое моделирование систем и процессов. 2004. № 12. С. 89–100.
5. Калантарлы Н.М. Трещинообразование в круговом диске под действием объемных сил // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 6. С. 23–29.
6. Агаханов Э.К., Магомедэминов Н.С. Условия эквивалентности воздействий для перемещений // Вестник ДГТУ. Технические науки. 2007. №12. С. 27–28.
7. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругой толстостенной сферы под действием объемных сил // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 6. С. 59–69.
8. Фукалов А.А. Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложения // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20–24 августа 2015. С. 3951–3953.
9. Кузьменко Н.В., Левина Л.В. Обратный метод эффективного анализа состояния упругого тела от массовых сил из класса непрерывных // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сб. докл. Казань, 2015. С. 2276–2278.
10. Пеньков В.Б., Левина Л.В., Кузьменко Н.В. Анализ напряженно-деформированного состояния массива, ослабленного взаимодействующими подземными хранилищами газа // Успехи современного естествознания. 2017. № 9. С. 95–101.
11. Пеньков В.Б., Пеньков В.В., Викторов Д.В. Учет массовых сил в методе граничных состояний // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 11. Вып. 2. С. 94–100.

12. Пеньков В.Б., Новикова О.С., Левина Л.В. Состояние упругого тела при нагружении комбинацией объемных сил // Вестник Липецкого государственного технического университета. 2017. № 4. С. 25–56.
13. Penkov V.B., Ivanychev D.A., Novikova O.S., Levina L.V. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations // J. Physics: Conf. Series 973. 2018. 012015 DOI:10.1088/1742-6596/973/1/012015.
14. Ivanychev D.A., Levina E.Yu., Abdullakh L.S., Glazkova Yu.A. The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length // International Transaction J. Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies. 2019. V. 10. No. 2. pp. 183–191. DOI: 10.14456/IJEMAST.2019.18.
15. Албагачиев А.Ю., Моисеенко А.М., Якововская И.М., Зернов Е.В. Напряженно-деформированное состояние тонкой квадратной заготовки при ее осадке шероховатыми плитами // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2017. № 49. С. 75–80. DOI: 10.17223/19988621/49/7.
16. Пономарева М.А., Собко Е.А., Якутенок В.А. Решение осесимметричных задач теории потенциала непрямым методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 5(37). С. 84–96.
17. Иванычев Д.А. Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05.
18. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в приложении к осесимметричным задачам для анизотропных тел // Вести высших учебных заведений Черноземья. Научно-технический и производственный журнал. Липецк: ЛГТУ. 2014. № 1. С. 19–26.
19. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука, 1978. 464 с.
20. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 115–137.
21. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 416 с.
22. Саталкина Л.В. Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. 2007. С. 130–131.
23. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник ЛГТУ. 2016. № 2 (28). С. 16–24.
24. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

Статья поступила 06.10.2018 г.

Ivanychev D.A. (2019) THE METHOD OF BOUNDARY STATES IN THE SOLUTION TO THE SECOND FUNDAMENTAL PROBLEM OF THE THEORY OF ANISOTROPIC ELASTICITY WITH MASS FORCES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 45–60

DOI 10.17223/19988621/61/5

Keywords: boundary state method, anisotropy, mass forces, boundary value problems, the second fundamental problem, state space, anisotropic cylinder.

The aim of the paper is to assess the stress-strain state of anisotropic bodies of revolution with specified displacements of the boundary points and acting mass forces. The problem solution is intended to develop the method of boundary states. A theory is elaborated for constructing a basis of the internal state space, including displacements, strains, and stresses within the body, and a

basis of the boundary state space, including forces at the boundary, displacements of the boundary points, and mass forces. The bases are formed using a general solution of the boundary value problem for a transversely-isotropic body of revolution and a method for creating basis vectors of displacement, which is similar to the one usually employed in problems dealing with stress conditions caused by non-conservative mass forces. The internal area and the boundaries are conjugated by isomorphism. This property allows one to reduce the analysis of the whole body state to the analysis of its boundary state. The characteristics of the stress-strain state are presented using the Fourier series. Eventually, a determination of the stress-strain state is reduced to solving an infinite system of algebraic equations.

The paper proposes a solution to the second fundamental problem of a circular plane cylinder made of rock, as well as the relevant steps of the study and conclusions. The obtained results are visualized graphically.

**Financial support.** The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Lipetsk Region in the framework of the research project No. 19-41-480003 "p\_a".

*IVANYCHEV* Dmitriy Alekseevich (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: lsivdml@mail.ru

#### REFERENCES

1. Goloskokov D.P., Danilyuk V.A. (2013) Modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uprugikh tel s pomoshch'yu polinomov [Modeling of the stress-strain state of elastic bodies using the polynomials]. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova*. 1. pp. 8–14.
2. Agakhanov E.K. (2013) O razvitiy kompleksnykh metodov resheniya zadach mekhaniki deformiruемого твердого тела [On the development of complex methods for solving the problems of mechanics of a deformable solid]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 2(29). pp. 39–45.
3. Agakhanov E.K. (2015) Reshenie zadach mekhaniki deformiruемого твердого тела s ispol'zovaniem fiktivnykh raschetnykh skhem [Solving the problems of mechanics of a deformable solid with the use of fictitious calculation schemes]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 3(38). pp. 8–15.
4. Struzhanov V.V. (2014) O reshenii kraevykh zadach teorii uprugosti metodom ortogonal'nykh proektsiy [On the solution of boundary value problems of the theory of elasticity by the method of orthogonal projections]. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*. 12. pp. 89–100.
5. Kalantarly N.M. (2014) Treshchinoobrazovanie v krugovom diske pod deystviem ob'emnykh sil [Cracking in circular disk under the influence of volume forces]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 6. pp. 23–29.
6. Agakhanov E.K., Magomedeminov N.S. (2007) Usloviya ekvivalentnosti vozdeystviy dlya peremeshcheniy [Equivalence conditions of impacts for displacements]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 12. pp. 27–28.
7. Vestay V.A., Tarlakovskiy D.V. (2015) Nestatsionarnoe osesimmetrichnoe deformirovanie uprugoy tolstostennoy sfery pod deystviem ob'emnykh sil [Unsteady axisymmetric deformation of an elastic thick-walled sphere under the action of volume forces]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 56(6). pp. 984–994. DOI: 10.1134/S0021894415060085.
8. Fukalov A.A. (2015) Zadachi ob uprugom ravnovesii sostavnykh tolstostennykh transversal'no-izotropnykh sfer, nakhodyashchikhsya pod deystviem massovykh sil i

- vnutrennego davleniya, i ikh prilozheniya [Problems on the elastic equilibrium of the composite thick-walled transversally isotropic spheres under the action of mass forces and internal pressure, and their applications]. *XI Vserossiyskiy s"ezd po fundamental'nyim problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki, Kazan'*. pp. 3951–3953.
9. Kuzmenko N.V., Levina L.V. (2015) Obratnyy metod effektivnogo analiza sostoyaniya uprugogo tela ot massovykh sil iz klassa nepreryvnykh [The inverse method of effective analysis of an elastic body state affected by mass forces classified as continuous ones]. *XI Vserossiyskiy s"ezd po fundamental'nyim problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki. Kazan'*. pp. 2276–2278.
  10. Pen'kov V.B., Levina L.V., Kuz'menko N.V. (2017) Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya massiva, oslablennogo vzaimodeystvuyushchimi podzemnymi khranilishchami gaza [Analysis of the stress-strain state of the massif weakened by the interacting underground gas storages]. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya – Advances in Current Natural Sciences*. 9. pp. 95–101.
  11. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V., Viktorov D.V. (2005) Uchet massovykh sil v metode granichnykh sostoyaniy [The account for mass forces in the method of boundary states]. *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*. 11. pp. 94–100.
  12. Pen'kov V.B., Novikova O.S., Levina L.V. (2017) Sostoyanie uprugogo tela pri nagruzhении kombinatsiei ob'emnykh sil [The state of an elastic body when loaded by a combination of volume forces]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Lipetsk State Technical University*. 4. pp. 25–56.
  13. Pen'kov V.B., Ivanychev D.A., Novikova O.S., Levina L.V. (2018) An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations. *Journal of Physics: Conference Series*. 973(012015). DOI:10.1088/1742-6596/973/1/012015.
  14. Ivanychev D.A., Levina E.Yu., Abdullakh L.S., Glazkova Yu.A. (2019) The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length. *International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies*. 10(2). pp. 183–191. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.18.
  15. Albagachiev A.Yu., Moiseenko A.M., Yakobovskaya I.M., Zernov E.V. (2017) Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie tonkoy kvadratnoy zagotovki pri ee osadke sherokhovatyimi plitami [A stress-strain state of the thin square workpiece during upsetting by rough plates]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 75–80. DOI: 10.17223/19988621/49/7.
  16. Ponomareva M.A., Sobko E.A., Yakutenok V.A. (2015) Reshenie osesimmetrichnykh zadach teorii potentsiala nepryamym metodom granichnykh elementov [Solving axisymmetric potential problems using the indirect boundary element method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(37). pp. 84–96. DOI: 10.17223/19988621/37/8.
  17. Ivanychev D.A. (2019) Reshenie kontaktnoy zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya s massovymi silami [The contact problem solution of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2. pp. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05.
  18. Ivanychev D.A. (2014) Metod granichnykh sostoyaniy v prilozhenii k osesimmetrichnym zadacham dlya anizotropnykh tel [The method of boundary states as applied to axisymmetric problems for anisotropic bodies]. *Vesti vysshikh uchebnykh zavedeniy Chernozem'ya – News of Higher Educational Institutions of the Chernozem Region*. 1. pp. 19–26.
  19. Aleksandrov A.Ya., Solov'ev Yu.I. (1978) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primeneniye metodov teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo)* [Spatial problems of the theory of elasticity (application of the methods of the theory of functions of complex variable)]. Moscow: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury.

20. Pen'kov V.B. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [The method of boundary states for solving the problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal*. 2(2). pp. 115–137.
21. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [The theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
22. Satalkina L.V. (2007) Narashchivanie bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoemkosti vychisleniy [Expansion of the basis of the state space at severe limitations in the energy consumption of computations]. *Sbornik tezisov dokladov nauchnoy konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. pp. 130–131.
23. Levina L.V., Novikova O.S., Pen'kov V.B. (2016) Polnoparametricheskoe reshenie zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichennogo tela [Full-parameter solution to the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Lipetsk State Technical University*. 2 (28). pp. 16–24.
24. Novatskiy V. (1975) *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow: Mir.

Received: October 6, 2018