УДК 514.76
DOI 10.17223/19988621/62/3

MSC 53C15, 53D10, 53C25, 53C50

Н.К. Смоленцев

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ ПАРА-САСАКИЕВЫ СТРУКТУРЫ НА ГРУППАХ ЛИ

Изучаются левоинвариантные параконтактные структуры Сасаки на группах Ли, которые получаются центральными расширениями из почти пара-кэлеровых структур на группах Ли. Есть несколько различных подходов к определению понятия параконтактных и пара-сасакиевых структур. В данной работе параконтактные структуры Сасаки определяются по той же схеме, что и обычные структуры Сасаки в случае контактных структур. В статье найдены условия пара-сасакиевости контактных структур. В случае групп Ли инвариантные пара-сасакиевые структуры могут быть получены из пара-кэлеровых структур при помощи процедуры центрального расширения. В этом случае найдены формулы, связывающие кривизну пара-кэлеровой группы Ли с кривизной соответствующей пара-сасакиевой группы Ли.

Ключевые слова: пара-комплексная структура, пара-сасакиевы многообразия; пара-кэлерова структура, левоинвариантная параконтактная структура.

Левоинвариантная почти комплексная структура на группе Ли H – это левоинвариантный эндоморфизм J касательного расслоения, удовлетворяющий условию $J^2 = -Id$. Почти комплексная структура J является интегрируемой (комплексной), если ее тензор Нейенхейса $N_J(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[X, Y] - J[JX, Y]$ обращается в нуль. Левоинвариантная кэлерова структура на группе Ли H – это тройка (h, ω, J) , состоящая из левоинвариантной римановой метрики h , левоинвариантной симплектической формы ω и ортогональной левоинвариантной комплексной структуры J , причем $h(X, Y) = \omega(X, JY)$ для любых левоинвариантных векторных полей X и Y на H . Поэтому такую структуру на группе H можно задать парой (ω, J) , где ω – симплектическая форма, а J – комплексная структура, согласованная с ω , т.е. такая, что $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$. Если $\omega(X, JX) > 0, \forall X \neq 0$, то получается кэлерова метрика, а если условие положительности не выполняется, то $h(X, Y) = \omega(X, JY)$ является псевдоримановой метрикой и тогда (h, ω, J) называется псевдокэлеровой структурой на группе Ли H . Из левоинвариантности рассматриваемых объектов следует, что псевдокэлерова структура (h, ω, J) может быть задана значениями ω, J и h на алгебре Ли $\mathfrak{h}$ группы Ли H . Тогда $(\mathfrak{h}, \omega, J, h)$ называется (псевдо)кэлеровой алгеброй Ли. Условие существования левоинвариантной положительно определенной кэлеровой метрики на группе Ли H накладывает серьезные ограничения на структуру ее алгебры Ли $\mathfrak{h}$. Такая алгебра Ли не может быть нильпотентной за исключением абелевого случая. Хотя нильпотентные группы Ли и нильмногообразия (за исключением тора) не допускают левоинвариантных кэлеровых метрик, но на таких многообразиях могут существовать левоинвариантные псевдоримановы кэлеровы метрики.

Почти пара-комплексной структурой на $2n$ -мерном многообразии M называется поле P эндоморфизмов касательного расслоения TM , таких, что $P^2 = Id$, причем

ранги собственных распределений $T^{\pm}M := \ker(Id \mp P)$ равны. Почти пара-комплексная структура P называется *интегрируемой*, если распределения $T^{\pm}M$ инволютивны. В этом случае P называется пара-комплексной структурой. Аналогом тензора Нейенхейса почти комплексной структуры для случая любого тензорного поля T типа (1,1) является кручение Нейенхейса [5] $[T, T](X, Y) = T^2[X, Y] + [TX, TY] - T[X, TY] - T[TX, Y]$. В частности, *тензор Нейенхейса* N_P почти пара-комплексной структуры P определяется равенством

$$N_P(X, Y) = [X, Y] + [PX, PY] - P[XY] - P[X, PY],$$

для всех векторных полей X, Y на M . Как и в комплексном случае, пара-комплексная структура P интегрируема тогда и только тогда, когда $N_P = 0$. В работе [6] представлен обзор теории пара-комплексных структур и подробно рассмотрены инвариантные пара-комплексные и пара-кэлеровы структуры на однородных многообразиях. Пара-кэлерово многообразие можно определить как псевдориманово многообразие (M, g) с кососимметрической пара-комплексной структурой P , параллельной относительно связности Леви-Чивита. Если (g, P) – пара-кэлерова структура на M , то $\omega = g \circ P$ является симплектической структурой. В работе [7] изучались левоинвариантные почти пара-комплексные структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли, которые не допускают ни симплектических, ни комплексных структур.

В нечетномерном случае аналогом симплектической структуры является контактная структура [5]. Левоинвариантные контактные структуры на группах Ли изучались в работах [8, 9]. Известно, что контактные алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \eta)$ с нетривиальным центром являются центральными расширениями симплектических алгебр Ли $(\mathfrak{h}, \omega)$ при помощи невырожденного коцикла ω . Левоинвариантные контактные структуры с положительно определенной римановой метрикой существуют далеко не всегда [8]. Псевдоримановы структуры Сасаки на семимерных нильпотентных группах Ли изучались в работе [10].

В данной работе мы будем рассматривать левоинвариантные параконтактные структуры на группах Ли. Параконтактная метрическая структура на многообразии задается четырьмя объектами (η, ξ, ϕ, g) , η – контактная форма, ξ – векторное поле Рибба, g – псевдориманова метрика и ϕ – аффинор, которые связаны определенными соотношениями (см. ниже). Псевдориманова контактная метрическая структура называется K -контактной, если векторное поле Рибба ξ является киллинговым.

Пусть ∇ – связность Леви-Чивита соответствующая (псевдо)римановой метрике g . Она определяется из шестичленной формулы [11], которая для левоинвариантных векторных полей X, Y, Z на группе Ли принимает вид $2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y])$. Напомним, что тензор кривизны определяется формулой $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$. Тензор Риччи – это свертка тензора кривизны по первому и четвертому (верхнему) индексам, $Ric_{jk} = R_{ijk}^i$. Для псевдоримановой метрики g тензор Риччи $Ric(X, Y)$ может быть также определен по формуле

$$Ric(X, Y) = \sum_i \varepsilon_i g(R(e_i, Y)Z, e_i),$$

где $\{e_i\}$ – ортонормированный репер и $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$.

Мы предполагаем, что внешнее произведение и внешний дифференциал определяются без нормирующего множителя. Тогда, в частности, $dx \wedge dy = dx \otimes dy - dy \otimes dx$ и $d\eta(X, Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])$. Это обуславливает некоторые отличия формул от тех, что приведены в книге Блэра [5].

2. Контактные и параконтактные структуры

Дифференцируемое $(2n+1)$ -мерное многообразие M класса C^∞ называется *контактным многообразием*, если на нем задана дифференциальная 1-форма η , такая что $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ всюду на M^{2n+1} . Форма η называется *контактной*. Контактная форма определяет на многообразии M^{2n+1} распределение $D = \{X \in TM^{2n+1} \mid \eta(X) = 0\}$ ранга $2n$, которое называется *контактным распределением*. Контактное многообразие M^{2n+1} имеет всюду ненулевое векторное поле ξ , которое определяется свойствами $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$ для всех векторных полей X на M^{2n+1} . Поле ξ называется *полем Риб* или *характеристическим векторным полем* контактной структуры. Легко видеть, что $L_\xi \eta = 0$.

Если M^{2n+1} контактное многообразие с контактной формой η , то *контактной метрической* структурой называется четверка (η, ξ, ϕ, g) , где ξ – поле Риб, g – риманова метрика на M^{2n+1} и ϕ – аффинор на M^{2n+1} , для которых имеют место следующие свойства [5]:

- 1) $\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$;
- 2) $d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y)$;
- 3) $g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$,

где I – тождественный эндоморфизм касательного расслоения.

Риманова метрика g контактной метрической структуры называется *ассоциированной* с контактной структурой η . Из третьего свойства сразу следует, что ассоциированная метрика для контактной структуры η полностью определяется аффинором ϕ : $g(X, Y) = d\eta(\phi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$. Если характеристическое векторное поле ξ порождает группу изометрий, т. е. ξ – векторное поле Киллинга, $L_\xi g = 0$, то такую контактную метрическую структуру называют *K-контактной* [5]. Это эквивалентно условию $L_\xi \phi = 0$.

Напомним [11], что *почти контактной* структурой на многообразии M^{2n+1} называется тройка (η, ξ, ϕ) , где η – 1-форма, ξ – векторное поле и ϕ – аффинор на M^{2n+1} , обладающие свойствами $\eta(\xi) = 1$ и $\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$.

Пусть M^{2n+1} – почти контактное многообразие. Рассмотрим прямое произведение $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$. Векторное поле на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ представим в виде $(X, f\partial_t)$, где X – касательное к M^{2n+1} , t – координата на $\mathbf{R}$, ∂_t – координатное векторное поле на $\mathbf{R}$ и f – функция класса C^∞ на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$. Определим почти комплексную структуру J на прямом произведении $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ следующим образом [2]: $J(X, f\partial_t) = (\phi X - f\xi, \eta(X)\partial_t)$. Почти контактная структура (η, ξ, ϕ) называется *нормальной*, если интегрируема определенная выше почти комплексная структура J . На почти контактном многообразии определены четыре тензора [5] $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ и $N^{(4)}$ следующими выражениями:

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X, Y) &= [\phi, \phi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi, \quad N^{(2)}(X, Y) = (L_{\phi X} \eta)(Y) - (L_{\phi Y} \eta)(X), \\ N^{(3)}(X, Y) &= (L_\xi \phi)X, \quad N^{(4)}(X, Y) = (L_\xi \eta)(X). \end{aligned}$$

Почти контактная структура (η, ξ, ϕ) является *нормальной*, если эти тензоры обращаются в нуль. Однако из обращения в нуль тензора $N^{(1)}$ следует, что и остальные тензоры $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ и $N^{(4)}$ также обращаются в нуль. Поэтому условие нормальности только следующее: $N^{(1)}(X, Y) = [\phi, \phi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi = 0$.

Псевдориманова контактная метрическая структура (η, ξ, ϕ, g) называется *K-контактной*, если векторное поле Риб ξ является киллинговым. Псевдориманова контактная метрическая структура (η, ξ, ϕ, g) называется *сасакиевой*, если $N^{(1)}(X, Y) = 0$. Таким образом, многообразие Сасаки – это нормальное контактное метрическое многообразие. Многообразие Сасаки всегда является *K-контактным*.

Определение 1. Параконтактной структурой на контактном многообразии M^{2n+1} называется тройка (η, ξ, ϕ) , где η – контактная 1-форма, ξ – поле Рибба и ϕ – аффино́р на M^{2n+1} , обладающий свойством

$$\phi^2 = I - \eta \otimes \xi.$$

Кроме того, предполагается, что ранги ± 1 -собственных распределений $D^\pm$ равны (аффино́р ϕ действует на распределении $D = \text{Ker}(\eta)$ как пара-комплексная структура).

Определение 2. Если M^{2n+1} контактное многообразие с контактной формой η , то параконтактной метрической структурой называется четверка (η, ξ, ϕ, g) , где ξ – поле Рибба, g – псевдориманова метрика на M^{2n+1} и ϕ – аффино́р на M^{2n+1} , для которых имеют место следующие свойства:

$$\phi^2 = I - \eta \otimes \xi, \quad d\eta(X, Y) = g(\phi X, Y),$$

$$g(\phi X, \phi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Из третьего свойства сразу следует, что ассоциированная метрика g для пара-контактной структуры полностью определяется аффино́ром ϕ :

$$g(X, Y) = d\eta(\phi X, Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Легко видеть, что $d\eta(\phi X, \phi Y) = -d\eta(X, Y)$.

Пусть M^{2n+1} – параконтактное многообразие. Рассмотрим прямое произведение $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$. Векторное поле на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ представим в виде $(X, f\partial_t)$, где X – касательный к M^{2n+1} , t – координата на $\mathbf{R}$ и f – функция на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$. Следуя [5 (Блэр)], дадим

Определение 3. Параконтактная структура (η, ξ, ϕ) называется нормальной, если интегрируема почти пара-комплексная структура J на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$, определенная формулой

$$J(X, f\partial_t) = (\phi X - f\xi, -\eta(X)\partial_t).$$

Выразим условие интегрируемости пара-комплексной структуры J в терминах аффино́ра ϕ на M^{2n+1} . Условием интегрируемости является обращение в нуль кручения Нейенхайса:

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] = 0.$$

Вычислим это кручение сначала на векторных полях типа $(X, 0)$, а затем для пар $(X, 0)$ и $(0, \partial_t)$:

$$\begin{aligned} [J, J]((X, 0), (Y, 0)) &= ([X, Y], 0) + [(\phi X, -\eta(X)\partial_t), (\phi Y, -\eta(Y)\partial_t)] - \\ &\quad - J[X, 0], (\phi Y, -\eta(Y)\partial_t)] - J[(\phi X, -\eta(X)\partial_t), (Y, 0)] = \\ &= (\phi^2[X, Y] + \eta([X, Y])\xi, 0) + ([\phi X, \phi Y], (-\phi X(\eta(Y)) + \phi Y(\eta(X)))\partial_t) - \\ &\quad - (\phi[X, \phi Y] + X(\eta(Y))\xi, -\eta([X, \phi Y])\partial_t) - (\phi[\phi X, Y] - Y(\eta(X))\xi, -\eta([\phi X, Y])\partial_t) = \\ &= ([\phi, \phi](X, Y) - d\eta(X, Y)\xi, -(L_{\phi X}\eta)(Y) + (L_{\phi Y}\eta)(X))\partial_t; \\ [J, J]((X, 0), (0, \partial_t)) &= [(X, 0), (0, \partial_t)] + [(\phi X, -\eta(X)\partial_t), (-\xi, 0)] - \\ &\quad - J[(X, 0), (-\xi, 0)] - J[(\phi X, -\eta(X)\partial_t), (0, \partial_t)] = \\ &= (-[\phi X, \xi], -\xi(\eta(X))\partial_t) - J(-[X, \xi], 0) = ((L_\xi\phi)(X), -(L_\xi\eta)(X)\partial_t). \end{aligned}$$

Таким образом, условие интегрируемости пара-комплексной структуры J выражается обращением в нуль четырех тензоров:

$$N^{(1)}(X, Y) = [\phi, \phi](X, Y) - d\eta(X, Y)\xi, \quad N^{(2)}(X, Y) = (L_{\phi X}\eta)(Y) - (L_{\phi Y}\eta)(X),$$

$$N^{(3)}(X, Y) = (L_\xi\phi)X, \quad N^{(4)}(X, Y) = (L_\xi\eta)(X).$$

Однако из обращения в нуль тензора $N^{(1)}$ следует, что и остальные тензоры также обращаются в нуль (доказательство этого полностью повторяет аналогичное доказательство из [5]). Поэтому условие нормальности параконтактной структуры только следующее: $N^{(1)}(X, Y) = 0$.

Определение 4. Нормальная параконтактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) называется пара-сасакиевой.

Эквивалентное условие: $N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) - d\eta(X, Y)\xi = 0$.

Определение 5. Параконтактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) называется K -контактной, если векторное поле Рибба ξ является киллинговым.

Многообразие Сасаки всегда является K -контактным.

3. Параконтактные структуры на центральных расширениях

Контактные алгебры Ли могут быть получены в результате центральных расширений симплектических алгебр Ли $\mathfrak{h}$. Напомним эту процедуру. Если имеется симплектическая алгебра Ли $(\mathfrak{h}, \omega)$, то центральное расширение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ есть алгебра Ли, в которой скобки Ли задаются следующим образом:

- $[X, \xi]_{\mathfrak{g}} = 0$;
- $[X, Y]_{\mathfrak{g}} = [X, Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi$ для любых $X, Y \in \mathfrak{h}$,

где $\xi = \partial_t$ – единичный вектор из $\mathbf{R}$.

На алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ контактная форма задается формой $\eta = \xi^*$, а $\xi = \partial_t$ – поле Рибба. Если $x = X + \lambda\xi$ и $y = Y + \mu\xi$, где $X, Y \in \mathfrak{h}$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, тогда

$$d\eta(x, y) = -\eta([x, y]) = -\xi^*([X, Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi) = -\omega(X, Y).$$

Как известно, классы изоморфизмов центральных расширений алгебры Ли $\mathfrak{h}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами $H^2(\mathfrak{h}, \mathbf{R})$. Невырожденные элементы ω из $H^2(\mathfrak{h}, \mathbf{R})$ (симплектические алгебры Ли) определяют контактные структуры на $\mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$.

Для задания аффинора φ на $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ можно использовать почти пара-комплексную структуру J на $\mathfrak{h}$ следующим образом: если $x = X + \lambda\xi$, где $X \in \mathfrak{h}$, то $\varphi(x) = JX$. Если эта почти пара-комплексная структура J на $\mathfrak{h}$ будет еще и согласованной с ω , т. е. обладать свойством $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$, то мы получим параконтактную (псевдориманову) метрическую структуру (η, ξ, φ, g) на $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$, где

$$g(X, Y) = d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Пусть $h(X, Y) = \omega(X, JY)$ – ассоциированная (псевдо)риманова метрика на симплектической алгебре Ли $(\mathfrak{h}, \omega)$. Тогда для $x = X + \lambda\xi$ и $y = Y + \mu\xi$, где $X, Y \in \mathfrak{h}$, имеем

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= -d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y); \\ g(x, y) &= \omega(X, JY) + \lambda\mu = h(X, Y) + \lambda\mu; \\ \omega(X, Y) &= h(X, JY). \end{aligned}$$

Предложение. Центральное расширение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ почти пара-кэлеровой алгебры Ли $\mathfrak{h}$ является K -контактной алгеброй Ли.

Доказательство. Как известно [5], контактное многообразие называется K -контактным, если $L_{\xi}\varphi = 0$. Для левинвариантных полей вида $x = X + \lambda\xi$ и $y = Y + \mu\xi$ и где $X, Y \in \mathfrak{h}$ имеем

$$g((L_{\xi}\varphi)x, y) = g(L_{\xi}(\varphi x) - \varphi(L_{\xi}x), y) = 0,$$

поскольку $L_{\xi}x = [\xi, X + \lambda\xi] = 0$. Поэтому $L_{\xi}\varphi = 0$. ■

Теорема 1. Пусть $(\mathfrak{h}, \omega, J)$ – почти пара-кэлерова алгебра Ли $\mathfrak{h}$ и (η, ξ, φ, g) – соответствующая ей параконтактная метрическая структура на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$. Тогда кручение Нейенхайса $[\varphi, \varphi]$ на $\mathfrak{g}$ следующим образом выражается через тензор Нейенхайса N_J почти пара-комплексной структуры J на $\mathfrak{h}$:

$$[\varphi, \varphi](x, y) = N_J(X, Y) + d\eta(x, y)\xi,$$

где $x = X + \lambda\xi$ и $y = Y + \mu\xi$ и где $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Доказательство. Непосредственные вычисления:

$$\begin{aligned} [\varphi, \varphi](x, y) &= [\varphi, \varphi](X + \lambda\xi, Y + \mu\xi) = \\ &= \varphi^2[X + \lambda\xi, Y + \mu\xi] + [\varphi(X + \lambda\xi), \varphi(Y + \mu\xi)] - \\ &\quad - \varphi[X + \lambda\xi, \varphi(Y + \mu\xi)] - \varphi[\varphi(X + \lambda\xi), Y + \mu\xi] = \\ &= \varphi^2([X, Y]_{\mathfrak{h}}) + [J(X), J(Y)] - \varphi[X + \lambda\xi, J(Y)] - \varphi[J(X), Y + \mu\xi] = \\ &= + [X, Y]_{\mathfrak{h}} + [J(X), J(Y)]_{\mathfrak{h}} + \omega(JX, JY)\xi - \varphi[X, J(Y)] - \varphi[J(X), Y] = \\ &= + [X, Y]_{\mathfrak{h}} + [J(X), J(Y)]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi - \varphi([X, J(Y)]_{\mathfrak{h}} + \\ &\quad + \omega(X, JY)\xi) - \varphi([J(X), Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(JX, Y)\xi) = \\ &= [X, Y]_{\mathfrak{h}} + [J(X), J(Y)]_{\mathfrak{h}} - J([X, J(Y)]_{\mathfrak{h}}) - J([J(X), Y]_{\mathfrak{h}}) - \omega(X, Y)\xi = \\ &= N_J(X, Y) - \omega(X, Y)\xi = N_J(X, Y) + d\eta(X, Y)\xi = N_J(X, Y) + d\eta(x, y)\xi. \blacksquare \end{aligned}$$

Следствие 1. Тензор $N^{(1)}(x, y)$ параконтактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ выражается через тензор Нейенхайса N_J почти пара-комплексной структуры J на $\mathfrak{h}$ по формуле

$$N^{(1)}(x, y) = N_J(X, Y),$$

где $x = X + \lambda\xi$ и $y = Y + \mu\xi$ и где $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Доказательство. $N^{(1)}(x, y) = [\varphi, \varphi](x, y) - d\eta(x, y)\xi = N_J(X, Y) + d\eta(x, y)\xi - d\eta(x, y)\xi = N_J(X, Y)$. ■

Следствие 2. Параконтактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$ является пара-сасакиевой тогда и только тогда, когда симплектическая алгебра $(\mathfrak{h}, \omega, J)$ является пара-кэлеровой.

4. Ковариантные производные и кривизна

В этом разделе мы установим формулы, связывающие свойства кривизны почти пара-кэлеровых алгебр Ли $(\mathfrak{h}, \omega, J)$ и полученных из них центральными расширениями параконтактных структур $(\mathfrak{g}, \eta, \xi, \varphi, g)$. Пусть ∇ и D – ковариантные производные связностей Леви-Чивита на алгебрах Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, соответственно.

Лемма. Пусть (ω, J, h) – почти пара-кэлерова структура на алгебре Ли $\mathfrak{h}$ и (η, ξ, φ, g) – соответствующая ей параконтактная метрическая структура на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$. Тогда ковариантная производная ∇ на $\mathfrak{g}$ выражается через ковариантную производную D на $\mathfrak{h}$, форму ω и почти пара-комплексную структуру J на $\mathfrak{h}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= (D_X Y)_{\mathfrak{h}} + \frac{1}{2} \omega(X, Y)\xi; \\ \nabla_X \xi &= \nabla_{\xi} X = \frac{1}{2} JX \text{ и } \nabla_{\xi} \xi = 0, \end{aligned}$$

где $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Доказательство. Непосредственные вычисления проводятся с использованием шестичленной формулы [10], которая для левоинвариантных векторных полей x, y, z на группе Ли принимает вид: $2g(\nabla_x y, z) = g([x, y], z) + g([z, x], y) + g(x, [z, y])$. Левоинвариантное векторное поле x на $\mathfrak{g}$ мы представляем в виде $x = X + \lambda\xi$, где

$X \in \mathfrak{h}$. Тогда с учетом $[X, Y]_{\mathfrak{g}} = [X, Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi$, $[X, \xi]_{\mathfrak{g}} = 0$, и ортогональности $\mathfrak{h}$ и ξ , получаем для $X, Y \in \mathfrak{h}$:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = h([X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z) + h([Z, X]_{\mathfrak{h}}, Y) + h(X, [Z, Y]_{\mathfrak{h}}) = 2h(D_X Y, Z);$$

$$2g(\nabla_X Y, \xi) = g([X, Y]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g([\xi, X]_{\mathfrak{g}}, Y) + g(X, [\xi, Y]_{\mathfrak{g}}) = \omega(X, Y).$$

Следовательно, $\nabla_X Y = (D_X Y)_{\mathfrak{h}} + \frac{1}{2} \omega(X, Y)\xi$. Далее, с учетом $h(X, Y) = \omega(X, JY)$:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X \xi, Z) &= g([X, \xi]_{\mathfrak{g}}, Z) + g([Z, X]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g(X, [Z, \xi]_{\mathfrak{g}}) = \\ &= \omega(Z, X) = \omega(Z, JX) = h(Z, JX) = g(JX, Z); \end{aligned}$$

$$2g(\nabla_{\xi} \xi, Z) = g([\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}, Z) + g[Z, \xi]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g(\xi, [Z, \xi]_{\mathfrak{g}}) = 0;$$

$$2g(\nabla_X \xi, \xi) = g([X, \xi]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g([\xi, X]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g(X, [\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}) = 0;$$

$$2g(\nabla_{\xi} \xi, \xi) = g([\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g[\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g(\xi, [\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}) = 0.$$

Поэтому $\nabla_X \xi = \frac{1}{2} JX \in \mathfrak{h}$. Аналогично,

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_{\xi} Y, Z) &= g([\xi, Y]_{\mathfrak{g}}, Z) + g([Z, \xi]_{\mathfrak{g}}, Y) + g(\xi, [Z, Y]_{\mathfrak{g}}) = \\ &= \omega(Z, Y) = \omega(Z, JY) = h(Z, JY) = g(JY, Z); \end{aligned}$$

$$2g(\nabla_{\xi} \xi, Z) = g([\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}, Z) + g[Z, \xi]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g(\xi, [Z, \xi]_{\mathfrak{g}}) = 0;$$

$$2g((\nabla_{\xi} Y, \xi) = g([\xi, Y]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g([\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}, Y) + g(\xi, [\xi, Y]_{\mathfrak{g}}) = 0;$$

$$2g(\nabla_{\xi} \xi, \xi) = g([\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g[\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}, \xi) + g(\xi, [\xi, \xi]_{\mathfrak{g}}) = 0.$$

Следовательно, $\nabla_{\xi} Y = \frac{1}{2} JY \in \mathfrak{h}$. ■

Теорема 2. Пусть (ω, J, h) – почти пара-кэлерова структура на алгебре Ли $\mathfrak{h}$ и (η, ξ, ϕ, g) – соответствующая ей параконтактная метрическая структура на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$. Тогда тензор кривизны R на $\mathfrak{g}$ выражается через тензор кривизны $R_{\mathfrak{h}}$ на $\mathfrak{h}$, форму ω и почти пара-комплексную структуру J на $\mathfrak{h}$ по формулам:

$$R(X, Y)Z = R_{\mathfrak{h}}(X, Y)Z + \frac{1}{2} D_Z \omega(X, Y)\xi - \frac{1}{4} (\omega(X, Z)JY - \omega(Y, Z)JX) - \frac{1}{2} \omega(X, Y)JZ;$$

$$R(X, Y)\xi = \frac{1}{2} ((D_X J)Y - (D_Y J)X);$$

$$R(X, \xi)Z = \frac{1}{2} (D_X J)Z + \frac{1}{4} g(X, Z)\xi, \quad R(X, \xi)\xi = -\frac{1}{4} X,$$

где $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Доказательство. Заключается в непосредственных вычислениях по формуле $R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z$ с использованием формул ковариантных производных, полученных в Лемме 1. Например, возьмем сначала левоинвариантные векторные поля вида $X, Y, Z \in \mathfrak{h}$. Тогда с учетом $[X, Y]_{\mathfrak{g}} = [X, Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi$, $[X, \xi]_{\mathfrak{g}} = 0$, ортогональности $\mathfrak{h}$ и ξ и $\nabla_X Y = (D_X Y)_{\mathfrak{h}} + \frac{1}{2} \omega(X, Y)\xi$, получаем

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z = \\ &= \nabla_X \{D_Y Z + \frac{1}{2} \omega(Y, Z)\xi\} - \nabla_Y \{D_X Z + \frac{1}{2} \omega(X, Z)\xi\} - \nabla_{[X, Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi} Z = \\ &(\text{Поскольку } \omega(Y, Z) \text{ — это постоянная функция, то } \nabla_X(\omega(Y, Z)) = X(\omega(Y, Z)) = 0.) \\ &= D_X D_Y Z + \frac{1}{2} \omega(X, D_Y Z)\xi + \frac{1}{2} \omega(Y, Z)(\frac{1}{2} JX) - \\ &- \{D_Y D_X Z + \frac{1}{2} \omega(Y, D_X Z)\xi + \frac{1}{2} \omega(X, Z)(\frac{1}{2} JY)\} - \\ &- \{D_{[X, Y]} Z + \frac{1}{2} \omega([X, Y], Z)\xi\} - \omega(X, Y) \nabla_{\xi} Z = \\ &= R_{\mathfrak{h}}(X, Y)Z + \frac{1}{2} \{ \omega(X, D_Y Z) - \omega(Y, D_X Z) - \omega([X, Y], Z) \} \xi + \\ &+ \frac{1}{4} \{ \omega(Y, Z) JX - \omega(X, Z) JY \} - \frac{1}{2} \omega(X, Y) JZ. \end{aligned}$$

Для того чтобы упростить $\omega(X, D_Y Z) - \omega(Y, D_X Z) - \omega([X, Y], Z)$ в последнем выражении, используем свойства $D_X Z = D_Z X + [X, Z]$ и $D_Y Z = D_Z Y + [Y, Z]$. Тогда с учетом замкнутости формы ω , $\omega(X, [Y, Z]) + \omega(Y, [Z, X]) + \omega(Z, [X, Y]) = d\omega(X, Y, Z) = 0$ и равенства $Z\omega(X, Y) = (D_Z \omega)(X, Y) + \omega(D_Z X, Y) + \omega(X, D_Z Y) = 0$ получаем

$$\begin{aligned}
& \omega(X, D_Y Z) - \omega(Y, D_X Z) - \omega([X, Y], Z) = \\
& = \omega(X, D_Z Y + [Y, Z]) - \omega(Y, D_Z X + [X, Z]) - \omega([X, Y], Z) = \\
& = \omega(X, D_Z Y) + \omega(X, [Y, Z]) - \omega(Y, D_Z X) - \omega(Y, [X, Z]) - \omega([X, Y], Z) = \\
& = \omega(X, D_Z Y) - \omega(Y, D_Z X) + \omega(X, [Y, Z]) - \omega(Y, [X, Z]) - \omega([X, Y], Z) = \\
& = \omega(D_Z X, Y) + \omega(X, D_Z Y) = - (D_Z \omega)(X, Y).
\end{aligned}$$

Подставляя это полученное выражение, заканчиваем вычисления:

$$= R_{\mathfrak{h}}(X, Y)Z + \frac{1}{2} D_Z \omega(X, Y) \xi + \frac{1}{4} (\omega(Y, Z) JX - \omega(X, Z) JY) - \frac{1}{2} \omega(X, Y) JZ.$$

Рассмотрим случай $R(X, Y)\xi$, где $X, Y \in \mathfrak{h}$. Тогда с учетом равенств $\nabla_X \xi = \frac{1}{2} JX$ и $\nabla_\xi \xi = 0$ получаем

$$\begin{aligned}
R(X, Y)\xi &= \nabla_X (\nabla_Y \xi) - \nabla_Y (\nabla_X \xi) - \nabla_{[X, Y]} \xi = \\
&= \nabla_X (\frac{1}{2} JY) - \nabla_Y (\frac{1}{2} JX) - \nabla_{\{[X, Y]_{\mathfrak{h}} + \omega(X, Y)\xi\}} \xi = \\
&= \nabla_X (\frac{1}{2} JY) - \nabla_Y (\frac{1}{2} JX) - \frac{1}{2} J[X, Y] = \\
&= \frac{1}{2} \{D_X JY + \frac{1}{2} \omega(X, JY)\xi\} - \frac{1}{2} \{D_Y JX + \frac{1}{2} \omega(Y, JX)\xi\} - \frac{1}{2} J[X, Y] = \\
&= \frac{1}{2} (D_X J)Y - \frac{1}{2} J(D_X Y) + \frac{1}{4} \omega(X, JY)\xi - \frac{1}{2} (D_Y J)X - \\
&\quad - \frac{1}{2} J(D_Y X) - \frac{1}{4} \omega(Y, JX)\xi - \frac{1}{2} J[X, Y] = \\
&= \frac{1}{2} (D_X J)Y - \frac{1}{2} (D_Y J)X + \frac{1}{2} J(D_X Y - D_Y X) + \\
&\quad + \frac{1}{4} \omega(X, JY)\xi - \frac{1}{4} \omega(Y, JX)\xi - \frac{1}{2} J[X, Y] = \\
&= \frac{1}{2} (D_X J)Y - \frac{1}{2} (D_Y J)X + \frac{1}{2} J([X, Y]) + \frac{1}{4} h(X, Y)\xi - \\
&\quad - \frac{1}{4} h(Y, X)\xi - \frac{1}{2} J[X, Y] = \frac{1}{2} ((D_X J)Y - (D_Y J)X).
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $R(X, \xi)Y$, где $X, Y \in \mathfrak{h}$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
R(X, \xi)Z &= \nabla_X (\nabla_\xi Z) - \nabla_\xi (\nabla_X Z) - \nabla_{[X, \xi]} Z = \\
&= \nabla_X (\frac{1}{2} JZ) - \nabla_\xi (D_X Z + \frac{1}{2} \omega(X, Z)\xi) = \frac{1}{2} \nabla_X (JZ) - \frac{1}{2} J(D_X Z) = \\
&= \frac{1}{2} \{D_X JZ + \frac{1}{2} \omega(X, JZ)\xi\} - \frac{1}{2} J(D_X Z) = \\
&= \frac{1}{2} \{(D_X J)Z + J(D_X Z) + \frac{1}{2} \omega(X, JZ)\xi\} - \frac{1}{2} J(D_X Z) = \\
&= \frac{1}{2} (D_X J)Z + \frac{1}{4} \omega(X, JZ)\xi = \frac{1}{2} (D_X J)Z + \frac{1}{4} g(X, Z)\xi.
\end{aligned}$$

Аналогично устанавливается последняя формула:

$$R(X, \xi)\xi = \nabla_X (\nabla_\xi \xi) - \nabla_\xi (\nabla_X \xi) - \nabla_{[X, \xi]}\xi = -\frac{1}{2} \nabla_\xi (JX) = -\frac{1}{2} \frac{1}{2} J(JX) = -\frac{1}{4} X. \blacksquare$$

В случае пара-кэлеровой структуры на алгебре Ли $\mathfrak{h}$ имеем, $D\omega = 0$ и $DJ = 0$. Поэтому формулы для кривизны будут более простого вида. Если дополнительно учесть формулу $\omega(Y, Z)JX - \omega(X, Z)JY = h(Y, JZ)JX - h(X, JZ)JY$, то получаем

Следствие 3. Пусть (ω, J, h) – пара-кэлерова структура на алгебре Ли $\mathfrak{h}$ и (η, ξ, ϕ, g) – соответствующая ей контактная пара-сасакиева структура на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$. Тогда тензор кривизны R на $\mathfrak{g}$ выражается через тензор кривизны $R_{\mathfrak{h}}$ на $\mathfrak{h}$, форму ω и почти пара-комплексную структуру J на $\mathfrak{h}$ следующим образом:

$$R(X, Y)Z = R_{\mathfrak{h}}(X, Y)Z - \frac{1}{4} h(X, JZ)JY + \frac{1}{4} h(Y, JZ)JX - \frac{1}{2} h(X, JY)JZ;$$

$$R(X, Y)\xi = 0;$$

$$R(X, \xi)Z = \frac{1}{4} g(X, Z)\xi;$$

$$R(X, \xi)\xi = -\frac{1}{4} X,$$

где $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Напомним, что тензор Риччи Ric в псевдоримановом случае определяется формулой

$$Ric(X, Y) = \sum_i \varepsilon_i g(R(e_i, Y)Z, e_i),$$

где $\{e_i\}$ – ортонормированный базис на $\mathfrak{g}$ и $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$. Мы будем выбирать базис алгебры $\mathfrak{g}$ вида $\{e_1, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}\} = \{E_1, \dots, E_{2n}, \xi\}$, где $E_i \in \mathfrak{h}$ и ξ – поле Рибба. В следующих вычислениях считаем, что индекс i меняется от 1 до $2n+1$, а индекс j – от 1 до $2n$. Кроме того, мы считаем, что почти пара-комплексная структура на $\mathfrak{h}$ является интегрируемой, так что $\mathfrak{h}$ – это пара-кэлерова алгебра Ли.

Теорема 3. Пусть (ω, J, h) – пара-кэлерова структура на алгебре Ли $\mathfrak{h}$ и (η, ξ, ϕ, g) – соответствующая ей параконтактная структура Сасаки на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbf{R}$. Тогда тензор Риччи Ric на $\mathfrak{g}$ выражается через тензор Риччи $Ric_{\mathfrak{h}}$ на $\mathfrak{h}$, форму ω и почти пара-комплексную структуру J на $\mathfrak{h}$ следующим образом:

$$Ric(Y, Z) = Ric_{\mathfrak{h}}(Y, Z) + \frac{1}{2} h(Y, Z);$$

$$Ric(Y, \xi) = 0, Ric(\xi, \xi) = -n/2,$$

где $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Доказательство. В ортонормированном базисе $\{e_1, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}\} = \{E_1, \dots, E_{2n}, \xi\}$ алгебры $\mathfrak{g}$, где $E_j \in \mathfrak{h}$, для $Y, Z \in \mathfrak{h}$ получаем

$$\begin{aligned} Ric(Y, Z) &= \sum_i \varepsilon_i g(R(e_i, Y)Z, e_i) = \\ &= \sum_i \varepsilon_i g(R_{\mathfrak{h}}(e_i, Y)Z + \frac{1}{4} \omega(Y, Z)Je_i - \frac{1}{4} \omega(e_i, Z)JY - \frac{1}{2} \omega(e_i, Y)JZ, e_i) = \\ &= \sum_j \varepsilon_j h(R_{\mathfrak{h}}(E_j, Y)Z, E_j) - \frac{1}{4} \varepsilon_j \omega(Y, Z)h(JE_j, E_j) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \varepsilon_j \omega(E_j, Z)h(JY, E_j) - \frac{1}{2} \varepsilon_j \omega(E_j, Y)h(JZ, E_j) + g(R(\xi, Y)Z, \xi) = \\ &= Ric_{\mathfrak{h}}(Y, Z) - \frac{1}{4} \sum_j \varepsilon_j \omega(E_j, Z)h(JY, E_j) - \frac{1}{2} \varepsilon_j \omega(E_j, Y)h(JZ, E_j) - \frac{1}{4} g(Y, Z) = \\ &= Ric_{\mathfrak{h}}(Y, Z) - \frac{1}{4} \sum_j \varepsilon_j h(E_j, JZ)h(E_j, JY) - \frac{1}{2} \varepsilon_j h(E_j, JY)h(E_j, JZ) - \frac{1}{4} h(Y, Z) = \\ &= Ric_{\mathfrak{h}}(Y, Z) - \frac{1}{4} h(JY, JZ) - \frac{1}{2} h(JY, JZ) - \frac{1}{4} h(Y, Z) = \\ &= Ric_{\mathfrak{h}}(Y, Z) + \frac{1}{4} h(Y, Z) + \frac{1}{2} h(Y, Z) - \frac{1}{4} h(Y, Z) = \\ &= Ric_{\mathfrak{h}}(Y, Z) + \frac{1}{2} h(Y, Z). \end{aligned}$$

Далее,

$$Ric(Y, \xi) = \sum_i g(R(e_i, Y)\xi, e_i) = \sum_j \varepsilon_j g(R(E_j, Y)\xi, E_j) + g(R(\xi, Y)\xi, \xi) = -\frac{1}{4} g(Y, \xi) = 0.$$

$$\begin{aligned} Ric(\xi, \xi) &= \sum_j \varepsilon_j g(R(e_j, \xi)\xi, e_j) = \sum_j \varepsilon_j g(R(E_j, \xi)\xi, E_j) + g(R(\xi, \xi)\xi, \xi) = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_j \varepsilon_j g(E_j, E_j) = -\frac{1}{4} \sum_j \varepsilon_j \varepsilon_j = -n/2. \blacksquare \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Bejan C.L., Eken S., Kılıç E. Legendre Curves on Generalized Paracontact Metric Manifolds // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2019. V. 42. P. 185–199. DOI 10.1007/s40840-017-0475-y.
2. Prakasha D.G., Veeresha P. Para-Sasakian manifolds and *-Ricci solitons // Afrika Matematika. V. 30. Iss. 7–8. P. 989–998. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13370-019-00698-9>.
3. De U.C., Han Y., Mandal K. On Para-Sasakian Manifolds Satisfying Certain Curvature Conditions // Filomat. 2017. V. 31. No. 7. P. 1941–1947. DOI 10.2298/FIL1707941D.
4. Alekseevsky D. V., Cortes V., Galaev A. and Leistner T. Cones over pseudo-Riemannian manifolds and their holonomy // J. Reine Angew. Math. 2009. V. 635. P. 23–69. DOI: <https://doi.org/10.1515/CRELLE.2009.075>.
5. Blair D.E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry // Lecture Notes in Mathematics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer–Verlag, 1976.

6. Алексеевский Д.В., Медори К., Томассини А. Однородные пара-кэлеровы многообразия Эйнштейна // Успехи математических наук. 2009. Т. 64. Вып. 1(385). С. 3–50. <https://doi.org/10.4213/rm9262>.
7. Smolentsev N.K. Left-invariant almost para-complex structures on six-dimensional nilpotent Lie groups // Cornell University Library: arXiv:1801.07991v2 math.DG. 15 p.
8. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups // Diff. Geom. and its Appl. 2008. V. 26. Iss. 5. P. 544–552. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2008.04.001>.
9. Goze M., Khakimdjanyov Y., Medina A. Symplectic or contact structures on Lie groups. Differential Geom. Appl. 2004. V. 21. No. 1. P. 41–54. DOI: [10.1016/j.difgeo.2003.12.006](https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2003.12.006).
10. Smolentsev N.K. Invariant pseudo-Sasakian and K-contact structures on seven-dimensional nilpotent Lie groups // Science Evolution. 2017. V. 2. No. 1. P. 91–99.
11. Kobayashi S. and Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. Vol. 1 and 2. New York; London: Interscience Publ., 1963.

Статья поступила 20.08.2019 г.

Smolentsev N. K. (2019) LEFT-INVARIANT PARA-SASAKIAN STRUCTURES ON LIE GROUPS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 27–37

DOI 10.17223/19988621/62/3

Keywords: para-complex structures; para-Sasakian structures; para-Sasakian manifold; para-Kähler structures; left-invariant paracontact structures.

Paracontact structures on manifolds are currently being studied quite actively; there are several different approaches to the definition of the concepts of paracontact and para-Sasakian structures. In this paper, the paracontact structure on a contact manifold (M^{2n+1}, η) is determined by an affinor ϕ which has the property $\phi^2 = I - \eta \otimes \xi$, where ξ is the Reeb field and I is the identity automorphism. In addition, it is assumed that $d\eta(\phi X, \phi Y) = -d\eta(X, Y)$. This allows us to define a pseudo-Riemannian metric by the equality $g(X, Y) = d\eta(\phi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$. In this paper, Sasaki paracontact structures are determined in the same way as conventional Sasaki structures in the case of contact structures. A paracontact metric structure (η, ξ, ϕ, g) on M^{2n+1} is called para-Sasakian if the almost para-complex structure J on $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ defined by the formula $J(X, f\partial_t) = (\phi X - f\xi, -\eta(X)\partial_t)$, is integrable. In this paper, we obtain tensors whose vanishing means that the manifold is para-Sasakian. In the case of Lie groups, it is shown that left-invariant para-Sasakian structures can be obtained as central extensions of para-Kähler Lie groups. In this case, the relations between the curvature of the para-Kähler Lie group and the curvature of the corresponding para-Sasakian Lie group are found.

AMS Mathematical Subject Classification: 53C15, 53D10, 53C25, 53C50

Nikolay K. SMOLENTSEV (Dr. Sci. of Physics and Mathematics, professor of Fundamental Mathematics department of Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: smolennk@yandex.ru

REFERENCES

1. Bejan C.L., Eken S., Kılıç E. (2019) Legendre Curves on Generalized Paracontact Metric Manifolds. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 42. pp. 185–199. DOI [10.1007/s40840-017-0475-y](https://doi.org/10.1007/s40840-017-0475-y).
2. Prakasha D.G., Veerasha P. (2019) Para-Sasakian manifolds and *-Ricci solitons. *Afrika Matematika*. 30(7–8). pp. 989–998. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13370-019-00698-9>.
3. De U.C., Han Y., Mandal K. (2017) On Para-Sasakian Manifolds Satisfying Certain Curvature Conditions. *Filomat*. 31(7). pp. 1941–1947. DOI: [10.2298/FIL1707941D](https://doi.org/10.2298/FIL1707941D).
4. Alekseevsky D.V., Cortes V., Galaev A., Leistner T. (2009) Cones over pseudo-Riemannian manifolds and their holonomy. *J. Reine Angew. Math.* 635. pp. 23–69. DOI: <https://doi.org/10.1515/CRELLE.2009.075>.

5. Blair D.E. (1976) *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*. Lecture Notes in Mathematics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer–Verlag.
6. Alekseevsky D.V., Medori C., Tomassini A. (2009) Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds. *Russ. Math. Surv.* 64(1). pp. 1–43. DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9262>.
7. Smolentsev N.K. (2018) Left-invariant almost para-complex structures on six-dimensional nilpotent Lie groups. arXiv:1801.07991v2 math.DG. 15 p.
8. Diatta A. (2008) Left invariant contact structures on Lie groups. *Diff. Geom. and its Appl.* 26(5). pp. 544–552. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2008.04.001>.
9. Goze M., Khakimjanov Y., Medina A. (2004) Symplectic or contact structures on Lie groups. *Differential Geom. Appl.* 21(1). pp. 41–54. DOI: 10.1016 / j.difgeo.2003.12.006.
10. Smolentsev N.K. (2017) Invariant pseudo-Sasakian and K-contact structures on seven-dimensional nilpotent Lie groups. *Science Evolution*. 2(1). pp. 91–99.
11. Kobayashi S., Nomizu K. (1963) *Foundations of Differential Geometry. Vol. 1, 2*. New York; London: Interscience Publ.

Received: August 20, 2019