МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.872

DOI: 10.17223/19988605/49/4

А.А. Назаров, Я.Е. Измайлова

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ,
ВЫТЕСНЕНИЕМ ЗАЯВОК И ФАЗОВЫМ ДООБСЛУЖИВАНИЕМ

Проводится исследование системы с повторными вызовами, в которой входящий поток является простейшим, с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием методом асимптотического анализа. Использовано предельное условие растущей задержки заявок на орбите. Применяя предлагаемый метод для данной системы с повторными вызовами (RQ-системы), показано, что характеристическая функция числа заявок на орбите является гауссовской. Найдены пропускная способность системы и параметры распределения вероятностей числа заявок на орбите.

Ключевые слова: вытеснение заявок; зоны орбиты; фазовое дообслуживание заявок; RQ-система; большая задержка.

В связи с тем, что в современном мире наблюдается ежегодное увеличение объема и размерности информационных данных, проблема проектирования и анализа телекоммуникационных систем является одним из приоритетных направлений развития любой страны. Система с повторными вызовами (RQ-система) – это модель массового обслуживания, которая характеризуется тем, что заявка, пришедшая в систему, если обнаружит прибор занятым, повторит попытку обращения для обслуживания через некоторое случайное время, в течение которого находится на орбите в зоне ожидания. В литературе показано, что такие модели являются адекватными математическими моделями телекоммуникационных сетей связи. Между повторами заявки (клиенты, требования) находятся на орбите. Первые системы с повторными вызовами были рассмотрены R.I. Wilkinson [1]. Наиболее полное и глубокое исследование разнообразных процессов в RQ-системах было приведено в работах Г.И. Фалина [2].

Одной из важных характеристик системы массового обслуживания является процесс обслуживания. В данной работе предлагается обслуживание в два этапа. На первом этапе прибор обрабатывает входящие заявки (первичная обработка), и после обслуживания на первой фазе заявки отправляются на вторую (фактическое обслуживание). Задачи, возникающие в системах управления и требующие двухфазного обслуживания, были предложены B.T. Doshi [3]. K.C. Madan [4] были рассмотрены системы массового обслуживания M/G/1, где заявка после обслуживания на первой фазе может покинуть систему или перейти на вторую фазу обслуживания. В работе B. Krishna Kumar [5] рассматривается система, в которой заявки, прибывшие в систему, вытесняют заявки, находящиеся только на первой фазе, и при этом обслуживающиеся в тот момент требования фактически покидают систему без обслуживания.

Как правило, рассматриваются системы, в которых все требования однотипные, хотя в реальных системах некоторые должны претендовать на первоочередное обслуживание, т.е. на приоритет. Системам с приоритетами посвящено большое количество исследований, например работы K. Avrachenkov [6], G. Ayuppan, A. Muthu Ganapathi [7], П.П. Бочарова, О.И. Павловой [8], I.M. Atencia [9], C. Kim [10], A.N. Dudin [11]. Литература по RQ-системам очень обширна. Некоторые обзоры моделей можно найти у J.R. Artalejo [12–13]. В данной работе будет рассмотрена RQ-система с повторными вызовами, фазовым дообслуживанием и вытеснением заявок.

1. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим RQ- систему M/GI/1 с вытеснением заявок и обслуживанием заново (рис. 1).

Рис. 1. RQ-система M/GI/1 с вытеснением заявок

Fig. 1. Retrial queueing system M/GI/1 with exclusion customers

Описание модели приведено в работе [14]. Показано, что пропускная способность RQ-системы с вытеснением заявок и обслуживанием их заново имеет вид $S = B'(0)$, где $B(x)$ – функция распределения времени обслуживания. Откуда для времени обслуживания, распределенного по закону Эрланга, получаем $S = 0$. То есть стационарного режима в такой системе не существует.

Поэтому рассмотрим RQ-систему с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием (рис. 2).

Рис. 2. RQ-система M/E2/1 с вытеснением заявок и дообслуживанием

Fig. 2. Retrial queueing system M/E2/1 with exclusion customers and phase follow-up

На вход системы с повторными вызовами поступает простейший поток заявок, имеющий интенсивность λ . Если пришедшая заявка застает прибор свободным, то она занимает его для обслуживания на первой фазе. Время обслуживания на первой фазе имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_1 . После успешного окончания обслуживания на первой фазе заявка переходит на вторую фазу обслуживания. Время обслуживания на второй фазе имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_2 . Если в момент прихода заявки прибор оказывается занятым, то заявка, которая пришла, вытесняет обслуживаемую заявку и встает на прибор. Заявка, вытесненная мгновенно, переходит на орбиту в зону ожидания. Орбита условно разделяется на две зоны. Если заявка обслуживалась на первой фазе, то она уходит в первую зону орбиты, если на второй фазе, то во вторую. В зонах орбиты заявки осуществляют случайную задержку. Продолжительность таких задержек имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . С орбиты после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой обслуживания. С первой зоны орбиты обращается для обслуживания на первую фазу, со второй зоны – на вторую, таким образом, происходит фазовое дообслуживание заявок, обслуживание которых было прервано.

Так как орбита разделяется на две зоны, то будем полагать:

$\sigma_1 = \gamma_1 \sigma$ – интенсивность обращения заявок с первой зоны орбиты;

$\sigma_2 = \gamma_2 \sigma$ – интенсивность обращения заявок со второй зоны.

Обозначим $i_1(t)$ – число заявок в первой зоне орбиты; $i_2(t)$ – число заявок на орбите во второй зоне, $k(t)$ отвечает за состояние прибора: $k(t)=0$, если прибор свободен; $k(t)=1$, если прибор обслуживает заявку на первой фазе; $k(t)=2$, если прибор обслуживает заявку на второй фазе.

Перед нами стоит задача нахождения двумерного распределения вероятностей числа заявок на орбите и состояний прибора.

2. Уравнения Колмогорова

Рассмотрим трехмерный процесс $\{k(t), i_1(t), i_2(t)\}$.

Обозначим стационарные вероятности $P\{k(t)=k, i_1(t)=i_1, i_2(t)=i_2\}=P_k(i_1, i_2)$, $k=0,1,2$.

Введем функции следующего вида:

$$H_k(u_1, u_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} P_k(i_1, i_2), \quad k=0,1,2,$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, которые являются частичными характеристическими функциями.

Можно показать, что система уравнений для частичных характеристических функций имеет вид:

$$\begin{aligned} -\lambda H_0(u_1, u_2) + j\sigma_1 \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} + j\sigma_2 \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \mu_2 H_2(u_1, u_2) &= 0, \\ -\mu_1 H_1(u_1, u_2) + \lambda H_0(u_1, u_2) + \lambda e^{ju_2} H_2(u_1, u_2) + \lambda e^{ju_1} H_1(u_1, u_2) - \lambda H_1(u_1, u_2) + j\sigma_2 \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} - \\ - j\sigma_1 e^{-ju_1} \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} - j\sigma_1 e^{ju_2 - ju_1} \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= 0, \\ -\lambda H_2(u_1, u_2) - \mu_2 H_2(u_1, u_2) + \mu_1 H_1(u_1, u_2) + j\sigma_1 \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} - \\ - j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} - j\sigma_2 e^{ju_1 - ju_2} \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} &= 0. \end{aligned}$$

Данная система трудно решается аналитически, поэтому для исследования используем метод асимптотического анализа [15] в предельном условии большой задержки ($\sigma \rightarrow 0$).

3. Асимптотический анализ

Введем обозначения:

κ_1 – предельное среднее значение числа заявок на орбиты в первой зоне;

κ_2 – предельное среднее значение числа заявок на орбите во второй зоне;

R_k , $k=0,1,2$ – распределение вероятностей состояний прибора.

Теорема 1. Пусть $i_1(t)$, $i_2(t)$ – число заявок в зонах орбиты RQ-системы с вытеснением заявок и дообслуживанием. Тогда в предельном условии $\sigma \rightarrow 0$ для вероятностей состояний прибора $R_k = P\{k(t)=k\}$ выполняются равенства

$$R_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu_1} - \frac{\lambda}{\mu_2}, \quad R_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \quad R_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}, \quad (1)$$

а для характеристических функций выполняется предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \exp\{ju_1 \sigma i_1(t) + ju_2 \sigma i_2(t)\} = \exp\{ju_1 \kappa_1 + ju_2 \kappa_2\},$$

где параметры κ_1 , κ_2 имеют вид:

$$\kappa_1 = \frac{\lambda^2 \mu_2}{\gamma_1 (\mu_1 \mu_2 - \lambda (\mu_1 + \mu_2))}, \quad \kappa_2 = \frac{\lambda^2 \mu_1}{\gamma_2 (\mu_1 \mu_2 - \lambda (\mu_1 + \mu_2))}. \quad (2)$$

Из полученных в теореме 1 равенств (2) допредельные средние значения числа заявок в зонах на орбите можно аппроксимировать величинами $\frac{\kappa_k}{\sigma}$, $k=1,2$.

В работе [14] дано определение пропускной способности.

Следствие. Из первого равенства в (1) теоремы 1 получаем значение пропускной способности RQ-системы с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием в виде:

$$S = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} > 0.$$

Поэтому стационарный режим в такой системе существует для любых $\lambda < S$.

Теорема 2. Пусть $i_1(t)$, $i_2(t)$ – число заявок в зонах орбиты RQ-системы с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием. Тогда имеет место предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \exp \left\{ ju_1 \frac{\sigma \gamma_1 i_1(t) - \kappa_1}{\sqrt{\sigma}} + ju_2 \frac{\sigma \gamma_2 i_2(t) - \kappa_2}{\sqrt{\sigma}} \right\} = \exp \left\{ \frac{(ju_1)^2}{2} Q_{11} + \frac{(ju_2)^2}{2} Q_{22} + ju_1 ju_2 Q_{12} \right\},$$

где κ_1 , κ_2 определены выше, величины Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} – решение неоднородной системы уравнений

$$\begin{aligned} Q_{11}(\gamma_1 R_0 + \gamma_1 R_2 - \gamma_1 R_0 z_0 + \gamma_1 R_0 z_1 + \gamma_1 R_2 z_1 - \gamma_1 R_2 z_2) + Q_{12}(-\gamma_2 R_1 - \gamma_2 R_0 z_0 + \gamma_2 R_0 z_2 - \gamma_2 R_1 z_1 + \gamma_2 R_1 z_2) = \\ = \frac{1}{2} \lambda R_1 + \frac{1}{2} \gamma_1 \kappa_1 R_0 + \frac{1}{2} R_2 \gamma_1 \kappa_1 + \frac{1}{2} R_1 \gamma_2 \kappa_2 + \gamma_1 \kappa_1 R_0 z_1 - \lambda R_1 z_1 + \gamma_1 \kappa_1 R_2 z_1 - \gamma_2 \kappa_2 R_1 z_2, \\ Q_{22}(\gamma_2 R_0 + \gamma_2 R_1 - \gamma_2 R_0 y_0 + \gamma_2 R_0 y_2 + \gamma_2 R_1 y_2 - \gamma_2 R_1 y_1) + Q_{12}(-\gamma_1 R_2 - \gamma_1 R_0 y_0 + \gamma_1 R_0 y_1 - \gamma_1 R_2 y_2 + \gamma_1 R_2 y_1) = \\ = \frac{1}{2} \lambda R_2 + \frac{1}{2} \gamma_2 \kappa_2 R_0 + \frac{1}{2} R_2 \gamma_1 \kappa_1 + \frac{1}{2} R_1 \gamma_2 \kappa_2 - \lambda R_2 y_1 + \gamma_2 \kappa_2 R_0 y_2 + \gamma_2 \kappa_2 R_1 y_2 - \gamma_1 \kappa_1 R_2 y_1, \\ Q_{11}(-\gamma_1 R_2 - \gamma_1 R_0 p_0 + \gamma_1 R_0 p_1 + \gamma_1 R_2 p_1 - \gamma_1 R_2 p_2) + Q_{12}(\gamma_1 R_0 + \gamma_1 R_2 + \gamma_2 R_0 + \gamma_2 R_1 - \gamma_2 R_0 p_0 + \\ + \gamma_2 R_0 p_2 - \gamma_2 R_1 p_1 + \gamma_2 R_1 p_2 - \gamma_1 R_0 s_0 + \gamma_1 R_0 s_1 - \gamma_1 R_2 s_2 + \gamma_1 R_2 s_1) + \\ + Q_{22}(-\gamma_2 R_1 - \gamma_2 R_0 s_0 + \gamma_2 R_0 s_2 + \gamma_2 R_1 s_2 - \gamma_2 R_1 s_1) = -R_2 \gamma_1 \kappa_1 - R_1 \gamma_2 \kappa_2 + \\ + \gamma_1 \kappa_1 R_0 p_1 - \lambda R_1 p_1 + \gamma_1 \kappa_1 R_2 p_1 - \gamma_2 \kappa_2 R_1 p_2 - \lambda R_2 s_1 + \gamma_2 \kappa_2 R_0 s_2 + \gamma_2 \kappa_2 R_1 s_2 - \gamma_1 \kappa_1 R_2 s_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Величины z_0, z_1, z_2 ; y_0, y_1, y_2 ; p_0, p_1, p_2 ; s_0, s_1, s_2 являются решением систем уравнений (4)–(7) соответственно.

Для z_0, z_1, z_2 :

$$\begin{aligned} -(\lambda + \gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2) z_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) z_1 + \gamma_2 \kappa_2 z_2 = -\gamma_1 \kappa_1, \quad -(\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) z_1 + (\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) z_2 = \lambda + \gamma_2 \kappa_2, \\ \mu_2 z_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) z_1 - (\lambda + \mu_2 + \gamma_1 \kappa_1) z_2 = -\gamma_1 \kappa_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Для y_0, y_1, y_2 :

$$\begin{aligned} -(\lambda + \gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2) y_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) y_1 + \gamma_2 \kappa_2 y_2 = -\gamma_2 \kappa_2, \quad -(\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) y_1 + (\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) y_2 = -\gamma_2 \kappa_2, \\ \mu_2 y_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) y_1 - (\lambda + \mu_2 + \gamma_1 \kappa_1) y_2 = \lambda + \gamma_1 \kappa_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Для p_0, p_1, p_2 :

$$\begin{aligned} -(\lambda + \gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2) p_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) p_1 + \gamma_2 \kappa_2 p_2 = -\gamma_2 \kappa_2, \quad -(\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) p_1 + (\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) p_2 = -\gamma_2 \kappa_2, \\ \mu_2 p_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) p_1 - (\lambda + \mu_2 + \gamma_1 \kappa_1) p_2 = \lambda + \gamma_1 \kappa_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Для s_0, s_1, s_2 :

$$\begin{aligned} -(\lambda + \gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2) s_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) s_1 + \gamma_2 \kappa_2 s_2 = -\gamma_1 \kappa_1, \quad -(\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) s_1 + (\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) s_2 = \lambda + \gamma_2 \kappa_2, \\ \mu_2 s_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) s_1 - (\lambda + \mu_2 + \gamma_1 \kappa_1) s_2 = -\gamma_1 \kappa_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем характеристическую функцию распределения вероятностей числа заявок на орбите в следующем виде:

$$H(u_1, u_2) = \exp \left\{ j \frac{u_1}{\sigma} \kappa_1 + j \frac{u_2}{\sigma} \kappa_2 + \frac{(ju_1)^2}{2\sigma} Q_{11} + \frac{(ju_2)^2}{2\sigma} Q_{22} + \frac{ju_1 ju_2}{\sigma} Q_{12} \right\}.$$

Из вышеизложенного получаем, что двумерное распределение вероятностей числа заявок на орбите является в пределе гауссовским распределением.

Заключение

В работе была исследована система с повторными вызовами, фазовым дообслуживанием и вытеснением заявок методом асимптотического анализа. Показано, что предельная характеристическая функция числа заявок на орбите имеет вид характеристической функции гауссовского распределения. Получено значение пропускной способности данной системы и сделан вывод о том, что при значениях параметра интенсивности входящего потока $\lambda < S$ для RQ-системы с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием стационарный режим существует, в то время как для RQ-системы с вытеснением заявок и обслуживанием заново стационарного режима не существует. Считаем целесообразным исследовать RQ-систему с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием общего типа, т.е. когда присутствует N фаз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wilkinson R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell System Technical Journal. 1956. V. 35, No. 2. P. 421–507.
2. Falin G.L., Templeton J.G.C. Retrial queues. London : Chapman & Hall, 1997. 328 p.
3. Doshi B.T. Analysis of a two phase queueing system with general service times // Operations Research Letters. 1991. V. 10, No. 5. P. 265–272.
4. Madan K.C. An M/G/1 queue with second optional service // Queueing Systems. Theory and Applications. 2000. V. 3, No. 4. P. 37–46.
5. Krishna K.B., Vijaykumar A., Arivudainambi D. An M/G/1 Retrial queueing system with two phase service and preemptive resume // Annals of Operations Research. 2002. V. 113, No. 1-4. P. 61–79. DOI:10.1023/A:1020901710087.
6. Avrachenkov K., Dudin A., Klimenok V. Queueing model MMAP/M 2/1 with two orbits // Lecture Notes in Comput. Sci. 2010. V. 6235. P. 107–118.
7. Ayyappan G., Muthu G.A., Gopal S. M/M/1 Retrial queueing system with loss and feedback under pre-emptive priority service // Int. J. of Computer Applications. 2010. V. 2, No. 6. P. 27–34.
8. Bocharov P.P., Pavlova O.I., Puzikova D.A. M|G|1|r retrial queueing systems with priority of primary customers // Mathematical and computer Modelling. 1999. V. 30, No. 3–4. P. 89–98.
9. Atencia I.M. A Geo/G/1 retrial queueing system with priority services // European J. of Operational Research. 2017. Vol. 256, No. 1. P. 178–186.
10. Kim C. Priority tandem queueing system with retrials and reservation of channels as a model of call center // Computers & Industrial Engineering. 2016. V. 96. P. 61–71.
11. Dudin A.N., Kim C., Dudin S., Dudina O. Priority retrial queueing model operating in random environment with varying number and reservation of servers // Applied Mathematics and Computation. 2015. V. 269. P. 674–690.
12. Artalejo J.R. Accessible bibliography on retrial queues // Mathematical and Computer Modelling. 1999. V. 30. P. 1–6.
13. Artalejo J.R. Accessible bibliography on retrial queues: Progress in 2000–2009 // Mathematical and Computer Modelling. 2010. V. 51, No. 9-10. P. 1071–1081.
14. Назаров А.А., Черникова Я.Е. Исследование RQ-системы M/GI/1 с вытеснением в условии большой задержки // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 323, № 5. С. 16–20.
15. Назаров А.А., Моисеева С.П. Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во HTЛ, 2006. 112 с.

Поступила в редакцию 17 мая 2019 г.

Nazarov A.A., Izmailova Y.E. (2019) ASYMPTOTIC ANALYSIS RETRIAL QUEUEING SYSTEM WITH EXCLUSION CUSTOMERS AND PHASE FOLLOW-UP. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 29–34

DOI: 10.17223/19988605/49/4

In this paper, we consider a retrial queueing system, which has a two-phase serviced and displacement of customers. Frequently such tasks arise in control systems. The input of the system is a simplest request flow with intensity λ . If the received customer finds the server free, it takes it for service in the first phase. The service time in the first phase has an exponential distribution with a parameter μ_1 . After successful completion of service in the first phase, the request goes to the second phase of service. Service time in the second phase has an exponential distribution with a parameter μ_2 . If the server is busy, then the incoming request pushes the previous request out of service and takes its place, while the pushed out request goes to the orbit. The orbit is conventionally divided into two zones. If the customer was serviced in the first phase, it goes to the first zone of the orbit, but if it was serviced in the second

phase, then it comes in the second phase of the orbit. In the orbit zones, the requests are subject to a random delay. The duration of such delays has an exponential distribution with a parameter σ . After a random delay the customer re-accesses the server from an orbit to the re-attempt service. From the first zone of the orbit, the customer is appealed for service to the first phase, from the second zone, one is appealed to the second phase, thus wise, the phase maintenance of customers whose service has been interrupted occurs. The throughput of RQ-system with the displacement of customers and phase follow-up. By throughput we mean the maximum average number of requests that the system can serve per unit of time. In this RQ-system it has the form $S = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} > 0$, so the station-

ary mode in such a system exists for any $\lambda < S$. Further, the observation of the system is carried out using the method of asymptotic analysis. It was shown that the limit characteristic function of the number of customers in orbit has the form of a characteristic function of the Gaussian distribution. Numerical experiments were carried out. The asymptotic probability distribution of the number of customers in orbit was obtained for the selected parameter values.

Keywords: exclusion of customers; zones in the orbit; phase follow-up customers; retrial queueing system; the long delay.

NAZAROV Anatoly Andreevich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the department of probability Theory and mathematical statistics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

IZMAYLOVA Yana Evgenevna (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: evgenevna.92@mail.ru

REFERENCES

1. Wilkinson, R.I. (1956) Theories for toll traffic engineering in the USA. *The Bell System Technical Journal*. 35(2). pp. 421–507. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1956.tb02388.x
2. Falin, G.L. & Templeton, J.G.C. (1997) *Retrial queues*. London: Chapman & Hall.
3. Doshi, B.T. (1991) Analysis of a two phase queueing system with general service times. *Operations Research Letters*. 10(5). pp. 265–272. DOI: 10.1016/0167-6377(91)90012-E
4. Madan, K.C. (2000) An M/G/1 queue with second optional service. *Queueing Systems. Theory and Applications*. 3(4). pp. 37–46. DOI: 10.1023/A:1019144716929
5. Krishna, K.B. & Vijaykumar, A. & Arivudainambi, D. (2002) An M/G/1 Retrial queueing system with two phase service and preemptive resume. *Annals of Operations Research*. 113(1–4). pp. 61–79. DOI: 10.1023/A:1020901710087
6. Avrachenkov, K. & Dudin, A. & Klimenok, V. (2010) Queueing model MMAP/M 2/1 with two orbits. *Lecture Notes in Computer Science*. 6235. pp. 107–118.
7. Ayyappan, G. & Muthu Ganapathi, A. & Sekar, G. (2010) M/M/1 Retrial queueing system with loss and feedback under preemptive priority service. *International Journal of Computer Applications*. 2(6). pp. 27–34. DOI: 10.5120/672-945
8. Bocharov, P.P., Pavlova, O.I. & Puzikova, D.A. (1999) M| G| 1 |r retrial queueing systems with priority of primary customers. *Mathematical and computer Modelling*. 30(3–4). pp. 89–98. DOI: 10.1016/S0895-7177(99)00134-X
9. Atencia, I.M. (2017) A Geo/G/1 retrial queueing system with priority services. *European Journal of Operational Research*. 256(1). pp. 178–186. DOI: 10.1016/j.ejor.2016.07.011
10. Kim, C. (2016) Priority tandem queueing system with retrials and reservation of channels as a model of call center. *Computers & Industrial Engineering*. 96. pp. 61–71. DOI: 10.1016/j.cie.2016.03.012
11. Dudin, A.N., Che Soong Kim, Dudin, S. & Dudina, O. (2015) Priority retrial queueing model operating in random environment with varying number and reservation of servers. *Applied Mathematics and Computation*. 269. pp. 674–690. DOI: 10.1016/j.amc.2015.08.005
12. Artalejo, J.R. (1999) Accessible bibliography on retrial queues. *Mathematical and Computer Modelling*. 30. pp. 1–6. DOI: 10.1016/S0895-7177(99)00128-4
13. Artalejo, J.R. (2010) Accessible bibliography on retrial queues: Progress in 2000–2009. *Mathematical and Computer Modelling*. 51(9–10). pp. 1071–1081. DOI: 10.1016/j.mcm.2009.12.011
14. Nazarov, A.A. & Chernikova, Y.E. (2013) Investigation of preemptive RQ-system M| GI| 1 under extensive delay. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. vol. 323. no 5. pp. 16–20.
15. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metody asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [The asymptotical analysis method in queueing theory]. Tomsk: NTL.