

УДК 004.94

DOI 10.17223/19988621/61/8

М.С. Павлов, А.А. Светашков, Н.А. Куприянов**МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФОРМУЛИРОВКА
ИТЕРАЦИОННОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ РАЗДЕЛЕНИЯ
ВРЕМЕННЫХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Целью настоящей работы является построение итерационных процедур решения краевых задач линейной вязкоупругости для случаев, в которых интегральный оператор, обратный оператору релаксации, либо неизвестен, либо расчет соответствующего ядра сопряжен с вычислительными трудностями. Преимущества использованного подхода состоят в том, что, во-первых, при его применении возможно распараллеливание процессов расчета пространственных и временных компонент напряженно-деформированного состояния, во-вторых, отпадает необходимость интегрирования истории изменения напряжений и перемещений во времени.

Ключевые слова: *линейная вязкоупругость, интегральные операторы, вспомогательные определяющие уравнения, сходимость, итерационный алгоритм.*

Многие конструкционные материалы проявляют вязкоупругие свойства. Чаше всего необходимость учета таких свойств возникает в отношении полимеров и композиционных материалов с полимерной матрицей. Тем не менее вязкоупругие свойства проявляют также и традиционные материалы, например дерево, бетон или стекло. Помимо этого, необходимость учета ползучести и/или релаксации в механически нагруженных телах может возникать в самых разных областях, таких как, например, дорожное строительство, геология, разработка автомобильных шин, биомедицинские исследования [1], аэрокосмические разработки [2] и т.д.

Начало изучения влияния времени на напряженно-деформированное состояние изделий из металлов, резины и стекла положено в конце девятнадцатого – начале двадцатого веков Кельвином, Максвеллом, Больцманом и другими [3]. Максвелл сформулировал закон деформирования с течением времени в дифференциальном виде [4, 5]. Несколько позже разработан Больцманом и развит Вольтерра общий математический аппарат для описания линейной ползучести [4, 6–8]. В связи с развитием индустрии полимерных материалов с начала 30-х годов XX века началось более интенсивное изучение вязкоупругости [1]. К настоящему моменту математический аппарат линейной и нелинейной вязкоупругости в значительной степени разработан. Формулировка определяющих соотношений и методов анализа для вязкоупругих тел содержится в фундаментальных монографиях различных авторов, например [1, 4, 9–15].

Для вязкоупругих тел связь между напряжениями и деформациями описывается с помощью интегральных уравнений Вольтерра, содержащих ядра того или иного вида. На сегодняшний день наиболее популярными являются интегральные ядра ползучести и релаксации в виде суммы убывающих экспонент (рядов Прони) [1, 16–18]. Такой вид ядра позволяет достичь высокой точности анализа путем

аппроксимации большого объема экспериментальных данных за счет увеличения числа слагаемых. Кроме того, представление ядер ползучести и релаксации в виде рядов Прони удобно для программирования при численном анализе.

Построение точных решений для краевых задач напряженно-деформированного состояния вязкоупругого тела возможно только в некоторых простейших случаях. Поэтому при анализе изделий из вязкоупругих материалов главным образом применяются приближенные методы, большинство из которых можно отнести к одной из трех следующих групп. В первую группу входят методы, подразумевающие прямое интегрирование физических уравнений [19, 20], во вторую – использующие замену тем или иным способом вязкоупругой задачи на упругую [21, 22], и третью группу составляют итерационные методы [23–28].

Целью настоящей работы является развитие итерационного метода решения краевых задач напряженно-деформированного состояния вязкоупругих тел, приведенного, в [27, 29]. В основе метода лежит разделение временных и пространственных переменных. Последнее, в свою очередь, позволяет ускорить решение за счет разделения его на два параллельных процесса на этапе постановки задачи.

Формулировка граничной задачи линейной вязкоупругости

В настоящей работе при записи уравнений используется общепринятое положение о суммировании по повторяющимся индексам.

Физические соотношения для изотропного вязкоупругого материала в общем виде можно представить, например, следующим образом:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \left(K^* - \frac{2}{3} G^* \right) \theta \delta_{\alpha\beta} + 2 G^* \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (1)$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно, индексы α , β соответствуют номерам пространственных координат; $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера; $\theta = \varepsilon_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}$ – объемная деформация; K^* , G^* – операторы объемной и сдвиговой релаксации соответственно.

$$K^* \theta \equiv \int_0^t K(t-\tau) d\theta(\tau); \quad (2)$$

$$G^* \varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon_{\alpha\beta}(\tau). \quad (3)$$

Здесь $K(t)$, $R(t)$ – функции объемной и сдвиговой релаксации, $R(0) = G_0$, $K(0) = K_0$, где K_0 , G_0 – упругомгновенные модули объемного сжатия и сдвига.

Уравнения равновесия в области и условия на границе

$$\left(K^* + \frac{1}{3} G^* \right) \theta_{,\alpha} + G^* \Delta u_{\alpha} = P_{\alpha}; \quad (4)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} \big|_{\Gamma_1} = S_{\alpha}^0, \quad u_{\alpha} \big|_{\Gamma_2} = u_{\alpha}^0. \quad (5)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, P_{α} , S_{α}^0 – соответственно массовые и поверхностные силы; n_{β} – направляющие косинусы нормали к границе; Γ_1 , Γ_2 – участки граничного контура, на которых заданы усилия S_{α}^0 и перемещения u_{α}^0 соответственно.

Заменив в вязкоупругой задаче (1), (4), (5) операторы K^* и G^* на специальным образом выбранные константы k и g , получим вспомогательную задачу, в которой

левые части уравнений равновесия и граничных условий соответствуют задаче линейной упругости, тогда как правые содержат слагаемые, определяемые действием вязкоупругих операторов на искомые перемещения. Конкретный вид правых частей вспомогательной задачи зависит от способа определения упругих констант k , g и подчиняется требованию тождественности решений основной и вспомогательной задач. Если правые части уравнений вспомогательной задачи определены, то решение вязкоупругой задачи сводится к решению вспомогательной линейно упругой задачи. Это условие, вообще говоря, не выполняется, так как искомые перемещения находятся в обеих частях уравнений. Однако возможно организовать итерационный процесс, в котором правые части уравнений на текущем шаге вычисляются через решение, полученное на предыдущем. Формулировка и доказательство теоремы о сходимости алгоритмов такого типа имеются в [30]. Скорость сходимости зависит от конкретного вида вспомогательных упругих констант и будет обсуждаться далее.

Формулировка итерационного алгоритма для случая упругих объемных свойств материала

Будем рассматривать случай, когда объемная релаксация отсутствует, то есть $K^* = K_0 = K$. Вспомогательные физические соотношения зададим в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \left(K - \frac{2}{3}g \right) \theta \delta_{\alpha\beta} + 2g \varepsilon_{\alpha\beta}. \quad (6)$$

Здесь g – некоторый заранее выбранный модуль сдвига для вспомогательного упругого тела. Уравнения равновесия (4), с использованием (6) могут быть записаны в эквивалентном виде:

$$\left(K + \frac{1}{3}G^* \right) \theta_{,\alpha} + G^* \Delta u_{\alpha} + \left(K + \frac{1}{3}g \right) \theta_{,\alpha} + g \Delta u_{\alpha} - \left(K + \frac{1}{3}g \right) \theta_{,\alpha} - g \Delta u_{\alpha} = P_{\alpha}. \quad (7)$$

Или, в отсутствие массовых сил P_{α} ,

$$\left(K + \frac{1}{3}g \right) \theta_{,\alpha} + g \Delta u_{\alpha} = (g - G^*) \left(\frac{1}{3} \theta_{,\alpha} + \Delta u_{\alpha} \right). \quad (8)$$

Правая часть (8) является невязкой основной и вспомогательной задач. Аналогично записываются граничные условия

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 n_{\beta} = S_{\alpha}^0 + \left[(G^* - g) \left(\frac{2}{3} \theta \delta_{\alpha\beta} - 2\varepsilon_{\alpha\beta} \right) \right] n_{\beta}. \quad (9)$$

Далее можно записать соотношения для итерационного процесса, снабдив входящие в (8), (9) параметры напряженно-деформированного состояния соответствующими верхними индексами

$$\left(K + \frac{1}{3}g \right) \theta_{,\alpha}^{(n+1)} + g \Delta u_{\alpha}^{(n+1)} = (g - G^*) \left(\frac{1}{3} \theta_{,\alpha}^{(n)} + \Delta u_{\alpha}^{(n)} \right); \quad (10)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{0(n+1)} n_{\beta} = S_{\alpha}^0 + \left[(G^* - g) \left(\frac{2}{3} \theta^{(n)} \delta_{\alpha\beta} - 2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)} \right) \right] n_{\beta}. \quad (11)$$

Решение исходной задачи определяется как суперпозиция всех $n+1$ решений, полученных на соответствующих итерациях. Начальное приближение может быть выбрано из произвольных соображений.

Следует обратить внимание на то, что в левых частях (10), (11) отсутствуют интегральные операторы. Кроме того, можно показать, что в случае представления каждого из граничных условий исходной вязкоупругой задачи в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от пространственных переменных, а другая – только от времени, в задачах (10), (11) пространственные и временные переменные оказываются разделенными на каждой итерации.

В качестве критерия сходимости авторы предлагают использовать значение функционала работы напряжений на деформациях за время нагружения t :

$$W(\dot{\varepsilon}) = \int_0^t \sigma_{\alpha\beta}(\tau) \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\tau) d\tau. \quad (12)$$

При практическом решении задач значения производных по времени от компонент тензора деформаций, как правило, неизвестны. При этом, если положить в каждой точке вязкоупругого тела представление $\varepsilon_{\alpha\beta}(t)$ в виде кусочно-постоянной функции

$$\varepsilon(t_m) = \sum_{i=0}^m [h(t_m - t_i) - h(t_m - t_{i+1})] \varepsilon_{\alpha\beta}^i, \quad (13)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}^i$ – некоторые постоянные величины, а m – целое число, то значение функционала (12) будет приближенно равно удельной потенциальной энергии деформаций

$$W_0(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \sigma_{\alpha\beta}(t) \varepsilon_{\alpha\beta}(t). \quad (14)$$

Пример реализации алгоритма

Поясним реализацию сформулированного алгоритма на простом примере. Для этого зададим оператор сдвиговой релаксации в виде

$$G^* x \equiv G_0 [1 - \lambda \mathcal{D}_0^* (\lambda + \gamma)] x, \quad (15)$$

где λ, γ – материальные константы; \mathcal{D}_0^* – интегральный оператор вида

$$\mathcal{D}_0^*(\zeta) x \equiv \int_0^t e^{-\zeta(t-\tau)} x(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Оператор невязки правых частей (10), (11) принимает наиболее простой вид, если в качестве вспомогательного модуля сдвига g использовать мгновенный модуль G_0 . Тогда выражения невязок, входящих в (9), будут

$$G^* - g = G^* - G_0 = -\lambda G_0 \mathcal{D}_0^* (\lambda + \gamma). \quad (17)$$

В этом случае уравнения (10), (11) принимают вид

$$\left(K + \frac{1}{3} G_0 \right) \theta_{,\alpha}^{(n+1)} + G_0 \Delta u_{\alpha}^{(n+1)} = \lambda G_0 \mathcal{D}_0^* (\gamma + \lambda) \left(\frac{1}{3} \theta_{,\alpha}^{(n)} + \Delta u_{\alpha}^{(n)} \right); \quad (18)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{0(n+1)} n_{\beta} = S_{\alpha}^0 + \left[\lambda G_0 \mathcal{D}_0^* (\gamma + \lambda) \left(2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)} - \frac{2}{3} \theta^{(n)} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] n_{\beta}. \quad (19)$$

Также будем считать, что заданные на соответствующих участках границы перемещения всюду нулевые. В этом случае они остаются таковыми на каждой ите-

рации, В свою очередь, силовые граничные условия заданы в виде произведения функций координат на функцию времени:

$$S_{\alpha}^0 = \tilde{S}_{\alpha}^0(x, y) \phi^0(t). \quad (20)$$

В качестве начального приближения будем рассматривать недеформированное состояние, то есть при $n = 0$, $u_{\alpha}^{(0)} = 0$. Тогда

$$\left(K + \frac{1}{3}G_0\right) \theta_{,\alpha}^{(1)} + G_0 \Delta u_{\alpha}^{(1)} = 0; \quad (21)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{0(1)} n_{\beta} = S_{\alpha}^0. \quad (22)$$

Решение вязкоупругой задачи (21), (22) в силу (20) может быть представлено в виде

$$u_{\alpha}^{(1)} = \tilde{u}_{\alpha}^{(1)} \phi_1, \quad (23)$$

где $\phi_1 = \phi^0(t)$, $\tilde{u}_{\alpha}^{(1)}$ – решение упругой задачи

$$\left(K + \frac{1}{3}G_0\right) \tilde{\theta}_{,\alpha}^{(1)} + G_0 \Delta \tilde{u}_{\alpha}^{(1)} = 0; \quad (24)$$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{0(1)} n_{\beta} = \tilde{S}_{\alpha}^0. \quad (25)$$

Таким образом, на первой итерации достигнуто разделение временных и пространственных переменных. На второй итерации необходимо получить решение задачи

$$\left(K + \frac{1}{3}G_0\right) \theta_{,\alpha}^{(2)} + G_0 \Delta u_{\alpha}^{(2)} = \lambda G_0 \mathfrak{D}_0^* (\gamma + \lambda) \left(\frac{1}{3} \theta_{,\alpha}^{(1)} + \Delta u_{\alpha}^{(1)}\right); \quad (26)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{0(2)} n_{\beta} = \left[\lambda G_0 \mathfrak{D}_0^* (\gamma + \lambda) \left(2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{2}{3} \theta^{(1)} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] n_{\beta}. \quad (27)$$

Уравнения (26), (27) с учетом (23) представляются в виде

$$\left(K + \frac{1}{3}G_0\right) \theta_{,\alpha}^{(2)} + G_0 \Delta u_{\alpha}^{(2)} = \lambda G_0 \mathfrak{D}_0^* (\gamma + \lambda) \left(\frac{1}{3} \tilde{\theta}_{,\alpha}^{(1)} + \Delta \tilde{u}_{\alpha}^{(1)}\right) \phi_1; \quad (28)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{0(2)} n_{\beta} = \left[\lambda G_0 \mathfrak{D}_0^* (\gamma + \lambda) \left(2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{2}{3} \tilde{\theta}^{(1)} \delta_{\alpha\beta} \right) \phi_1 \right] n_{\beta}. \quad (29)$$

Решение граничной задачи (28), (29) может быть найдено как

$$u_{\alpha}^{(2)} = \tilde{u}_{\alpha}^{(2)} \phi_2, \quad (30)$$

где

$$\phi_2 = \mathfrak{D}_0^* (\gamma + \lambda) \phi_1. \quad (31)$$

Соответственно $\tilde{u}_{\alpha}^{(2)}$ есть решение упругой задачи, получаемой из (28), (29), так же, как (24), (25) получено из (21), (22). Таким образом, на второй итерации также разделяются на две независимых процедуры операции с пространственными и временными переменными.

Третья и последующие итерации выполняются аналогично. При этом замечательно, что

$$\phi_{n+1} = \mathfrak{D}_0^* (\gamma + \lambda) \phi_n = \mathfrak{D}_0^{*n} (\gamma + \lambda) \phi_1. \quad (32)$$

Возведение оператора в степень осуществляется в соответствии с [31] следующим образом:

$$\mathfrak{Z}_0^{*n}(\zeta) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} \mathfrak{Z}_0^*(\zeta)}{\partial \zeta^{n-1}}. \quad (33)$$

В результате искомые параметры напряженно-деформированного состояния находятся как

$$u_\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} u_\alpha^{(i)}; \quad (34)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha^{(i)}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta^{(i)}}{\partial x_\alpha} \right); \quad (35)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n+1} \left(K - \frac{2}{3} G^* \right) \theta^{(i)} \delta_{\alpha\beta} + 2G^* \varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)}. \quad (36)$$

Условие останова итерационного процесса можно записать в виде

$$\left| \frac{W_0^{(n+1)} - W_0^{(n)}}{W_0^{(n)}} \right| \leq \mu, \quad (37)$$

где W_0 определяется по (14); μ – некоторое наперед заданное число.

Вычислительная процедура для использования совместно с методом конечных элементов

Для успешного применения предлагаемого в настоящей работе итерационного алгоритма, необходимо на каждой итерации располагать решением упругой задачи. Получить такое решение в общем случае возможно разными способами, однако для практических расчетов наиболее применяемым является метод конечных элементов. При этом чаще всего используются линейные элементы, то есть такие, в которых функция формы элемента является линейной. Коэффициентами этой функции являются значения рассматриваемых параметров в узлах элемента. Также в большинстве случаев решение задачи определения напряженно-деформированного состояния получается вначале в перемещениях, а затем по ним вычисляются компоненты тензоров деформаций и напряжений, для чего необходимо вычислить в каждом узле первые производные функции перемещений по координатам. Однако при использовании предлагаемого итерационного метода, необходимо для определения невязки уравнений равновесия вычислять вторые производные от перемещений. В пределах одного линейного элемента вторая производная от линейной функции формы всегда равна нулю.

Поскольку для реализации алгоритмов метода конечных элементов требуется сравнительно большой объем работ, связанных с программированием, в инженерной практике широкое распространение получили универсальные программные средства для прикладного конечно-элементного анализа. В их число входят как «тяжелые» программные комплексы ANSYS, Abaqus, NX, CalciliX и т.п., так и авторские проекты, например Z88Aurora, или специальные программы, разрабатываемые инженерными коллективами для собственных нужд. В абсолютном большинстве случаев в таком программном обеспечении не предусмотрена процедура

вычисления вторых производных функций формы элемента даже в случае использования конечных элементов высших порядков.

Исходя из сказанного, для реализации сформулированного выше итерационного алгоритма совместно с методом конечных элементов необходимо решить задачу вычисления вторых производных от функций перемещений. Особенную важность этот вопрос приобретает при использовании готового программного обеспечения конечно-элементного анализа. Одним из возможных способов является использование конечно-разностной схемы дифференцирования, однако такой подход влечет за собой ряд неудобств, особенно на нерегулярных сетках. Более рациональным представляется использование схемы дифференцирования, реализованной в используемом программном обеспечении метода конечных элементов. При этом процедуре дифференцирования следует подвергать компоненты деформаций, через которые выражаются невязки уравнений равновесия. Так, выражение под оператором в правой части (10), определяющее величины массовых сил (невязки) в упругих задачах итерационного процесса, записывается через производные от деформаций следующим образом:

$$\frac{1}{3}\theta_{,\alpha} + \Delta u_{\alpha} = \frac{4}{3} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \varepsilon_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + 2 \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}}, \quad \alpha \neq \beta. \quad (38)$$

Рассмотрим пример решения задачи чистого изгиба консольной балки из вязкоупругого материала, подчиняющегося общему линейному закону деформирования [4]

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_0} \left[\sigma(t) + \int_{t_0}^t \sigma(\tau) K_1(t - \tau) d\tau \right], \quad (39)$$

где t_0 и t соответствуют времени начала нагружения и рассматриваемому моменту; E_0 – мгновенный модуль упругости; $K_1(t - \tau)$ – ядро ползучести.

В случае, когда изгибающий момент может быть представлен в виде

$$M(t) = M_0 \phi_0(t), \quad (40)$$

где M_0 – постоянная, а $\phi_0(t)$ – некоторая функция времени, уравнение прогибов для такой балки запишется следующим образом:

$$w(t) = \frac{M_0 y^2}{2EJ} \left[\phi_0(t) + \int_{t_0}^t K_1(t - \tau) \phi_0(t) d\tau \right] = \frac{M_0 y^2}{2J} E^{*-1} \phi_0(t). \quad (41)$$

Здесь w – величина прогиба; y – координата поперечного сечения, откладываемая от жестко зашпеленного конца; J – осевой момент инерции балки; E^{*-1} – оператор ползучести.

Полагая $t_0 = 0$ и объемную релаксацию отсутствующей, оператор ползучести E^{*-1} представим через заданные G^* , K следующим образом:

$$E^{*-1}x \equiv \left[(3K + G^*) \frac{G^{*-1}}{9K} \right] x = \left[\frac{G^{*-1}}{3} + \frac{1}{9K} \right] x. \quad (42)$$

Следует отметить, что (42) получено вне каких-либо суждений о виде ядра ползучести $K_1(t - \tau)$. Далее, принимая оператор сдвиговой релаксации в виде (15), (16), получим вид оператора G^{*-1} :

$$G^{*-1}x \equiv \frac{1}{G_0} \left[1 + \lambda \mathfrak{D}_0^*(\gamma) \right] x. \quad (43)$$

Теперь, для случая статического нагружения, положим функцию $\phi_0(t)$ как функцию Хевисайда, и решение (40) принимает вид

$$w(t) = \frac{M_0 y^2}{6 G_0 J} \left[1 + \frac{\lambda}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \right] + \frac{M_0 y^2}{18 K J}. \quad (44)$$

Последнее выражение является точным решением. Также решение этой задачи получено итерационным методом совместно с методом конечных элементов, реализованным в ANSYS.

При численной реализации в качестве балки рассматривалась квадратная плоская пластина с длиной стороны равной 1. Для удобства принято, что все значения соответствуют системе СИ. Схема нагружения и разбиения на конечные элементы приведена на рис. 1. Момент M_0 и сила F_0 связаны соотношением

$$F_0 = \frac{12 M_0}{l^3}. \quad (45)$$

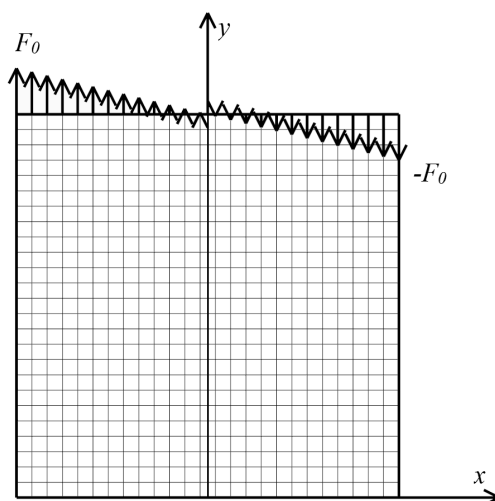


Рис. 1. Схема граничных условий балки
Fig. 1. Diagram of the boundary conditions for a beam

Параметры оператора сдвиговой релаксации вида (11): $G_0 = 6 \cdot 10^8$, $\lambda = 0.002$, $\gamma = 0.009$, объемный модуль $K = 14 \cdot 10^8$, время $t = 1000$. Сравнение численного и аналитического решения проведено по величине перемещения центра пластины, теоретически равной прогибу x , определенному по (38) при $y = 0.5$. На рис. 2 показаны результаты сравнения точного и численных решений, полученных на различных конечно-элементных сетках.

На рис. 3 приведен график сходимости итерационного процесса при разбиении стороны квадрата на 40 элементов. Критерий сходимости $\mu = 10^{-6}$.

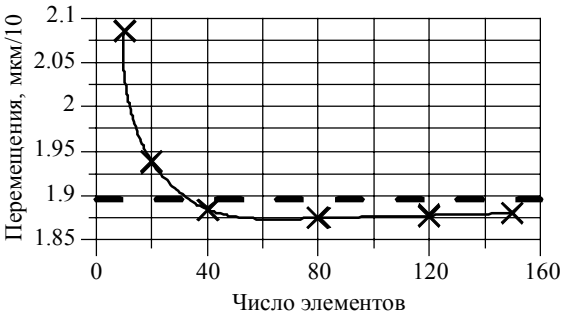


Рис. 2. Зависимость перемещения центральной точки пластины от числа разбиений стороны квадрата (Пунктир – точное решение; крестики – численное решение; сплошная линия – аппроксимация численного решения)

Fig. 2. Displacement of the plate central point as a function of the number of cells on the square side (the dashed line is the analytical solution; the crosses, the numerical solution; and the solid line, the numerical solution approximation)

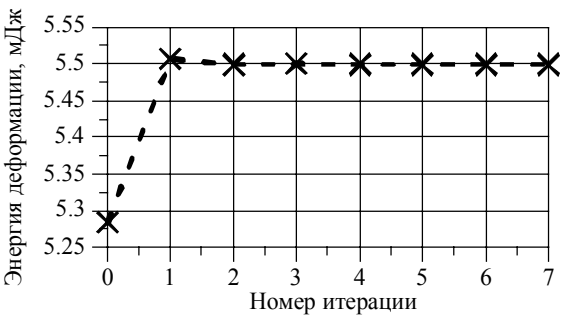


Рис. 3. Зависимость энергии упругой деформации от номера итерации

Fig. 3. Elastic-strain energy as a function of iteration number

Заклучение

Сформулированы соотношения для итерационной процедуры решения задач линейной вязкоупругости на основе использования вспомогательной упругой задачи, в которой механические свойства среды описываются мгновенными упругими характеристиками вязкоупругого тела. Также предложен способ использования алгоритма совместно с методом конечных элементов, при этом для вычисления невязок итерационного алгоритма могут быть использованы процедуры, являющиеся частью программного обеспечения конечно-элементного анализа. Таким образом, возможно применение предлагаемого в работе алгоритма совместно с прикладными программными средствами конечно-элементного моделирования.

Другой важной особенностью приведенной формулировки итерационного алгоритма является возможность определения всех параметров напряженно-деформированного состояния вязкоупругого тела с использованием только оператора релаксации. В том числе при решении задач ползучести.

Апробация алгоритма на модельных задачах показала эффективность предлагаемого подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lakes R.* Viscoelastic Materials N.Y.: Cambridge University Press, 2009. 461 p. DOI: 10.1017/CBO9780511626722
2. *Pavlov M. et. al.* Mathematical model of composite fibre-glass aramide-wired cord rheological properties // 13th International Conference of Students and Young Scientists on Prospect of Fundamental Sciences Development, PFSD 2016, Tomsk, Russian Federation, 26–29 April 2016. AIP Conference Proceeding. American Institute of Physics, 2016. V. 1772. 6 p. DOI: 10.1063/1.4964582.
3. *Doubal S., Doubal J.* Theory of Viscoelasticity Handbook. Delter, 2014. 81 p.
4. *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести. М.: Издательство литературы по строительству, 1968. 418 с.
5. *Maxwell J.C.I.* On the Dynamical Theory of Gases // Philosophical Transactions. 1867. V. 157. P. 49–88. DOI: 10.1098/rstl.1867.0004.
6. *Boltzman L.* Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung // Wiener Berichte. 1874. V. 70. P. 275–306. DOI: 10.1002/andp.18782411107
7. *Volterra V.* Lecons sur les fonctions de lignes. Paris: Gautierr Villars, 1912. 230 p.
8. *Volterra V.* Theory of Functionals and of Integral and integrodifferential Equations. London; Glasgow: Blackie & Son Limited, 1930. 226 p.
9. *Адамов А.А. и др.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
10. *Ильюшин А.А., Победра Б.Е.* Основы математической теории термо-вязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
11. *Reddy J.N.* An Introduction to Continuum Mechanics. N.Y.: Cambridge University Press, 2008. 449 p. DOI: 10.1017/CBO9781139178952.
12. *Pipkin A.C.* Lectures of Viscoelasticity Theory. N.Y.: Springer Verlag, 1986. 181 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1078-8.
13. *Flugge W.* Viscoelasticity. N.Y.: Blaisdell Press, 1967. 187 p.
14. *Cristensen R.M.* Theory of Viscoelasticity: An Introduction. N.Y.: Academic, 1980. 364 p.
15. *Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г.* Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Высшая школа, 1983. 239 с.
16. *Schapery R.A.* On the characterization of nonlinear viscoelastic materials // Polymer Engineering and Science. 1969. V. 9. No. 4. P. 295–310. DOI: 10.1002/pen.760090410.
17. *Tang Y., Li T., Ma X.* Creep and recovery behavior analysis of space mesh structures // Acta Astronautica. 2016. No. 128. P. 455–463. DOI: 10.1016/j.actaastro.2016.08.003.
18. *Kwok K., Pellegrino S.* Micromechanics Models for Viscoelastic Plain-Weave Composite Tape Springs // AIAA Journal. 2017. V. 55. No 1. P. 309–321. DOI: 10.2514/1.J055041.
19. *Taylor R.L., Pister K.S., Goudreas G.L.* Thermochemical analysis of viscoelastic solids // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. 1970. V. 2. P. 45–59. DOI: 10.1002/nme.1620020106.
20. *Simo J.C.* On fully three-dimensional finite strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects // Computer. Methods In Applied Mechanics and Engineering. 1987. V. 60. Iss. 2. P. 153–173. DOI: 10.1016/0045-7825(87)90107-1.
21. *Schapery R.A.* Analysis of viscoelastic composite materials // J. Composite Materials. 1967. V. 1. Iss. 3. P. 228–267. DOI: 10.1177/002199836700100302.
22. *Малый В.И., Труфанов Н.А.* Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости анизотропных нестареющих материалов // Известия Академии Наук СССР. Механика твердого тела. 1987. № 6. С. 148–154.
23. *Haj-Ali R., Muliana A.* Numerical finite element formulation of the schapery non-linear viscoelastic material model // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. 2004. No. 59. P. 25–45. DOI: 10.1002/nme.861.
24. *Tsukrov I. et al.* Numerical modeling of nonlinear elastic components of mooring systems // IEEE J. Oceanic Engineering. 2005. V. 30. No. 1. P. 37–46. DOI: 10.1109/JOE.2004.841396.

25. Куликов Р.Г., Труфанов Н.А. Итерационный метод решения квазистатических нелинейных задач вязкоупругости // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. № 3. С. 44–56.
26. Барба С.П. Метод упругих решений в задаче о неустойчившейся ползучести // Ученые записки ЦАГИ. 1990. Т. XXI. № 5. С. 112–123.
27. Павлов С.М., Светашков А.А. Итерационный метод решения задач линейной вязкоупругости // Изв. вузов. Физика. 1993. Т. 36. № 4. С. 129–136. DOI: 10.1007/BF00570749.
28. Svetashkov A., Kupriyanov N., Manabaev K. Modification of the iterative method for solving linear viscoelasticity boundary value problems and its implementation by finite element method // Acta Mechanica. 2018. V. 229. Iss. 6. P. 2539–2559. DOI: 10.1007/s00707-018-2129-z.
29. Светашков А.А. Прикладные задачи механики вязкоупругих материалов: монография / Томский политехнический университет. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. 205 с.
30. Победра Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
31. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

Статья поступила 06.09.2018 г.

Pavlov M.S., Svetashkov A.A., Kupriyanov N.A. (2019) MODIFIED FORMULATION OF THE ITERATIVE ALGORITHM FOR SOLVING LINEAR VISCOELASTICITY PROBLEMS BASED ON THE SEPARATION OF TIME AND SPACE VARIABLES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 82–94

DOI 10.17223/19988621/61/8

Keywords: linear viscoelasticity, integral operators, auxiliary constitutive equations, convergence, iterative algorithm.

Designing of the structures made of polymeric and composite viscoelastic materials requires development of the efficient and cost-effective methods for calculating stress-strain state. This paper proposes an iterative algorithm for solving such problems. The advantages of the algorithm over existing methods are the following: firstly, there is a possibility to parallelize the calculations of spatial and time components of the stress-strain state; secondly, this algorithm eliminates the need to integrate the history of stress and displacement variation in time. Moreover, the formulated iterative algorithm allows one to obtain the parameters of the stress-strain state of a viscoelastic solid without using integral operator inverse to the relaxation operator.

The proposed method involves the following concept. The integral operators of the shear and volume relaxation are replaced by some values of the elastic shear and volume moduli. The identity of the obtained elastic problem with initially stated viscoelastic problem is ensured by supplementing right-hand sides of the equilibrium equations and boundary conditions with the corresponding residuals. In addition, each residual involves the result of viscoelastic operator effect on the required parameters, and, therefore, it cannot be found directly. The numerical implementation assumes the iteration process to be built, in which the residuals on the current step are calculated using the solutions obtained on the previous one.

The paper describes the formulated iterative algorithm, as well as its application in conjunction with commercial or free computer software employed for a finite element analysis. The paper also includes an example of the model problem solution.

PAVLOV Mikhail Sergeevich (Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mspavlov@tpu.ru

SVETASHKOV Aleksandr Andreevich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: svetashkov@tpu.ru

KUPRIYANOV Nikolay Amyrosievich (Candidate of Technical Sciences, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kupriyanov@tpu.ru

REFERENCES

1. Lakes R. (2009) *Viscoelastic Materials*. New York: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9780511626722.
2. Pavlov M.S., Ponomarev S.A., Maritsky N., Ponomarev S.V. (2016) Mathematical model of composite fibre-glass aramide-wired cord rheological properties. *AIP Conference Proceeding*. 1772. DOI: 10.1063/1.4964582.
3. Doubal S., Doubal J. (2014) *Theory of Viscoelasticity. Handbook*. Delter.
4. Rzhantsyn A.R. (1968) *Teoriya polzuchesti* [Creep theory]. Moscow: Izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu.
5. Maxwell J.C. (1867) On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions*. 157. pp. 49–88. DOI: 10.1098/rstl.1867.0004.
6. Boltzman L. (1874) Zur theorie der elastischen nachwirkung. *Wiener Berichte*. 70. pp. 275–306. DOI: 10.1002/andp.18782411107.
7. Volterra V. (1912) *Lecons sur Les Fonctions de Lignes*. Paris: Gautierr Villars.
8. Volterra V. (1930) *Theory of Functionals and of Integral and integrodifferential Equations*. London; Glasgow: Blackie & Son Limited.
9. Adamov A.A., Matveenkov V.P., Trufanov N.A., Shadakov I.N. (2003) *Metody prikladnoy vyazkouprugosti* [Applied viscoelasticity methods]. Ekaterinburg: UrO RAN.
10. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. (1970) *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* [Foundations of the mathematical theory of thermal viscoelasticity]. Moscow: Nauka.
11. Reddy J.N. (2008) *An Introduction to Continuum Mechanics*. New York: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9781139178952.
12. Pipkin A.C. (1986) *Lectures of Viscoelasticity Theory*. New York: Springer Verlag. DOI: 10.1007/978-1-4612-1078-8.
13. Flugge W. (1967) *Viscoelasticity*. New York: Blaisdell Press.
14. Cristensen R.M. (1980) *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*. New York: Academic.
15. Koltunov M.A., Mayboroda V.P., Zubchaninov V.G. (1983) *Prochnostnye raschety izdeliy iz polimernykh materialov* [Strength calculations for the products made of polymeric materials]. Moscow: Vysshaya shkola.
16. Schapery R.A. (1969) On the characterization of nonlinear viscoelastic materials. *Polymer Engineering and Science*. 9(4). pp. 295–310. DOI: 10.1002/pen.760090410.
17. Tang Y., Li T., Ma X. (2016) Creep and recovery behavior analysis of space mesh structures. *Acta Astronautica*. 128. pp. 455–463. DOI: 10.1016/j.actaastro.2016.08.003.
18. Kwok K., Pellegrino S. (2017) Micromechanics models for viscoelastic plain-weave composite tape springs. *AIAA Journal*. 55(1). pp. 309–321. DOI: 10.2514/1.J055041.
19. Taylor R.L., Pister K.S., Goudreas G.L. (1970) Thermochemical analysis of viscoelastic solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2. pp. 45–59. DOI: 10.1002/nme.1620020106.
20. Simo J.C. (1987) On fully three-dimensional finite strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects. *Computer. Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 60(2). pp. 153–173. DOI: 10.1016/0045-7825(87)90107-1.
21. Schapery R.A. (1967) Analysis of viscoelastic composite materials. *Journal of Composite Materials*. 1(3). pp. 228–267. DOI: 10.1177/002199836700100302.
22. Malyy V.I., Trufanov N.A. (1987) Metod kvazikonstantnykh operatorov v teorii vyazkouprugosti anizotropnykh materialov [Methods of quasi-constant operators in the theory of viscoelasticity of the anisotropic materials]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*. 6. pp. 148–154.
23. Haj-Ali R., Muliana A. (2004) Numerical finite element formulation of the Schapery nonlinear viscoelastic material model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 59. pp. 25–45. DOI: 10.1002/nme.861.
24. Tsukrov I., Eroshkin O., Paul W., Celikkol B. (2005) Numerical modeling of nonlinear elastic components of mooring systems. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. 30(1). pp. 37–46. DOI: 10.1109/JOE.2004.841396.

25. Kulikov R.G., Trufanov N.A. (2009) Iterative method for solving quasistatic nonlinear viscoelastic problems. *Computating Continuum Mechanics*. 2(3). pp. 44–56
26. Barba S.P. (1990) Metod uprugikh resheniy v zadache o neustanovivsheysya polzuchesti [Method of elastic solutions to the problem of transient creep]. *Uchenye zapiski TSAGI*. 21(5). pp. 112–123.
27. Pavlov S.M., Svetashkov A.A. (1993) Iteration method for solving linear viscoelasticity problems. *Russian Physics Journal*. 36(4). pp. 129–136. DOI: 10.1007/BF00570749.
28. Svetashkov A., Kupriyanov N., Manabaev K. (2018) Modification of the iterative method for solving linear viscoelasticity boundary value problems and its implementation by finite element method. *Acta Mechanica*. 229(6). pp. 2539–2559. DOI: 10.1007/s00707-018-2129-z.
29. Svetashkov A.A. (2012) *Prikladnye zadachi mekhaniki vyazkouprugikh materialov* [Applied problems of mechanics of viscoelastic materials]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta.
30. Pobedrya B.E. (1995) *Chislennyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity]. Moscow: Izdatel'stvo MGU.
31. Rabotnov Yu.N. (1977). *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow: Nauka.

Received: September 6, 2018