

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/61/10

И.В. Щербаков, Б.А. Люкшин

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ОТКЛИКА ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Произведена оценка напряженно-деформированного состояния элемента конструкции, выполненного в виде пластины из изотропного или ортотропного материала, при действии импульсной нагрузки. Рассмотрены различные условия закрепления на контуре пластины, нагрузка задается в виде ускорения точек закрепления в направлении нормали к пластине. Актуальность такой информации особенно важна для случая, когда ее невозможно определить в реальных условиях использования изделий. В силу особенности геометрии элемента предлагается использовать соотношения теории пластин. Уравнения движения решаются с применением конечно-разностных соотношений. Оценивается влияние соотношения упругих свойств по различным направлениям (по осям ортотропии) на параметры напряженно-деформированного состояния пластины и характер изменения их во времени.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, изотропный материал, ортотропный материал, напряженно-деформированное состояние, уравнение движения.

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии (НДС) элемента конструкции, представляющего собой пластину, закрепленную по ее контуру. Точки (или линии) закрепления находятся на жестком основании, причем это основание получает импульс ускорения известной величины и формы в направлении, перпендикулярном плоскости пластины. Если принять, что пластина является абсолютно жесткой (известная из теоретической механики модель абсолютно твердого тела), то все ее точки будут иметь те же ускорения, скорости и перемещения (параметры движения), что и заданные на контуре величины. В действительности за счет деформирования пластины в разных ее точках эти параметры движения будут различными. Интерес представляют их экстремальные значения, в частности параметры ускорения, поскольку именно они определяют массовые силы (силы инерции) как в самой пластине, так и в любых элементах, связанных с ее поверхностью. Эти силы могут вызвать нарушение целостности пластины или элементов.

НДС ортотропной пластины при действии динамической нагрузки предлагается оценивать с использованием средств вычислительной механики на основе соотношений теории пластин, т.е. использовать для анализа конструкции математическое моделирование в сочетании с численной реализацией.

### Изотропные и ортотропные модели пластин

Рассматривается реакция пластины на ударную нагрузку [1, 2], вызывающую ускорение пластины вдоль нормали к ней. Закон изменения нагрузки во времени задается кусочно-линейной функцией, в частности, в виде трапеции. Такой выбор

определяется тем, что при ограниченном числе параметров, определяющих форму импульса, можно получить хорошую аппроксимацию реальной нагрузки.

Выбирая систему координат, связанную с жестким основанием, можно исключить из рассмотрения общую для всех точек пластины постоянную составляющую перемещений. Это важно при численной реализации с использованием конечно-разностных соотношений, так как перемещения, определяющие деформации, много меньше этой составляющей, а разности относительно близких величин считаются с большими ошибками за счет округления.

Поскольку эта система в силу постановки задачи не является инерциальной (закон движения основания – и соответственно начала координат – задается в виде импульса ускорения), в уравнения движения необходимо ввести массовые силы, отражающие характер системы отсчета.

Для случая, когда материал пластины является изотропным, в простейшем линейном случае уравнение движения можно записать в виде [3, 4]

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho G(t) = 0, \quad (1)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12}$  – так называемая цилиндрическая жесткость пластины;  $E$  – модуль

упругости материала пластины,  $h$  – ее толщина;  $w(x, y, t)$  – прогибы пластины, т.е. перемещения вдоль нормали;  $x, y$  – декартовы координаты вдоль сторон пластины;  $t$  – время;  $G$  – заданное ускорение, тогда  $\rho G(t)$  – массовые силы, возникающие

за счет выбора системы отсчета;  $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$  – дифференциальный

оператор четвертого порядка.

Во многих случаях при изготовлении конструкций или их элементов рациональным является вариант, когда материал обладает анизотропией деформационно-прочностных свойств [5, 6]. Для упрочненных волокнами полимерных композиций анизотропия может регулироваться относительно простыми средствами, например, путем варьирования направлений укладки и соотношений между количествами подкрепляющих волокон. В работе рассматривается случай достаточно распространенных ортотропных материалов. В этом случае уравнение движения по форме несколько усложняется и принимает вид

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h G(t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad (2)$$

$$D_{nm} = \frac{a_{nm} h^3}{12} (n, m = 1, 2), \quad (3)$$

где (3) – цилиндрическая жесткость пластины, в данном случае различная для разных направлений в силу разных модулей упругости материала в двух взаимно перпендикулярных направлениях, а коэффициенты  $a_{nm}$  для ортотропного материала определяются по соотношениям

$$a_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad a_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad a_{12} = \frac{E_2 \nu_1}{1 - \nu_1 \nu_2}. \quad (4)$$

В дополнение к ранее введенным обозначениям принимается, что  $E_1, E_2$  – модули Юнга вдоль сторон прямоугольной пластины;  $\nu_1, \nu_2$  – коэффициенты Пуассона.

Начальные условия принимаются в виде равенства нулю перемещений и скоростей перемещений при  $t = 0$ :

$$w(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Для описания закрепления пластины на ее контуре были применены два типа граничных условий – шарнирное и жесткое закрепление. Для шарнирного закрепления равны нулю перемещения и вторые производные от них, последнее означает отсутствие моментов на шарнирах. При так называемом жестком защемлении равны нулю перемещения и первая производная, что характеризует запреты на смещения и повороты кромок пластины. Условия для свободных границ записываются в виде равенств второй и третьей производных от перемещений по нормали к контуру пластины нулю. Это означает отсутствие приложенных моментов и перерезывающих сил на этих границах. В известном смысле жесткая и шарнирная заделки берут вилку реальное закрепление на контуре. Для того чтобы модель описывала реальное закрепление, необходимо в областях крепления задать определенную степень свободы, величина которой подбирается экспериментальным путем.

Таким образом, в каждой точке пластины на ее контуре задаются условия для свободных границ, для шарнирного или жесткого закрепления:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \right) \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \right) \quad \text{– свободные границы;} \quad (6)$$

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \right) \quad \text{– шарнирное закрепление;} \quad (7)$$

$$w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \right) \quad \text{– жесткое закрепление.} \quad (8)$$

Поскольку в уравнениях движения производные по пространству имеют четвертый порядок, количество условий на границах (по два в каждой точке контура пластины) замыкает математическую модель.

Производные по времени в уравнениях движения (1) или (2) имеют второй порядок, и каждое из этих уравнений можно привести к системе двух уравнений первого порядка путем введения функции скоростей

$$w_1(x, y, t) = \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t}. \quad (9)$$

Расчеты проводились с использованием конечно-разностных соотношений. Для этого вводилась двумерная сетка  $x_i = i \times \Delta x$ ,  $y_j = j \times \Delta y$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_x$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_y$ ,  $\Delta x = a/N_x$ ,  $\Delta y = b/N_y$ ,  $N_x$ ,  $N_y$  – номера последних узлов вдоль направлений осей  $x$ ,  $y$ , параллельных сторонам пластины,  $a$  и  $b$  – размеры пластины в плане. Число узлов по осям  $OX$  и  $OY$  составляет 24 и 14 соответственно. Проверка сеточной сходимости показала, что при этом погрешность расчетов вполне приемлема. Следует учесть, что сама модель пластины предполагает наличие погрешности порядка  $h/a$ , где  $a$  – минимальный из размеров пластины в плане.

Далее вводятся соответствующие сеточные функции перемещений  $w_{ij}(t) = w(x_i, y_j, t)$  и скоростей перемещений  $w_{1ij}(t) = w_1(x_i, y_j, t)$ . Дифференциальные операторы в уравнениях движения заменялись разностными. Для сеточных функций получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая

решается методом Рунге – Кутты второго порядка. В результате получаются поля перемещений (прогибов), скоростей и ускорений точек пластины как функции времени.

Поскольку аппроксимация производных возможна лишь для внутренних точек, получаемая система алгебраических уравнений относительно сеточных функций не замкнута. Для решения этой системы необходимо дополнить ее конечно-разностными соотношениями, аппроксимирующими граничные условия в каждой точке контура вида (6), или (7), или (8).

### Моделирование отклика пластинки при внешнем воздействии

Нагрузка в виде зависимости ускорения точек (линий) крепления пластины показана на рис. 1. Задача решается для случая  $E_1 = E_2 = 22000$  МПа [7]. Результаты приведены для узла с координатами по осям  $OX$  и  $OY$  – 12 и 7 соответственно. Первоначально нагрузка растет от нуля до 2 мс, далее уровень остается постоянным. Как видно по графику, отклик на пластине так же растет, как и нагрузка, до 2 мс, а после того как внешнее воздействие приобретает статический характер, отклик ускорений на плате начинает уменьшаться.

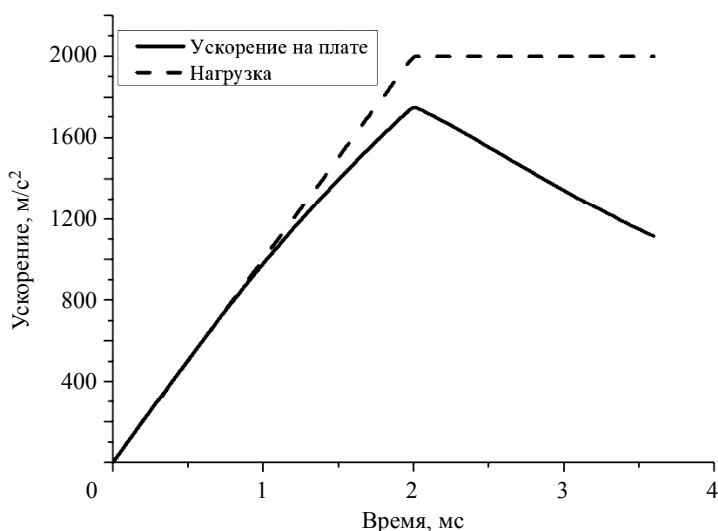
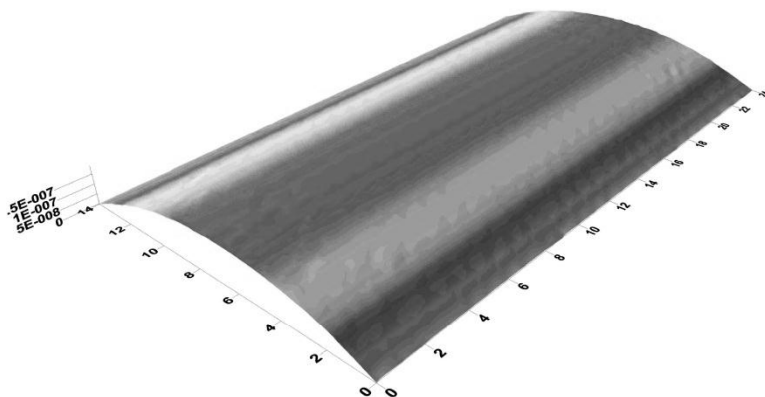


Рис. 1. Внешнее воздействие и отклик, возникший на плате

Fig. 1. External impact and a response arising on the plate

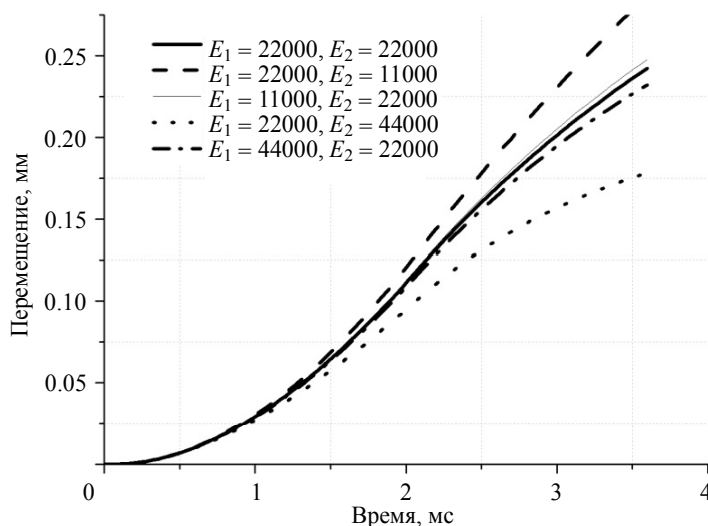
Приведены результаты расчетов для случая, когда в качестве материала был выбран стеклотекстолит, это распространенный материал с ортотропными свойствами. Размеры пластины  $a \times b \times h$  составляют соответственно  $0.180 \times 0.080 \times 0.002$  м. Две стороны пластины (длиной 0.18 м) закреплены шарнирно, а две другие свободны. Модуль  $E_2$  отвечает направлению вдоль коротких свободных сторон. Форма выпучивания пластины (рис. 2) напоминает арку, края которой закреплены, максимальные прогибы наблюдаются в ее середине. При этом на одной стороне пластины возникают сжимающие, на другой – растягивающие напряжения, связанные с модулем  $E_2$ .



**Рис. 2.** Форма колебания пластины, условие закрепления: вдоль оси  $x$  – шарнир, вдоль оси  $y$  – свободные границы

**Fig. 2.** Plate oscillation shape and fixing condition: a hinge along the  $x$  axis and free boundaries along the  $y$  axis

На рис. 3 приведены зависимости максимальных прогибов пластинки от времени для случая ортотропной пластинки. Непрерывной сплошной линией показаны результаты для изотропного материала пластинки, другие кривые отвечают разным вариантам соотношений между модулями упругости вдоль сторон прямоугольной пластины, соответствующие обозначения показаны на рисунке. Физически результаты закономерны: изменение модуля упругости  $E_1$  не оказывает



**Рис. 3.** Зависимости прогибов пластинки в ее центре от времени для ортотропной пластинки при различных соотношениях между упругими модулями вдоль сторон (осей ортотропии), условия закрепления см. рис. 2

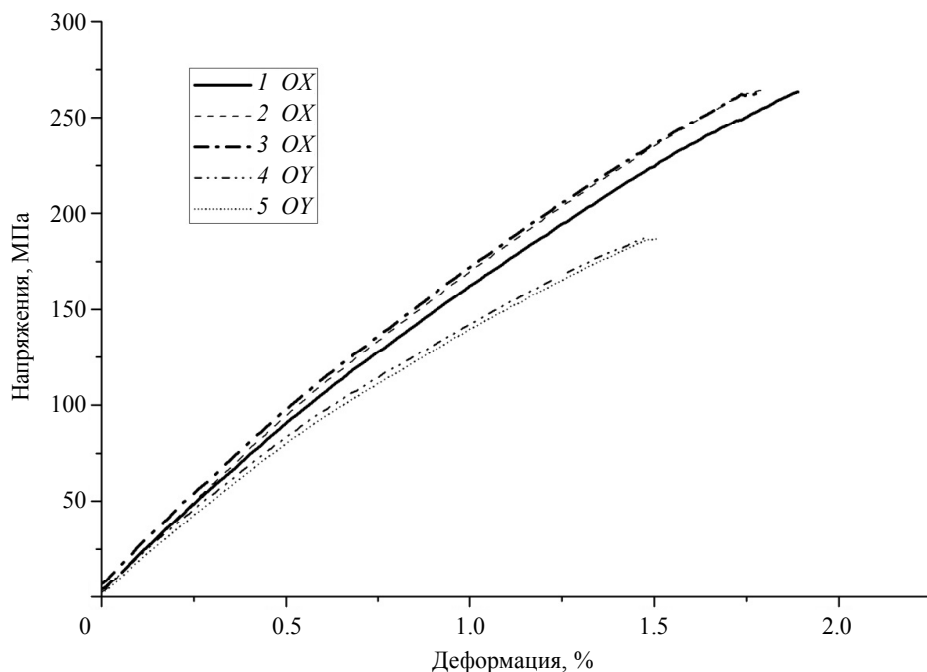
**Fig. 3.** Deflections of the plate center as functions of time for an orthotropic plate with different ratios between elastic modules along the sides (orthotropy axes); for fixing conditions, see Fig. 2

качественного влияния на результат, поскольку вдоль более длинной стороны пластина практически не деформируется. Что касается модуля упругости  $E_2$ , то с его увеличением цилиндрическая жесткость пластинки в соответствующем направлении увеличивается, а с уменьшением соответственно убывает, что приводит к противоположному изменению величин прогибов.

### Результаты натурных испытаний

Для получения исходных данных по математическому моделированию и доказательства наличия ортотропных свойств материала стеклотекстолит проведен эксперимент на разрывной машине Instron 5582 [8]. Размеры образцов составляли:  $110.00 \times 5.50 \times 0.45$  мм. Зона захвата тисков 25 мм с каждой стороны, рабочая зона – 60 мм. Образцы вырезались в двух взаимно перпендикулярных направлениях, что позволяет оценить соответствующие свойства ортотропного материала.

Результаты механических испытаний приведены на рис. 4.



**Рис. 4.** Диаграммы деформаций, полученные для материала стеклотекстолит при одноосных испытаниях вдоль осей ортотропии

**Fig. 4.** Stress-strain diagrams obtained for a fiberglass laminate material during uniaxial testing along the orthotropy axes

Первые три кривые, изображенные на диаграмме деформации, соответствуют образцам, полученным вдоль оси  $OX$ , 4 и 5 – вдоль оси  $OY$ . Результаты испытаний подтверждают наличие ортотропных свойств материала стеклотекстолит, что видно по различию характеру отклика материала на нагружение. Модули упругости составляют  $(15 \pm 0.1)$  ГПа при воздействии вдоль оси  $OX$  и  $(11 \pm 0.1)$  ГПа – вдоль  $OY$ . Эти результаты позволяют задать свойства материалов при математическом моделировании.

### Заключение

Ортотропия деформационно-прочностных свойств материала пластины, в частности, наличие разных модулей упругости, оказывает заметное влияние на характер НДС, а предложенная и реализованная модель позволяет получить количественные оценки этого влияния.

Созданная модель и полученные с ее применением результаты основаны на данных физических экспериментов, полученных в лабораторных условиях. Разработанная и реализованная модель применима для оценки параметров НДС в реальных условиях эксплуатации, которые нельзя полностью и точно воспроизвести в лабораторных условиях.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Xiaotian Zhang *et al.* Element fracture technique for hypervelocity impact simulation // *Advances in Space Research*. 2015. V. 55(9). P. 2293–2304. DOI: 10.1016/j.asr.2015.01.040.
2. Xin Jin *et al.* Lightweight design for servo frame based on lattice material // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2017. V. 207. P. 10. DOI: 10.1088/1757-899X/207/1/012035.
3. Кармишин А.В., Лясковец, Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 376 с.
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
5. Pang S.S. *et al.* Impact response of composite laminates with a hemispherical indenter // *Polymer Engineering and Science*. 1991. V. 30(20). P. 1461–1466. DOI: 10.1002/pen.760312004.
6. Хон Ю.А. и др. Анализ применения изотропных и анизотропных критериев разрушения для моделирования разрушения анизотропных материалов // *Известия РАН. Серия физическая*. 2012. Т. 76 (1). С. 79–85. DOI: 10.3103/S10662873812010108.
7. ГОСТ 10292-74. Стеклотекстолит конструкционный. Технические условия. М.: Изд-во стандартов, 1976. 16 с.
8. Акopian В.А. и др. К определению эффективных свойств полимеркомпозитного материала на основе гармонического и модального анализа // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2008. Т. 14. № 1. С. 35–48.

Статья поступила 16.01.2019 г.

Shcherbakov I.V., Lyukshin B.A. (2019) SIMULATION OF THE BEHAVIOR OF AN ORTHOTROPIC PLATE RESPONSE UNDER DYNAMIC LOAD *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 111–118

DOI 10.17223/19988621/61/10

Keywords: mathematical modeling, isotropic material, orthotropic material, stress-strain state, equation of motion.

Detection of the structural defects in devices and machines at early stages is an urgent problem in the instrument-making industry. Such requirements are based on the need to reduce the time of manufacturing new products, and to decrease the expenses for creating prototypes. One of the tools which is capable to solve the complex problems is a mathematical modeling. In this paper, the simulation of the device has been reduced to the level of describing orthotropic plate behavior. Such methodology makes it possible not only to numerically analyze the process, but also to experimentally evaluate the adequacy of the obtained results. The model is based on the equation of motion which allows one to describe the behavior of the orthotropic plate under external dynamic load. To confirm the simulation results, an experiment is carried out, which yields the elastic modulus of the real orthotropic plate and gives an opportunity to compare the results with the data from tables, as well as to show the presence of the orthotropy in the sample.

SHCHERBAKOV Il'ya Vyacheslavovich (ISPMS SB RAS, Tomsk, Russian Federation). E-mail: scherbakov\_ilja@mail.ru

LYUKSHIN Boris Aleksandrovich (Doctor of Physics and Mathematics, ISPMS SB RAS, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lba2008@yandex.ru

#### REFERENCES

1. Xiaotian Zhang, Xiao-gang Li, Tao Liu, Guang-hui Jia. (2015) Element fracture technique for hypervelocity impact simulation. *Advances in Space Research*. 55(9). pp. 2293–2304. DOI: 10.1016/j.asr.2015.01.040.
2. Xin Jin, Guoxi Li, Encai Liu, Jingzhong Gong. (2017) Lightweight design for servo frame based on lattice material. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 207(012035). DOI: 10.1088/1757-899X/207/1/012035.
3. Karmishin A.V., Lyaskovets., Myachenkov V.I., Frolov A.N. (1975) *Statika i dinamika tonkostennykh obolocheknykh konstruksiy* [Statics and dynamics of thin-walled shell structures]. Moscow: Mashinostroenie.
4. Vol'mir A.S. (1972) *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka.
5. Pang S.S., Zhao Y., Yang C., Griffin S.A. (1991) Impact response of composite laminates with a hemispherical indenter. *Polymer Engineering and Science*. 30(20). pp. 1461–1466. DOI: 10.1002/pen.760312004.
6. Khon Yu.A., Krivosheina M.N., Tuch E.V. (2012) Analiz primeneniya izotropnykh i anizotropnykh kriteriev razrusheniya dlya modelirovaniya razrusheniya anizotropnykh materialov [Analysis of the application of isotropic and anisotropic fracture criteria for modeling the destruction of anisotropic materials]. *Izvestiya RAN. Seriya Fizicheskaya – Proceedings of the RAS. Physical series*. 76(1). pp. 79–85. DOI: 10.3103/S1062873812010108.
7. GOST 10292-74. (1976) *Steklotekstolit konstruksionnyy. Tekhnicheskie usloviya* [Constructional glass-fibre laminate. Technical conditions]. Moscow: Izdatel'stvo standartov.
8. Akop'yan V.A., Bychkov A.A., Rozhkov E.V., Solov'ev A.N., Shevtsov S.N. (2008) K opredeleniyu effektivnykh svoystv polimerkompozitnogo materiala na osnove garmonicheskogo i modal'nogo analiza [On determination of the effective properties of polymer-composite material on the basis of the harmonic and modal analysis]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*. 14(1). pp. 35–48.

Received: January 16, 2019