

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/61/9

Б.А. Худаяров, Х.М. Комилова

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ТРУБОПРОВОДОВ, ТРАНСПОРТИРУЮЩИХ ДВУХФАЗНУЮ СРЕДУ В РЕЖИМЕ ПРОБКОВОГО ТЕЧЕНИЯ

Предложена математическая модель колебаний горизонтальных вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих двухфазную среду, учитывающая внутреннее давление. При исследовании колебаний трубопроводов с протекающей внутри газосодержащей жидкостью используется вязкоупругая модель теории балок. Для описания вязкоупругих свойств материала трубопровода использована наследственная теория вязкоупругости Больцмана – Вольтерра со слабосингулярными ядрами наследственности. Получено, что с увеличением давления внутри трубопровода происходит уменьшение критической скорости газового потока.

**Ключевые слова:** математическая модель, вычислительный алгоритм, вязкоупругость, трубопровод, двухфазное течение, критическая скорость.

Трубопроводное транспортирование жидкостей и газов играет значительную роль для экономического развития промышленности и производственной отрасли многих стран мира. Транспортировка по трубопроводам отличается от других способов транспортировки своей относительно высокой экологической безопасностью и непрерывным обеспечением продуктов в назначенные объекты отрасли экономики. При эксплуатации трубопроводов часто возникают случайные аварии, которые могут нанести ущерб людям и/или окружающей среде. Поэтому вибрации трубопроводов с протекающей жидкостью привлекают большое внимание исследователей. Вибрации отдельных участков трубопроводов с протекающей жидкостью являются сложными для изучения. В настоящее время имеется значительное число публикаций, посвященных решению задач о колебаниях и динамической устойчивости трубопроводов, транспортирующих жидкость [1–8].

В работе [9] предлагается численный подход для прогнозирования вибрации трехмерного трубопровода с протекающей жидкостью двухфазного потока. Результаты моделирования были подтверждены экспериментальными данными. На основе результатов моделирования предложен численный метод измерения скоростей двухфазного потока.

Моделирование сопряженных колебаний изогнутых труб, транспортирующих двухфазную среду в режиме слоистого течения, изучено авторами [10]. Для получения уравнения вибрации трубы используется уравнение Эйлера. Исследовано влияние основного радиуса, толщины и внутреннего радиуса трубы на критические скорости потока.

В настоящее время объекты нефтегазовой промышленности, жилищно-коммунального хозяйств и другие часто сталкиваются с проблемами ремонта и восстановления металлических трубопроводов из-за воздействия на них различных внешних факторов [11]. Одним из способов решения данной проблемы явля-

ется создание и применение новых видов материалов, в том числе композиционных, которые обладают рядом преимуществ.

Влияние функции частотной характеристики для вязкоупругих трубопроводов представлено в работе [12]. При рассмотрении упругих систем внутреннее трение материала учитывается с помощью обобщенной многоэлементной модели Кельвина-Фойгта. В ней исследовано влияние вязкоупругих свойств материала трубопровода на резонансные частоты и на частотно-зависимое демпфирование резонансных пиков.

Моделирование процессов деформирования трубы с учетом оснований на основе теории балок Эйлера – Бернулли было предложено в [13]. Для описания процессов деформирования вязкоупругого основания используется модель Кельвина. С применением принципа Гамильтона получены уравнения движения трубы. Определены критические скорости потока.

Для описания процессов деформирования вязкоупругих материалов используются различные модели наследственной теории вязкоупругости. Необходимость учета вязкоупругих свойств материалов в инженерных расчетах отразилось в появлении большого количества более или менее простых теорий.

В работе [14] приведены дифференциальные и интегральные модели, определяющие связь между напряжениями и деформациями наследственной теории вязкоупругости по определенным критериям, проанализированы их преимущества и недостатки.

В данной работе при решении динамических задач колебания трубопроводов из композиционных материалов применяется интегральная модель связи между напряжением и деформацией со слабосингулярными ядрами наследственности с учетом особенности Абеля.

При транспортировании по трубопроводам двухфазное пробковое течение сопровождается вибрационными нагрузками на трубопровод, которые ослабляют мощность потока транспортирования, а также может *привести* в отдельных случаях к *ускоренному* разрушению трубопроводов.

Исследование поведения различных видов и форм элементов вязкоупругого трубопровода в широком диапазоне внешних физических условий и внутренних нагрузок приводит к применению в этих задачах методов математического моделирования как основного средства решения проблемы. Таким образом, успешное решение вибрации вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих двухфазную среду в пробковом режиме, зависит от наличия адекватных математических моделей соответствующих физических процессов, эффективных численных методов, алгоритмов и программных средств для реализации моделей.

Настоящая работа посвящена решению колебательных процессов вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих газосодержащую жидкость.

### Постановка задачи

Рассмотрим прямой участок трубопровода длиной  $L$  в виде стержня, состоящего из композиционного материала, транспортирующего газожидкостную среду (рис. 1). Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось  $x$  проходила через центры тяжести сечений трубы, а начало оси совместим с левым концом трубы (рис. 2). Перемещения точек оси трубопровода по оси  $y$  представляют неизвестную функцию прогибов  $w(x, t)$ . Скорость течения жидкости вдоль оси трубопровода –  $U$ . Продольные колебания трубопровода не рассматриваются. Пред-

полагается, что движение плоское, а труба горизонтальна. Площадь поперечного сечения потока считается постоянной. Кроме того, в поперечной вибрации труба ведет себя как балка Эйлера – Бернулли и режим течения жидкости пробковый.

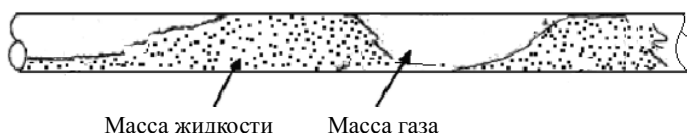


Рис. 1. Пробковый режим течения газосодержащей жидкости

Fig. 1. Slug flow of a gas-containing fluid

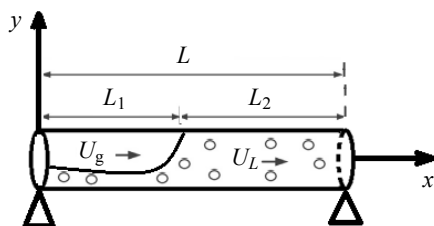


Рис. 2. Геометрия трубопровода

Fig. 2. Pipeline geometry

Интегральная модель Больцмана – Вольтерра, которая характеризует закон зависимости напряжения  $\sigma$  от деформации  $\varepsilon$  в одномерном случае, определяется из уравнения [15]

$$\sigma = E(1 - R^*)\varepsilon = E \left\{ \varepsilon - \int_0^t R(t - \tau)\varepsilon(\tau)d\tau \right\}. \quad (1)$$

Здесь  $E$  – модуль упругости материала;  $R(t - \tau)$  – ядро релаксации;  $t$  – время наблюдения;  $\tau$  – предшествующее моменту наблюдения время.

Геометрическая зависимость зададим уравнением

$$\varepsilon = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где  $w = w(x, t)$  – поперечный прогиб трубопровода типа стержня;  $z$  – расстояние от точки перенного сечения стержня до нейтральной оси.

Изгибающий момент

$$M = \int_{A_p} z \sigma dA_p, \quad (3)$$

где  $A_0$  – площадь поперечного сечения трубы.

Подставляя (1) и (2) в (3), получим

$$M = -EI(1 - R^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4)$$

где  $I = \int_{A_p} z^2 dA_p$ .

Основываясь на работах [16, 17], уравнение движения трубопроводов, транспортирующих двухфазную среду, с учетом свойств вязкости материала конструкций и внутреннее давление имеет вид

$$EI(1-R^*)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(m_L U_L + m_g U_g)\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + \\ + (m_L U_L^2 + m_g U_g^2 - N_0 + A_{Lp} P_i)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (m_L + m_g + m_p)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь  $E$  – модуль упругости материала;  $EI$  – жесткость изгиба;  $L$  – длина трубы;  $x$  – независимая переменная, продольная осевая координата трубы;  $w(x, t)$  – прогиб в сечении  $x$  в момент времени  $t$ ;  $m_L$ ,  $m_g$  и  $m_p$  – масса жидкости, газа и трубы соответственно, отнесенная к единице длины трубопровода;  $A_p$  – площадь поперечного сечения трубы;  $U_L$ ,  $U_g$  – скорости потока жидкости и газа соответственно;  $P_i$  – внутреннее давление;  $A_{Lp} = \pi r_1^2$ ;  $r_1$ ,  $A_{Lp}$  – внутренний радиус и площадь проходного сечения трубопровода соответственно;  $N_0$  – растягивающее (сжимающее) усилие;  $R^*$  – интегральный оператор вида

$$R^* \varphi(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau;$$

$R(t-\tau)$  – ядро релаксации Колтунова – Ржаницына [15]:

$$R(t-\tau) = A \exp(-\beta(t-\tau))(t-\tau)^{\alpha-1},$$

$$A > 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < \alpha < 1;$$

$A$  – параметр вязкости;  $\beta$  – параметр затухания;  $\alpha$  – параметр сингулярности, определяемый экспериментом.

Будем изучать решения уравнения (1) при следующих граничных условиях:

$$w(x, t) = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, x = L;$$

и начальных условиях

$$w(x, 0) = \vartheta(x), \quad \dot{w}(x, 0) = \psi(x),$$

где  $\vartheta(x)$ ,  $\psi(x)$  – заданные достаточно гладкие функции в области изменения своих аргументов.

### Метод решения

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N w_n(t) \varphi_n(x), \quad (5)$$

где  $w_n(t)$  – некоторые функции, подлежащие к определению, при этом функции  $\varphi_n(x)$  подобраны так, чтобы каждый член суммы (5) удовлетворял граничным условиям. В случае шарнирно опертой по краям трубы в разложении мето-

да Бубнова – Галеркина (5) аппроксимирующие функции прогиба выбираем в виде

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (6)$$

Подставим функцию (5) в уравнение (1) и применим к последнему процедуру Бубнова – Галеркина. В процессе интегрирования уравнения (1) от 0 до  $L$  параметры потока, включая массу на единицу длины и скорость потока для газовой и жидкой фазы в зоне газового пузыря и зоне жидкой фазы, интегрируются отдельно в интервале от нуля до  $L_1$ , и от  $L_1$  до  $L$  (рис. 1). После несложных преобразований получим систему интегродифференциальных уравнений относительно коэффициентов (5).

Введя следующие безразмерные величины

$$\frac{x}{L}, \frac{w}{L}, \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_L + m_g + m_p}} \quad (7)$$

и сохраняя при этом прежние обозначения, получим систему интегродифференциальных уравнений относительно  $w_n$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \Delta_{kn} \ddot{w}_n + 2 \sum_{n=1}^N G_{Lg, kn} \dot{w}_n - \\ & \sum_{n=1}^N P_{Lg, kn} w_n + \alpha_{0k} (\bar{N}_0 - \pi P_o) w_k + \alpha_{0k}^2 (1 - R^*) w_k = 0, \\ & w_n(0) = w_{0nm}; \quad \dot{w}_n(0) = \dot{w}_{0nm}; \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_{kn} &= \theta_{Lkn} + \theta_{gkn}; \quad G_{Lg, kn} = \beta_L u_L \gamma_{Lkn} + \beta_g u_g \gamma_{gkn}; \quad P_{Lg, kn} = \alpha_{0n} (\theta_{Lkn} u_L^2 + \theta_{gkn} u_g^2); \\ \theta_{gkn} &= \int_0^{\bar{L}_1} \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx; \quad \theta_{Lkn} = \int_{\bar{L}_1}^1 \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx; \quad \gamma_{gkn} = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\bar{L}_1} \varphi'_n(x) \varphi_k(x) dx; \\ \gamma_{Lkn} &= \frac{1}{n\pi} \int_{\bar{L}_1}^1 \varphi'_n(x) \varphi_k(x) dx; \quad \beta_g = \sqrt{\frac{m_g}{m_L + m_g + m_p}}; \quad \bar{P}_i = \frac{r_1^2 L^2 P_i}{EI}; \quad u_L = L U_L \sqrt{\frac{m_L}{EI}}; \\ u_g &= L U_g \sqrt{\frac{m_g}{EI}}; \quad \beta_L = \sqrt{\frac{m_L}{m_L + m_g + m_p}}; \quad \alpha_{0k} = k^2 \pi^2; \quad \bar{N}_0 = \frac{L^2 N_o}{EI}; \quad \bar{L}_1 = \frac{L_1}{L}. \end{aligned}$$

Точки над переменными означают взятие производной по времени соответствующего порядка.

Интегрирование системы (8) на основе многочленной аппроксимации прогиба с учетом различных факторов, выполнялось с помощью численного метода, предложенного в [14, 18, 19]. Дважды интегрируя систему (8) по  $t$ , запишем ее в интегральной форме и с помощью рационального преобразования исключим сингулярные особенности интегрального оператора  $R^*$ . Затем, полагая  $t = t_i$ ,  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 1, 2, \dots (\Delta t = \text{const})$  и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеций для вычисления  $w_{ikl} = w_{kl}(t_i)$ , получим формулы для ядра Колтунова – Ржаницына ( $R(t) = A \exp(-\beta t) t^{\alpha-1}$ ,  $0 < \alpha < 1$ ):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N (\Delta_{kn} + C_i G_{Lg, kn}) w_{in} &= \sum_{n=1}^N \Delta_{kn} (w_{0n} + \dot{w}_{0n} t_i) + \sum_{n=1}^N G_{Lg, kn} w_{0n} t_i - \\
- \sum_{j=0}^{i-1} C_j &\left\{ \sum_{n=1}^N G_{Lg, kn} w_{jn} - (t_i - t_j) \left( \sum_{n=1}^N P_{Lg, kn} w_{jn} + \alpha_{0k} (\bar{N}_0 - \pi \bar{P}_0) w_{jk} + \right. \right. \\
&\left. \left. + \alpha_{0k}^2 \left( w_{jk} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-s, k} \right) \right) \right\}, \quad (9)
\end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3, \dots$ ; где  $C_j, B_s$  – числовые коэффициенты применительно к квадратурным формулам трапеции [19–23]:

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{\Delta t}{2}; \quad C_j = \Delta t, \quad j = \overline{1, i-1}; \quad C_i = \frac{\Delta t}{2}; \\
B_0 &= \frac{\Delta t^\alpha}{2}; \quad s = j, \quad B_j = \frac{\Delta t^\alpha (j^\alpha - (j-1)^\alpha)}{2}; \quad B_s = \frac{\Delta t^\alpha ((s+1)^\alpha - (s-1)^\alpha)}{2}. \quad (10)
\end{aligned}$$

### Обсуждение результатов

Результаты вычислений представлены в таблице и изображены на графиках (рис. 3–10). В таблице приведены критические скорости потока в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик трубопровода. Как видно из таблицы, критическая скорость  $u_{г\text{кр}}$  при значениях параметра  $A = 0$  имеет значение 3.133, а при  $A = 0.1$ , составляет 1.911. Коэффициент критического значения скорости газовой фазы для вязкоупругих трубопроводов уменьшается относительно упругих трубопроводов на 39 %.

Исследовано влияние сингулярного параметра  $\alpha$  на критические значения скорости двухфазного потока. Увеличение реологического параметра  $\alpha$  **приводит к росту критических значений скорости потока**. При  $\alpha = 0.02$  критическая скорость газовой фазы составляет 2.159, а при  $\alpha = 0.75$  равна 3.062. Критические скорости потока отличаются друг от друга на 41.8 %.

Из таблицы видно, что влияние параметра затухания  $\beta$ , массы жидкости  $\beta_L$  и массы газа  $\beta_g$  на критическую скорость газовой фазы двухфазного потока незначительно.

Исследовано влияние параметра  $\bar{L}_1$ , характеризующего длину зоны газовой фазы, на критические скорости потока. Расчеты показали, что с увеличением длины зоны газовой фазы уменьшается значение критической скорости потока.

Изучено влияние параметра внутреннего давления на критическую скорость потока. Исследования были проведены при  $\bar{P}_i = 0.5; 1; 2; 2.5$ . Из таблицы видно, что с ростом внутреннего давления критическая скорость потока снижается. Это объясняется тем, что внутреннее давление приводит к появлению поперечных сил, действующих на трубопровод, так как трубопровод, расположенный на опорах имеет прогиб от веса трубопровода и веса жидкости, протекающей через нее.

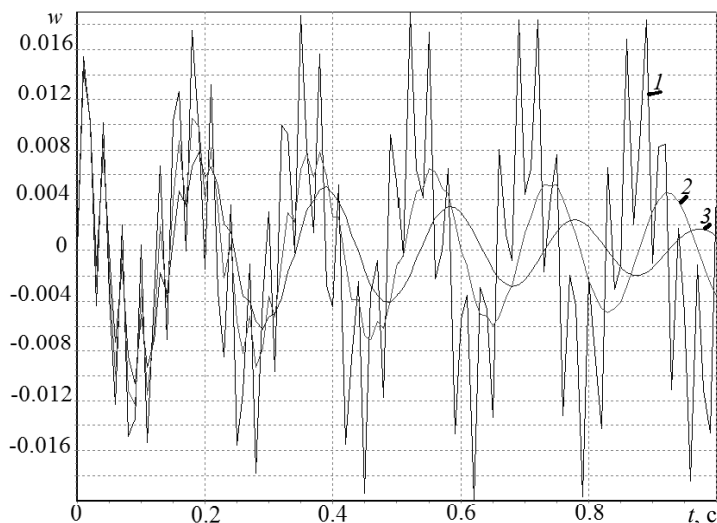
Изучено влияние скорости жидкости на критическую скорость газовой фазы. Анализ результатов показывает следующее: увеличение скорости жидкости  $u_L$  приводит к уменьшению критической скорости газа  $u_{г\text{кр}}$  на 21.8 %.

**Зависимость критической скорости двухфазного потока  
от физико-механических и геометрических параметров трубопровода**

$A$	$\alpha$	$\beta$	$\beta_L$	$\beta_g$	$\bar{L}_1$	$\bar{N}_o$	$\bar{P}_i$	$u_L$	$u_{gr}$
0 0.005 0.05 0.1	0.25	0.05	0.02	0.01	0.27	0.025	-	0.3	3.133 3.086 2.610 1.911
0.01	0.02 0.05 0.1 0.4 0.75	0.05	0.02	0.01	0.27	0.025	-	0.3	2.159 2.760 2.942 3.055 3.062
0.01	0.25	0.01 0.08	0.02	0.01	0.27	0.025	-	0.3	3.031 3.037
0.01	0.25	0.05	0.001 0.1 0.7	0.01	0.27	0.025	-	0.3	3.044 3.051 3.034
0.01	0.25	0.05	0.02	0.007 0.1 0.5	0.27	0.025	-	0.3	3.038 3.041 3.055
0.01	0.25	0.05	0.02	0.01	0.2 0.3 0.32	0.025	-	0.3	3.042 3.033 3.027
0	0.25	0.05	0.02	0.01	0.27	0 5 10 20	-	0.3	3.125 3.812 4.447 5.346
0.01	0.25	0.05	0.02	0.01	0.27	0 0.1 3 6 15	-	0.3	3.027 3.051 3.489 3.894 4.918
0.01	0.25	0.05	0.02	0.01	0.27	0.025	0.5 1 2 2.5	0.3	2.771 2.472 1.717 1.189
0.01	0.25	0.05	0.02	0.01	0.27	0.025	30	0.2 0.5 0.8 1.2	1.738 1.679 1.588 1.359

Исследовалось влияние вязкоупругих свойств материала на амплитуды и частоты колебаний трубопровода (рис. 3). Для упругого трубопровода колебание меняется по периодическому закону (кривая 1). Для вязкоупругих трубопроводов ( $A = 0.01$  (кривая 2);  $A = 0.1$  (кривая 3)) амплитуда колебаний затухает.

На рис. 4 изображены кривые  $w = w(0.5, t)$ , построенные для различных значений параметров  $\beta$ . Кривые вычислены для трубопровода с параметрами  $A = 0.1$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{N}_o = 5$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $u_L = 0.3$ ;  $u_g = 1.5$ . Как видно из графиков, влияние параметра  $\beta$  незначительно. Это объясняется тем, что экспоненциальное ядро релаксации не способно описать полностью наследственные свойства материала конструкций.



**Рис. 3.** Зависимость прогиба трубы  $w$  от времени  $t$  при различных параметрах вязкости:

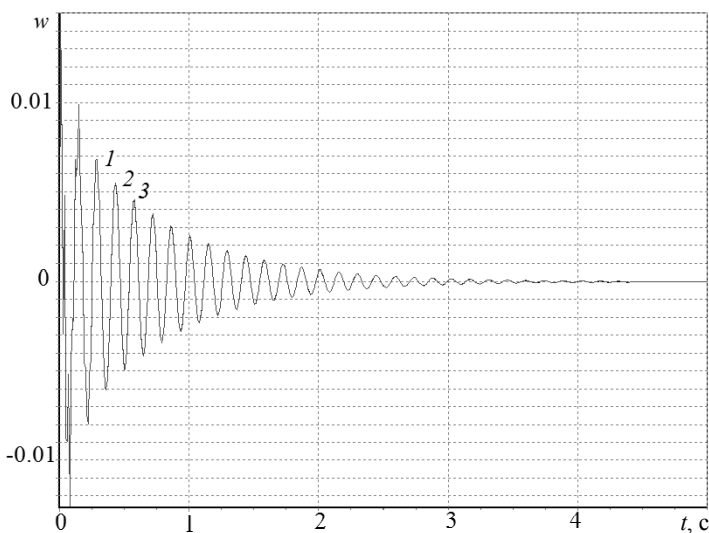
$A = 0$  (1);  $A = 0.01$  (2);  $A = 0.1$  (3);  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;

$$\bar{L}_1 = 0.27; \bar{P}_i = 0; \bar{N}_o = 5; u_L = 0.3; u_g = 1.5$$

**Fig. 3.** Tube flexure  $w$  as a function of time  $t$  at various viscosity parameters:

$A =$  (1) 0, (2) 0.01, and (3) 0.1;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;

$$\bar{L}_1 = 0.27; \bar{P}_i = 0; \bar{N}_o = 5; u_L = 0.3; u_g = 1.5$$



**Рис. 4.** Зависимость прогиба трубы  $w$  от времени  $t$  при  $\beta = 0.01$  (1);  $\beta = 0.5$  (2);  $A = 0.1$ ;

$\alpha = 0.25$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 5$ ;  $u_L = 0.3$ ;  $u_g = 1.5$

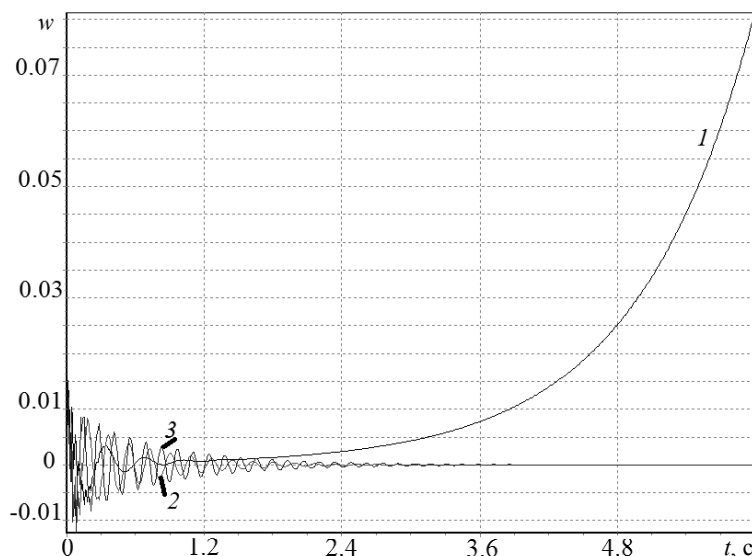
**Fig. 4.** Tube flexure  $w$  as a function of time  $t$  at  $\beta =$  (1) 0.01 and (2) 0.5;  $A = 0.1$ ;  $\alpha = 0.25$ ;

$\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 5$ ;  $u_L = 0.3$ ;  $u_g = 1.5$



Изучено влияние параметра растягивающего усилия на поведение трубопровода (рис. 5). При отсутствии растягивающего усилия (кривая 1) амплитуда колебаний уже с момента  $t \geq 2.4$  резко возрастает. Подобные колебания являются нежелательными, так как приводят к зарождению и развитию усталостных трещин.

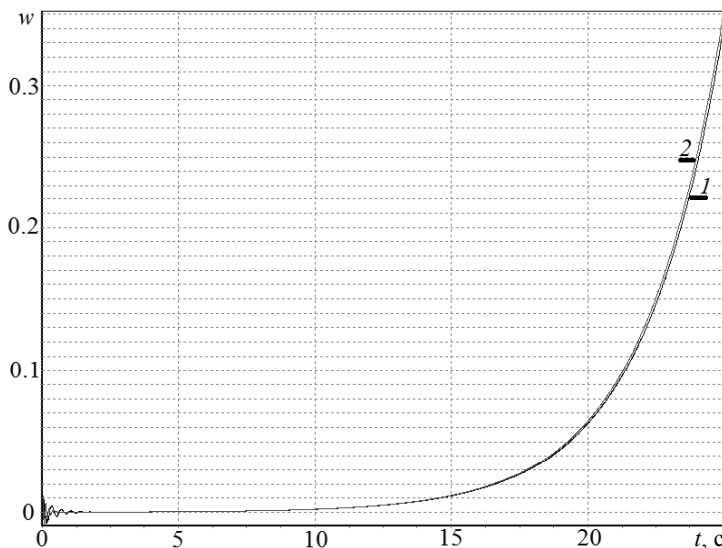
Изучено влияние внешних растягивающих усилий в продольном направлении трубопровода. Из таблицы видно, что рост растягивающих усилий в продольном направлении трубопровода приводит к увеличению критической скорости потока для газовой фазы. При  $\bar{N}_o = 0$  и  $\bar{N}_o = 20$  критическая скорость потока для газовой фазы соответственно равна 3.125 и 5.36. Напротив, сжимающие усилия  $\bar{N}_o$  приводят к такому же пропорциональному снижению критической скорости потока для газовой фазы.



**Рис. 5.** Зависимость прогиба трубы  $w$  от времени  $t$  при  $\bar{N}_o = 0$ ; (1);  $\bar{N}_o = 5$ ; (2);  $\bar{N}_o = 10$ ; (3);  $A = 0.1$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 5$ ;  $u_L = 0.3$ ;  $u_g = 2.5$

**Fig. 5.** Tube flexure  $w$  as a function of time  $t$  at  $\bar{N}_o = (1) 0$ , (2) 5, and (3) 10;  $A = 0.1$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 5$ ;  $u_L = 0.3$ ;  $u_g = 2.5$

Проведены исследования влияния параметра  $\bar{L}_1$  на колебательный процесс вязкоупругого трубопровода ( $A = 0.1$ ). При  $\bar{L}_1 = 0.32$  (кривая 2) мы имеем колебательное движение с быстро возрастающими амплитудами, которое может привести конструкцию к разрушению (рис. 6). При этом скорость газового потока  $u_g = 2.3$  является значительно выше от критической скорости  $u_{gcr}$  для значений  $\bar{L}_1 = 0.22$  и  $\bar{L}_1 = 0.32$ . С уменьшением длины зоны газовой фазы можно устранить опасность колебательных движений. Газовый поток скапливается в верхней части трубы, принимает «снарядную» форму, и центр тяжести потока смещается вниз по сечению трубы. Это приводит к изменению положения центра тяжести потока при движении жидкости и появлению дополнительных нагрузок.



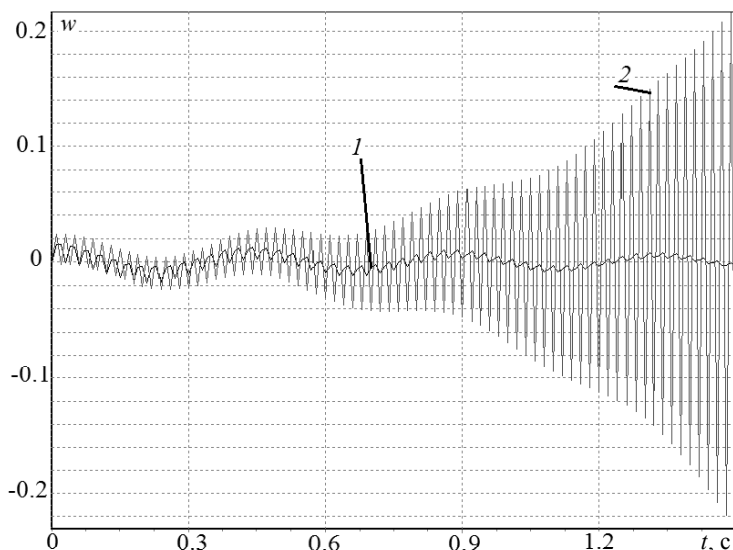
**Рис. 6.** Зависимость прогиба трубы  $w$  от времени  $t$  при  $\bar{L}_1 = 0.22$  (1);  $\bar{L}_1 = 0.32$  (2);  $A = 0.1$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 5$ ;  $u_L = 0.3$ ;  $u_g = 2.3$

**Fig. 6.** Tube flexure  $w$  as a function of time  $t$  at  $\bar{L}_1 = (1) 0.22$  and (2) 0.32;  $A = 0.1$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 5$ ;  $u_L = 0.3$ ;  $u_g = 2.3$

На рис. 7 приведено влияние параметра  $\beta_g$ , характеризующего массу газа, на процесс колебаний трубопровода. По оси ординат на фигуре откладывается параметр прогиба трубопровода, а по оси абсцисс – параметр безразмерного времени. Первая из этих кривых построена при  $\beta_g = 0.01$ , а вторая кривая отражает влияние параметра  $\beta_g = 0.75$  при следующих значениях:  $A = 0.01$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 0.05$ ;  $u_L = 0.3$ ;  $u_g = 2.91$ . При значениях параметра  $\beta_g = 0.75$  скорость потока является критической, что приводит к резкому возрастанию амплитуды колебаний. С уменьшением параметра  $\beta_g$  амплитуда колебаний быстро затухает.

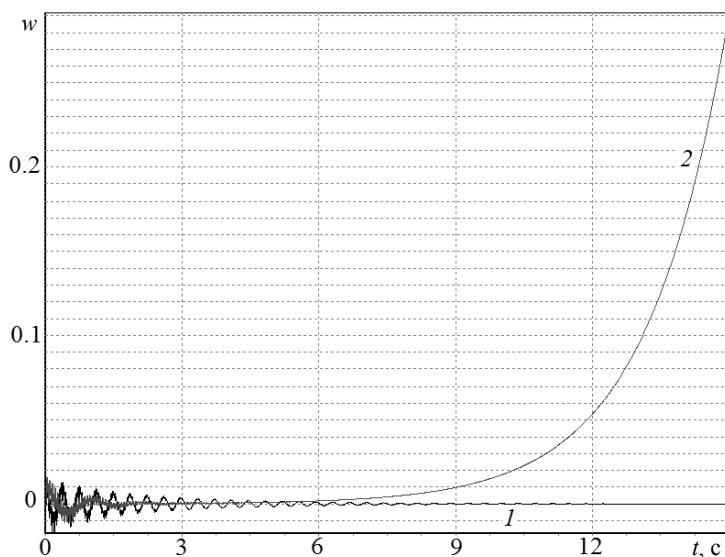
На рис. 8 показана зависимость значения прогиба  $w$  от времени  $t$  при различных значениях скорости жидкости  $u_L$ :  $u_L = 1.542$  (кривая 1);  $u_L = 1.962$  (кривая 2). При скорости потока жидкости  $u_L = 1.962$  проявляется динамическая неустойчивость, поведение трубопровода представляет собой колебания со стремительно возрастающими амплитудами, что может привести к разрушению конструкции (кривая 2).

Было исследовано влияние скорости газового потока на процесс колебания трубопровода (рис. 9). Скорости газового потока приняты равными  $u_g = 2.5$  (кривая 1);  $u_g = 2.75$  (кривая 2). Осевое растягивающее усилие не учитывается. Как видно из рисунка, по мере увеличения параметра скорости  $u_g$  газового потока происходит заметное ухудшение колебательного процесса трубопровода (кривая 2).



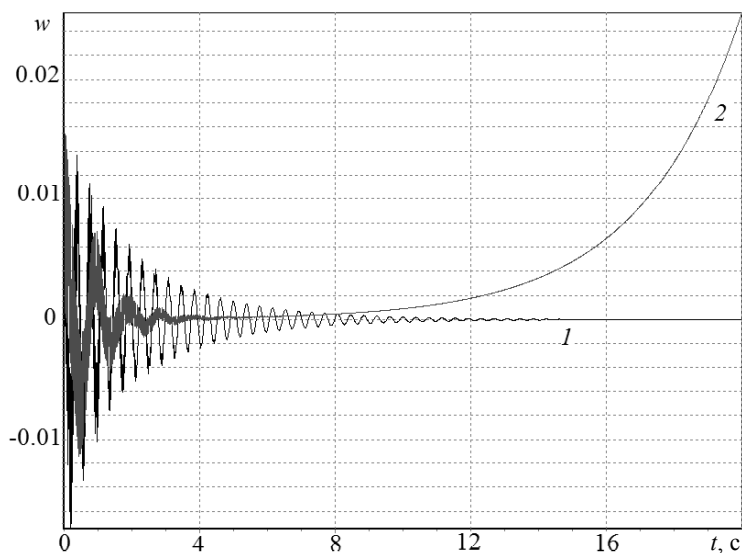
**Рис. 7.** Зависимость прогиба трубы  $w$  от времени  $t$  при  $\beta_g = 0.01$  (1);  $\beta_g = 0.75$  (2);  $A = 0.01$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 0.05$ ;  $u_L = 0.3$ ;  $u_g = 2.91$

**Fig. 7.** Tube flexure  $w$  as a function of time  $t$  at  $\beta_g = (1)$  0.01 and (2) 0.75;  $A = 0.01$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 0.05$ ;  $u_L = 0.3$ ;  $u_g = 2.91$



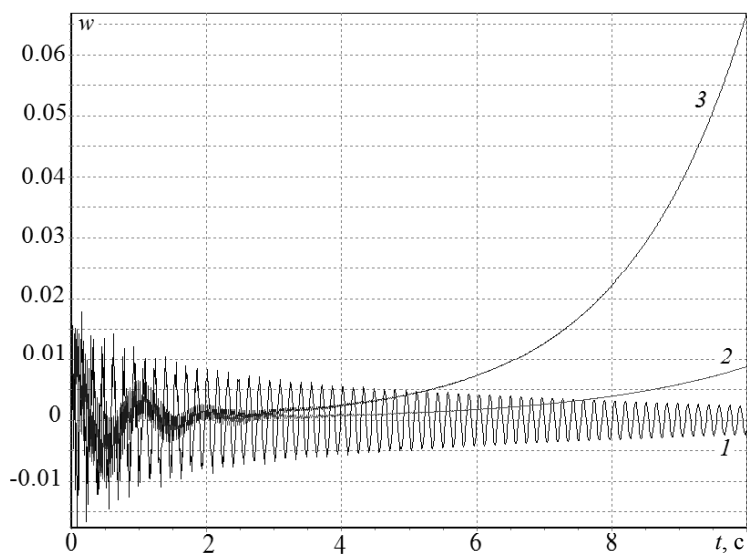
**Рис. 8.** Зависимость прогиба трубы  $w$  от времени  $t$  при  $u_L = 1.542$  (1);  $u_L = 1.962$  (2);  $A = 0.01$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 0.05$ ;  $u_g = 2.5$

**Fig. 8.** Tube flexure  $w$  as a function of time  $t$  at  $u_L = (1)$  1.542 and (2) 1.962;  $A = 0.01$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 0.05$ ;  $u_g = 2.5$



**Рис. 9.** Зависимость  $w(t)$  при различных скоростях потока для газовой фазы  $u_g = 2.5$  (1);  $u_g = 2.75$  (2);  $A = 0.01$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 0.05$ ;  $u_L = 1.5$

**Fig. 9.**  $w(t)$  dependency at various velocities of the gas phase flow  $u_g = (1)$  2.5 and (2) 2.75;  $A = 0.01$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 0.05$ ;  $u_L = 1.5$



**Рис. 10.** Зависимость прогиба трубы  $w$  от времени  $t$  при  $\bar{P}_i = 0$  (1);  $\bar{P}_i = 3.03$  (2);  $\bar{P}_i = 3.04$  (3);  $A = 0.01$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 5$ ;  $u_L = 0.3$ ;  $u_g = 2.2$

**Fig. 10.** Tube flexure  $w$  as a function of time  $t$  at  $\bar{P}_i = (1)$  0, (2) 3.03, and (3) 3.04;  $A = 0.01$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\beta_L = 0.02$ ;  $\beta_g = 0.01$ ;  $\bar{L}_1 = 0.27$ ;  $\bar{P}_i = 0$ ;  $\bar{N}_o = 5$ ;  $u_L = 0.3$ ;  $u_g = 2.2$

Внутреннее давление существенно влияет на динамические характеристики трубопровода, транспортирующего газосодержащую жидкость (рис. 10). Из рисунка видно, что по мере увеличения параметра внутренних давлений  $\bar{P}_i$  происходит уменьшение скорости и увеличение амплитуды колебаний. При  $\bar{P}_i = 3.03$  и  $\bar{P}_i = 3.04$  скорость газового потока превышает скорость критических, колебания приобретают быстро возрастающие амплитуды.

### Заключение

Разработана математическая модель колебаний вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих двухфазные среды с учетом внутреннего давления жидкости. Разработан вычислительный алгоритм для решения задач расчета колебательных процессов трубопроводов с протекающим двухфазным потоком. При численном моделировании задачи исследован ряд динамических эффектов:

- выявлено, что увеличение внутреннего давления приводит к уменьшению критической скорости двухфазного потока;
- установлено, что увеличение растягивающего усилия приводит к возрастанию критической скорости двухфазного потока;
- показано, что учет вязкоупругих свойств материала конструкции приводит к уменьшению критической скорости потока.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Xiao-Ye Mao, H Ding, Li-Qun Chen. Steady-state response of a fluid-conveying pipe with 3:1 internal resonance in supercritical regime // *Nonlinear Dynamics*. 2016. V. 86(2). P. 795–80. DOI: 10.1007/s11071-016-2924-9.
2. Paidoussis M.P., Li G.X. Pipes conveying fluid: a model dynamical problem // *J. Fluid. Struct.* 1993. V. 7. P. 137–204.
3. Bezborodov S.A., Ulanov A.M. Calculation of vibration of pipeline bundle with damping support made of MR material // *Procedia Engineering*. 2017. V. 176. P. 169–174. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.285>.
4. Kaiming Bi, Hong Hao. Numerical simulation on the effectiveness of using viscoelastic materials to mitigate seismic induced vibrations of above-ground pipelines // *Engineering Structures*. 2016. V. 123. P. 1–14. DOI: 10.1016/j.engstruct.2016.05.022.
5. Hu Ding, Jinchen Ji, Li-Qun Chen. Nonlinear vibration isolation for fluid-conveying pipes using quasi-zero stiffness characteristics // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2019. V. 121. P. 675–688. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.11.057.
6. Khudayarov B.A., Turaev F.Zh. Mathematical Simulation of nonlinear oscillations of viscoelastic pipelines conveying fluid // *Applied Mathematical Modelling*. 2019. V. 66. P. 662–679. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.10.008>.
7. Zahid I. Al-Hashimy, Hussain H. Al-Kayiem and Rune W. Time. Experimental investigation on the vibration induced by slug flow in horizontal pipe // *ARP Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2016. Vol. 11(20).
8. Belen'kij M.Ya., Gotovskij M.A., Fokin B.S. Vibration elimination in pipe-lines for transport of two-phase and boiling flows // *Teplotehnergetika*. 1996. No. 3. P. 41–46.
9. Ahmed M. Nagib Elmekawy, Mohamed A. Shabara, Hassan Elgamel and Bassuny El-Souhily. Numerical analysis of the prediction of the two-phase flow rate by measuring vibration of pipelines // *ASME 2017 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. Paper No. IMECE2017-71038. P. V04AT05A039. DOI: 10.1115/IMECE2017-71038.
10. Wan Yi, Zhao Jianhua, Zhang Ling. Mathematical modeling of coupled vibration of curved pipes conveying stratified two-phase flow // *Chinese Journal of Applied Mechanics*. 2015. V. 32.

11. Ягубов Э.З., Цхадая Н.Д., Ягубов З.Х. Многоканальные трубопроводы для транспортировки нефтегазовых сред и восстановление изношенных нефтегазопроводов // Научные труды. 2013. № 1. С. 57–63.
12. Jinzhe Gong, Aaron Zecchin, Martin Lambert, Angus Simpson. Study on the frequency response function of viscoelastic pipelines using a multi-element Kelvin-Voigt model // Procedia Engineering. 2015. 119. P. 226–234. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.08.880.
13. Hao T.Y. Establishment of mathematical model of buried pipeline on nonlinear soil dynamic model // Advanced Materials Research. 2012. V. 452–453. P. 334–338. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.452-453.334>.
14. Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А., Абдукаримов А. Исследование влияния ядра наследственности на решение линейных и нелинейных динамических задач наследственнодеформируемых систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. Российская академия наук. 2007. № 4. С. 107–110. <https://doi.org/10.3103/S1052618807040048>.
15. Koltunov M.A. Creep and Relaxation. Moscow: Higher School. 1976.
16. Dai H., Wang L., Ni Q. Dynamics of a fluid-conveying pipe composed of two different materials // Int. J. Eng. Sci. 2013. V. 73. P. 67–76. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2013.08.008.
17. Monette C., Pettigrew M.J. Fluid elastic instability of flexible tubes subjected to two-phase internal flow // J. Fluids Struct. 2004. V. 19. P. 943–956. DOI: 10.1016/j.jfluidstruct.2004.06.003
18. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегродифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. 269 с.
19. Badalov F.B., Eshmatov Kh. Yusupov M. Some methods of solution of systems of integro-differential equations encountered in problems of viscoelasticity // Applied Mathematics and Mechanics. 1987. 51. P. 867–871.
20. Khudayarov B.A. Flutter of a viscoelastic plate in a supersonic gas flow // International Applied Mechanics. 2010. V.46(4). P. 455–460. <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0328-y>.
21. Khudayarov B.A. Numerical Analysis of the nonlinear oscillation of viscoelastic plates // International Applied Mechanics. 2005. V. 41. P. 538–542. <https://doi.org/10.1007/s10778-005-0121-5>.
22. Khudayarov B.A., Bandurin N.G. Numerical investigation of nonlinear vibrations of viscoelastic plates and cylindrical panels in a gas flow // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2007. V. 48. P. 279–284. <https://doi.org/10.1007/s10808-007-0036-5>.
23. Худаяров Б.А., Тураев Ф.Ж. Численное моделирование нелинейных колебаний вязкоупругого трубопровода с жидкостью // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 5(43). С. 90–98. DOI: 10.17223/19988621/43/10.

Статья поступила 12.05.2019 г.

Khudayarov B.A., Komilova K.M. (2019) NUMERICAL SIMULATION OF VIBRATIONS OF VISCOELASTIC PIPELINES CONVEYING TWO-PHASE MEDIUM IN A SLUG FLOW REGIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 95–110

DOI 10.17223/19988621/61/9

Keywords: mathematical model, computational algorithm, viscoelasticity, pipeline, two-phase flow, critical velocity.

A mathematical model of vibrations of horizontal viscoelastic pipelines conveying two-phase medium in a slug flow taking into account the internal pressure is proposed in the paper. In the study on vibrations of the pipeline conveying gas-containing fluid, a viscoelastic model of the theory of beams is used. The hereditary Boltzmann-Volterra theory of viscoelasticity with weakly singular hereditary kernels is used to describe the viscoelastic properties of the pipeline material. By means of the Bubnov-Galerkin method, the equations of the pipeline motion are reduced to the study of a system of ordinary integro-differential equations (IDE) with variable coefficients

relative to a time function. The solution to the IDE is obtained numerically using the quadrature formulas. The effect of both gas and fluid phase flow rates, tensile forces in a longitudinal direction of the pipeline, internal pressure parameters, singularity parameters in the hereditary kernels on the vibrations of the pipeline made of composite material are studied numerically. It is found that the critical velocity of the gas flow decreases with an increase in the pressure inside the pipeline.

**KHUDAYAROV Bakhtiyar Alimovich** (Doctor of Technical Sciences, Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: bakht-flpo@yandex.ru

**KOMILOVA Kholidakhon Mukhtarovna** (Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: komilova591@mail.ru

#### REFERENCES

1. Xiao-Ye Mao, Hu Ding, Li-Qun Chen (2016) Steady-state response of a fluid-conveying pipe with 3:1 internal resonance in supercritical regime. *Nonlinear Dynamics*. 86(2). pp. 795–80. DOI: 10.1007/s11071-016-2924-9.
2. Paidoussis M.P., Li G.X. (1993) Pipes conveying fluid: a model dynamical problem. *Journal of Fluids and Structures*. 7. pp. 137–204. DOI: 10.1006/jfls.1993.1011.
3. Bezborodov S.A., Ulanov A.M. (2017) Calculation of vibration of pipeline bundle with damping support made of MR material. *Procedia Engineering*. 176. pp. 169–174. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.02.285.
4. Kaiming Bi, Hong Hao (2016) Numerical simulation on the effectiveness of using viscoelastic materials to mitigate seismic induced vibrations of above-ground pipelines. *Engineering Structures*. 123. pp. 1–14. DOI: 10.1016/j.engstruct.2016.05.022.
5. Hu Ding, Jinchen Ji, Li-Qun Chen (2019) Nonlinear vibration isolation for fluid-conveying pipes using quasi-zero stiffness characteristics. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 121. pp. 675–688. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.11.057.
6. Khudayarov B.A., Turaev F.Zh. (2019) Mathematical simulation of nonlinear oscillations of viscoelastic pipelines conveying fluid. *Applied Mathematical Modelling*. 66. pp. 662–679. DOI: 10.1016/j.apm.2018.10.008.
7. Zahid I. Al-Hashimy, Hussain H. Al-Kayiem and Rune W. Time (2016) Experimental investigation on the vibration induced by slug flow in horizontal pipe. *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*. 11(20). pp. 12134–12139.
8. Belen'kiy M.Ya., Gotovskiy M.A., Fokin B.S. (1996) Ustranenie vibratsiy truboprovodov, transportiruyushchikh vskipayushchie i dvukhfaznye potoki [Vibration elimination in the pipelines conveying two-phase and boiling flows]. *Teploenergetika – Thermal Engineering*. 3. pp. 41–46.
9. Ahmed M. Nagib Elmekawy, Mohamed A. Shabara, Hassan Elgamal, Bassuny El-Souhily (2017) Numerical analysis of the prediction of the two-phase flow rate by measuring vibration of pipelines. *International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. IMECE2017-71038, V04AT05A039. DOI: 10.1115/IMECE2017-71038.
10. Wan Y., Zhao J., Zhang L. (2015) Mathematical modeling of coupled vibration of curved pipes conveying stratified two-phase flow. *Chinese Journal of Applied Mechanics*. 32. DOI: 10.11776/cjam.32.03.C010.
11. Yagubov E.Z., Tskhadaya N.D., Yagubov Z.Kh. (2013) Mnogokanal'nye truboprovody dlya transportirovki neftegazovykh sred i vosstanovlenie iznoshennykh neftegazoprovodov [Multichannel pipelines for oil and gas media transportation and a restoration of the depreciated oil and gas pipelines]. *Nauchnye trudy*. 1. pp. 57–63.
12. Gong J., Zecchin A., Lambert M., Simpson A. (2015) Study on the frequency response function of viscoelastic pipelines using a multi-element Kelvin-Voigt model. *Procedia Engineering*. 119. pp. 226–234. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.08.880.

13. Hao T.Y. (2012) Establishment of mathematical model of buried pipeline on nonlinear soil dynamic model. *Advanced Materials Research*. 452–453. pp. 334–338. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.452-453.334.
14. Badalov F.B., Khudayarov B.A., Abdukarimov A. (2007) Effect of the hereditary kernel on the solution of linear and nonlinear dynamic problems of hereditary deformable systems. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 36. pp. 328–335. DOI: 10.3103/S1052618807040048.
15. Koltunov M.A. (1976) *Polzuchest' i relaksatsiya* [Creep and relaxation]. Moscow: Vysshaya shkola.
16. Dai H., Wang L., Ni Q. (2013) Dynamics of a fluid-conveying pipe composed of two different materials. *International Journal of Engineering Science*. 73. pp. 67–76. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2013.08.008.
17. Monette C., Pettigrew M.J. (2004) Fluid elastic instability of flexible tubes subjected to two-phase internal flow. *Journal of Fluids and Structures*. 19. pp. 943–956. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2004.06.003.
18. Badalov F.B. (1987) *Metody resheniya integral'nykh i integrodifferentsial'nykh uravneniy nasledstvennoy teorii vyazkoupругosti* [Methods for solving integral and integro-differential equations of the hereditary theory of viscoelasticity]. Tashkent: Mekhnat.
19. Badalov F.B., Eshmatov Kh., Yusupov M. (1987) Some methods of solution of systems of integro-differential equations encountered in problems of viscoelasticity. *Applied Mathematics and Mechanics*. 51. pp. 867–871.
20. Khudayarov B.A. (2010) Flutter of a viscoelastic plate in a supersonic gas flow. *International Applied Mechanics*. 46(4). pp. 455–460. DOI:10.1007/s10778-010-0328-y.
21. Khudayarov B.A. (2005) Numerical analysis of the nonlinear oscillation of viscoelastic plates. *International Applied Mechanics*. 41. pp. 538–542. DOI: 10.1007/s10778-005-0121-5.
22. Khudayarov B.A., Bandurin N.G. (2007) Numerical investigation of nonlinear vibrations of viscoelastic plates and cylindrical panels in a gas flow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 48. pp. 279–284. DOI: 10.1007/s10808-007-0036-5.
23. Khudayarov B.A., Turaev F.Zh. (2016) Chislennoe modelirovanie nelineynykh kolebaniy vyazkoupругogo truboprovoda s zhidkost'yu [Numerical simulation of nonlinear oscillations of a viscoelastic pipeline with fluid]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 90–98. DOI:10.17223/19988621/43/10.

Received: May 12, 2019