УДК 517.2; 519.64
DOI 10.17223/19988621/62/4

MSC 45E05; 31B10

Э.Г. Халилов, М.Н. Бахшалыева

О ПРОИЗВОДНОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ¹

Дана формула для вычисления производной логарифмического потенциала двойного слоя и изучены некоторые основные свойства оператора, порожденного производной логарифмического потенциала двойного слоя в обобщенных пространствах Гёльдера.

Ключевые слова: уравнения Лапласа, кривая Ляпунова, производная логарифмического потенциала двойного слоя, криволинейный сингулярный интеграл, обобщенные пространства Гёльдера.

Известно [1], что краевые задачи для уравнения Лапласа приводятся к сингулярному интегральному уравнению, зависящему от нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя

$$W(x) = \int_L \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \rho(y) dL_y, \quad x \in L,$$

где $L \subset R^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$, $\vec{n}(y)$ – внешняя единичная нормаль в точке $y \in L$, $\rho(y)$ – непрерывная функция на кривой L , а $\Phi(x, y)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, т.е.

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, \quad x, y \in R^2, \quad x \neq y.$$

Построенные Ляпуновым контрпримеры показывают [2], что для потенциалов простого и двойного слоев с непрерывной плотностью производные, вообще говоря, не существуют. Следует отметить, что в работе [3] доказана ограниченность оператора, порожденного прямым значением производной акустического потенциала простого слоя в обобщенных пространствах Гёльдера, а в работе [4] дана приемлемая формула для вычисления производной акустического потенциала двойного слоя и изучены основные свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя в обобщенных пространствах Гёльдера. Исходя из этих результатов, в работе [5] построена кубатурная формула для нормальной производной акустического потенциала двойного слоя, а в работах [6–8] исследованы приближенные решения интегральных уравнений краевых задач для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве. Однако до сих пор теоретически не обосновано исследование приближенных решений сингулярных интегральных уравнений краевых задач для уравнения Лапласа, зависящих от нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя. Причина заключается в том, что не найдена приемлемая формула для вычисления производной логарифмического потенциала двойного слоя и не исследованы основные

¹ Работа выполнена при поддержке "Университетского гранта" АГУНП (грант № ADNSU-2018-1-01).

свойства оператора $(Ap)(x) = \frac{\partial W(x)}{\partial \vec{n}(x)}$, $x \in L$, в обобщенных пространствах Гёльдера, чему и посвящена настоящая работа.

2. Существование и формула вычисления производной логарифмического потенциала двойного слоя

Через $C(L)$ обозначим пространство всех непрерывных функций на L с нормой $\|\rho\|_\infty = \max_{x \in L} |\rho(x)|$, а для функции $\varphi(x) \in C(L)$ введем модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi, \delta) = \delta \sup_{\tau \geq \delta} \frac{\overline{\omega}(\varphi, \tau)}{\tau}, \quad \delta > 0,$$

где $\overline{\omega}(\varphi, \tau) = \max_{\substack{|x-y| \leq \tau \\ x, y \in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|$.

Теорема 1. Пусть $L \subset R^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$, $\rho(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на L и

$$\int_0^{\text{diam } L} \frac{\omega(\overrightarrow{\text{grad}} \rho, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда логарифмический потенциал двойного слоя $W(x)$ имеет на L производную, причем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} W(x) = & -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{(\overrightarrow{yx}, \vec{n}(y)) \overrightarrow{yx}}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\vec{n}(y)}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y, \quad x \in L \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{и} \quad |\overrightarrow{\text{grad}} W(x)| \leq M \left(\|\rho\|_\infty + \|\overrightarrow{\text{grad}} \rho\|_\infty + \int_0^d \frac{\omega(\overrightarrow{\text{grad}} \rho, t)}{t} dt \right), \quad \forall x \in L,$$

где последний интеграл в равенстве (1) существует в смысле главного значения Коши.

Доказательство. Известно, что [9]

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\overrightarrow{yx}, \vec{n}(y))}{|x-y|^2} dL_y = -\frac{1}{2}, \quad x \in L,$$

тогда выражение $W(x)$ можно представить в виде

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\overrightarrow{yx}, \vec{n}(y))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y - \frac{1}{2} \rho(x), \quad x \in L.$$

Функция $\rho(x)$ непрерывно дифференцируема, поэтому, принимая во внимание неравенства²

$$|(\overrightarrow{yx}, \vec{n}(y))| \leq M |x-y|^{1+\alpha}, \quad \forall x, y \in L,$$

² Здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

получаем, что

$$\left| \frac{(\overline{yx}, \vec{n}(y))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) \right| \leq M \|\overline{\text{grad}} \rho\|_{\infty} |x-y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in L,$$

и, следовательно, функция $W(x)$ имеет на L производную, причем

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad}} W(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \overline{\text{grad}}_x \left[\frac{(\overline{yx}, \vec{n}(y))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) \right] dL_y - \frac{1}{2} \overline{\text{grad}} \rho(x) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{(\overline{yx}, \vec{n}(y)) \overline{yx}}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\vec{n}(y)}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y, \quad x \in L. \end{aligned}$$

Как видно, интеграл

$$\int_L \frac{(\overline{yx}, \vec{n}(y)) \overline{yx}}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y \quad (2)$$

сходится как несобственный и

$$\left| \int_L \frac{(\overline{yx}, \vec{n}(y)) \overline{yx}}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y \right| \leq M \|\overline{\text{grad}} \rho\|_{\infty}.$$

Очевидно, что

$$\int_L \frac{\vec{n}(y)}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y = \int_L \frac{\vec{n}(y) - \vec{n}(x)}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y + \vec{n}(x) \int_L \frac{\rho(y) - \rho(x)}{|x-y|^2} dL_y.$$

Из неравенства

$$|\vec{n}(y) - \vec{n}(x)| \leq M |x-y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in L,$$

получаем, что интеграл

$$\int_L \frac{\vec{n}(y) - \vec{n}(x)}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y$$

сходится как несобственный, причем

$$\left| \int_L \frac{\vec{n}(y) - \vec{n}(x)}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y \right| \leq M \|\overline{\text{grad}} \rho\|_{\infty}.$$

Остается доказать, что интеграл

$$\int_L \frac{\rho(y) - \rho(x)}{|x-y|^2} dL_y$$

существует в смысле главного значения Коши. Пусть $d > 0$ есть радиус стандартной окружности для L [9] и $L_d(x) = \{y \in L : |y-x| < d\}$, $x \in L$. Так как существует такая точка $\tilde{y} = x + \vec{\theta}(y-x)$, что

$$\rho(y) - \rho(x) = (\overline{\text{grad}} \rho(\tilde{y}), \overline{xy}), \quad x, y \in L,$$

поэтому

$$\int_L \frac{\rho(y) - \rho(x)}{|x-y|^2} dL_y = \int_{L \setminus L_d(x)} \frac{\rho(y) - \rho(x)}{|x-y|^2} dL_y +$$

$$+ \int_{L_d(x)} \frac{(\overline{\text{grad}} \rho(\tilde{y}) - \overline{\text{grad}} \rho(x), \overline{xy})}{|x - y|^2} dL_y + \int_{L_d(x)} \frac{(\overline{\text{grad}} \rho(x), \overline{xy})}{|x - y|^2} dL_y,$$

где $\bar{\theta} = (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ и $\bar{\theta}_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2$. Как видно, интеграл

$$\int_{L/L_d(x)} \frac{\rho(y) - \rho(x)}{|x - y|^2} dL_y$$

существует как собственный. Кроме того, принимая во внимание формулу вычисления криволинейного интеграла, получим

$$\left| \int_{L_d(x)} \frac{(\overline{\text{grad}} \rho(\tilde{y}) - \overline{\text{grad}} \rho(x), \overline{xy})}{|x - y|^2} dL_y \right| \leq M \int_0^d \frac{\omega(\overline{\text{grad}} \rho, t)}{t} dt < +\infty.$$

Теперь докажем, что интеграл

$$\int_{L_d(x)} \frac{(\overline{\text{grad}} \rho(x), \overline{xy})}{|x - y|^2} dS_y = \frac{\partial \rho(x)}{\partial x_1} \int_{L_d(x)} \frac{y_1 - x_1}{|x - y|^2} dL_y + \frac{\partial \rho(x)}{\partial x_2} \int_{L_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{|x - y|^2} dL_y$$

существует в смысле главного значения Коши. Известно (см.[9]), что для любой точки $x \in L$ окрестность $L_d(x)$ пересекается с прямой, параллельной нормали $\vec{n}(x)$, в единственной точке, либо вообще не пересекается, т.е. множество $L_d(x)$ однозначно проектируется на промежуток $\Omega_d(x)$, лежащий на прямой $\Gamma(x)$, касательной к L в точке x . На куске $L_d(x)$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u, v) с началом в точке x , в которой ось v направим вдоль нормали $\vec{n}(x)$, а ось u направим вдоль положительного направления касательной прямой $\Gamma(x)$. Тогда координатами точки x будут $(0, 0)$. Кроме того, в этих координатах окрестность $L_d(x)$ можно задать уравнением $v = f(u)$, $u \in \Omega_d(x)$, причем

$$f \in H_{1,\alpha}(\Omega_d(x)) \text{ и } f(0) = 0, f'(0) = 0.$$

Здесь через $H_{1,\alpha}(\Omega_d(x))$ обозначено линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых на $\Omega_d(x)$ функций f , удовлетворяющих условию

$$|f'(u_1) - f'(u_2)| \leq M_f |u_1 - u_2|^\alpha, \quad \forall u_1, u_2 \in \Omega_d(x),$$

где M_f – положительная постоянная, зависящая от f , а не от u_1 и u_2 . Обозначим через $\Gamma_d(x)$ часть касательной прямой $\Gamma(x)$ в точке $x \in L$, заключенной внутри окружности радиуса d с центром в точке x . Известно [10], что если $\tilde{y} \in \Gamma(x)$ есть проекция точки $y \in L$, то

$$|x - \tilde{y}| \leq |x - y| \leq C_1 |x - \tilde{y}|, \quad \text{mes} L_d(x) \leq C_2 \text{mes} \Gamma_d(x),$$

где C_1 и C_2 – положительные постоянные, зависящие лишь от L , а через $\text{mes} L_d(x)$ обозначена длина кривой $L_d(x)$. Пусть $d_0 = d / C_1$. Очевидно, что $(-d_0, d_0) \subset \Omega_d(x)$. По формуле вычисления криволинейного интеграла, получаем

$$\int_{L_d(x)} \frac{y_1 - x_1}{|x - y|^2} dL_y = \int_{\Omega_d(x)} \frac{u \sqrt{1 + (f'(u))^2}}{u^2 + (f(u))^2} du = \int_{\Omega_d(x) \setminus (-d_0, d_0)} \frac{u \sqrt{1 + (f'(u))^2}}{u^2 + (f(u))^2} du + \int_{-d_0}^{d_0} \frac{du}{u} +$$

$$+ \int_{-d_0}^{d_0} \frac{u \left(\sqrt{1 + (f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du + \int_{-d_0}^{d_0} u \left(\frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) du.$$

Слагаемые интегралы в правой части этого равенства обозначим через A_1 , A_2 , A_3 и A_4 соответственно.

Как видно, интеграл A_1 существует как собственный, а интеграл A_2 существует в смысле главного значения Коши и равен нулю. Кроме того, учитывая, что (см. [9])

$$|f'(u)| \leq M |u|^\alpha \quad (3)$$

находим

$$|A_3| = \left| \int_{-d_0}^{d_0} \frac{u (f'(u))^2}{(u^2 + (f(u))^2) \left(1 + \sqrt{1 + (f'(u))^2} \right)} du \right| \leq M \int_{-d_0}^{d_0} |u|^{2\alpha-1} du \leq M.$$

Так как

$$|f(u)| = |f(u) - f(0)| \leq M |u|^{1+\alpha}, \quad (4)$$

то для интеграла A_4 имеем

$$|A_4| = \left| \int_{-d_0}^{d_0} \frac{u (f(u))^2}{u^2 (u^2 + (f(u))^2)} du \right| \leq M \int_{-d_0}^{d_0} |u|^{2\alpha-1} du \leq M.$$

Следовательно,

$$\left| \int_{L_d(x)} \frac{y_1 - x_1}{|x - y|^2} dL_y \right| \leq M.$$

Кроме того, принимая во внимание (4), имеем

$$\left| \int_{L_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{|x - y|^2} dL_y \right| = \left| \int_{\Omega_d(x)} \frac{f(u) \sqrt{1 + (f'(u))^2}}{u^2 + (f(u))^2} du \right| \leq M \int_{\Omega_d(x)} |u|^{\alpha-1} du \leq M.$$

В результате получаем, что

$$\left| \int_{L_d(x)} \frac{(\overrightarrow{\text{grad}} \rho(x), \overrightarrow{xy})}{|x - y|^2} dS_y \right| \leq M \|\overrightarrow{\text{grad}} \rho\|_\infty, \quad \forall x \in L.$$

Этим и завершается доказательство теоремы.

Следствие 1. Пусть $L \subset R^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова, $\rho(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на L и

$$\int_0^{\text{diam} L} \frac{\omega(\overrightarrow{\text{grad}} \rho, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда логарифмический потенциал двойного слоя $W(x)$ имеет на $\forall x \in L$ нормальную производную, причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x)}{\partial \vec{n}(x)} = & -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{(\overrightarrow{yx}, \vec{n}(y))(\overrightarrow{yx}, \vec{n}(x))}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\vec{n}(y), \vec{n}(x))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y, \quad x \in L, \end{aligned} \quad (5)$$

$$и \quad \left| \frac{\partial W(x)}{\partial \vec{n}(x)} \right| \leq M \left(\|\rho\|_\infty + \|\overrightarrow{\text{grad} \rho}\|_\infty + \int_0^d \frac{\omega(\overrightarrow{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt \right), \quad \forall x \in L,$$

где последний интеграл в равенстве (5) существует в смысле главного значения Коши.

3. Некоторые свойства оператора, порожденного производной логарифмического потенциала двойного слоя

Сначала докажем справедливость оценки А. Зигмунда для производной логарифмического потенциала двойного слоя.

Теорема 2. Пусть $L \subset R^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$, $\rho(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на L и

$$\int_0^{\text{diam} L} \frac{\omega(\overrightarrow{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда при $0 < \alpha < 1$

$$\omega(\overrightarrow{\text{grad} W}, h) \leq M_\rho \left(h^\alpha + \omega(\overrightarrow{\text{grad} \rho}, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overrightarrow{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam} L} \frac{\omega(\overrightarrow{\text{grad} \rho}, t)}{t^2} dt \right),$$

а при $\alpha = 1$

$$\omega(\overrightarrow{\text{grad} W}, h) \leq M_\rho \left(h |\ln h| + \omega(\overrightarrow{\text{grad} \rho}, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overrightarrow{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam} L} \frac{\omega(\overrightarrow{\text{grad} \rho}, t)}{t^2} dt \right),$$

где M_ρ – положительная постоянная, зависящая лишь от L и ρ .

Доказательство. Пусть $0 < \alpha < 1$. Возьмем любые точки $x', x'' \in L$, такие, чтобы величина $h = |x' - x''|$ была достаточно малой. Принимая во внимание формулу (1), имеем

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{\text{grad} W}(x') - \overrightarrow{\text{grad} W}(x'') = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_L \left[\frac{(\overrightarrow{x'y}, \vec{n}(y)) \overrightarrow{yx'}}{|x' - y|^4} (\rho(y) - \rho(x')) - \frac{(\overrightarrow{x''y}, \vec{n}(y)) \overrightarrow{yx''}}{|x'' - y|^4} (\rho(y) - \rho(x'')) \right] dL_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_L \left(\frac{\rho(y) - \rho(x')}{|x' - y|^2} - \frac{\rho(y) - \rho(x'')}{|x'' - y|^2} \right) \vec{n}(y) dL_y. \end{aligned} \quad (6)$$

Слагаемые интегралы в правой части равенство (6) обозначим через $Q(x', x'')$ и $R(x', x'')$ соответственно.

Так как (2) является интегралом со слабой особенностью, то нетрудно доказать, что

$$|Q(x', x'')| \leq M \left(h \|\rho\|_\infty + h^\alpha \|\overline{\text{grad}} \rho\|_\infty \right).$$

Оценим выражение $R(x', x'')$. Ввиду того, что существуют такие точки $\tilde{y}' = x' + \theta'(y - x')$ и $\tilde{y}'' = x'' + \theta''(y - x'')$, что

$$\rho(y) - \rho(x') = (\overline{\text{grad}} \rho(\tilde{y}'), \overline{x'y'}) \quad (7)$$

$$\text{и} \quad \rho(y) - \rho(x'') = (\overline{\text{grad}} \rho(\tilde{y}''), \overline{x''y''}), \quad (8)$$

где $\theta' = (\theta'_1, \theta'_2)$, $\theta'' = (\theta''_1, \theta''_2)$ и $\theta'_i, \theta''_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2$, то в этом случае выражение $R(x', x'')$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} R(x', x'') = & \frac{1}{2\pi} \int_{L \setminus L_d(x')} \left(\frac{\rho(y) - \rho(x')}{|x' - y|^2} - \frac{\rho(y) - \rho(x'')}{|x'' - y|^2} \right) \bar{n}(y) dL_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{L_d(x') \setminus \\ (L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x''))}} \left[\frac{(\overline{\text{grad}} \rho(\tilde{y}') - \overline{\text{grad}} \rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} - \frac{(\overline{\text{grad}} \rho(\tilde{y}'') - \overline{\text{grad}} \rho(x''), \overline{x''y''})}{|x'' - y|^2} \right] \bar{n}(y) dL_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{L_{h/2}(x')} \left[\frac{(\overline{\text{grad}} \rho(\tilde{y}') - \overline{\text{grad}} \rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} - \frac{(\overline{\text{grad}} \rho(\tilde{y}'') - \overline{\text{grad}} \rho(x''), \overline{x''y''})}{|x'' - y|^2} \right] \bar{n}(y) dL_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{L_{h/2}(x'')} \left[\frac{(\overline{\text{grad}} \rho(\tilde{y}') - \overline{\text{grad}} \rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} - \frac{(\overline{\text{grad}} \rho(\tilde{y}'') - \overline{\text{grad}} \rho(x''), \overline{x''y''})}{|x'' - y|^2} \right] \bar{n}(y) dL_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{L_d(x') \setminus \\ (L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x''))}} \left[\frac{(\overline{\text{grad}} \rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} (\bar{n}(y) - \bar{n}(x')) - \frac{(\overline{\text{grad}} \rho(x''), \overline{x''y''})}{|x'' - y|^2} (\bar{n}(y) - \bar{n}(x'')) \right] dL_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{L_{h/2}(x')} \left[\frac{(\overline{\text{grad}} \rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} (\bar{n}(y) - \bar{n}(x')) - \frac{(\overline{\text{grad}} \rho(x''), \overline{x''y''})}{|x'' - y|^2} (\bar{n}(y) - \bar{n}(x'')) \right] dL_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{L_{h/2}(x'')} \left[\frac{(\overline{\text{grad}} \rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} (\bar{n}(y) - \bar{n}(x')) - \frac{(\overline{\text{grad}} \rho(x''), \overline{x''y''})}{|x'' - y|^2} (\bar{n}(y) - \bar{n}(x'')) \right] dL_y + \\ & + \frac{\bar{n}(x') - \bar{n}(x'')}{2\pi} \int_{L_d(x')} \frac{(\overline{\text{grad}} \rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} dL_y + \\ & + \frac{\bar{n}(x'')}{2\pi} \int_{L_d(x')} \left[\frac{(\overline{\text{grad}} \rho(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} - \frac{(\overline{\text{grad}} \rho(x''), \overline{x''y''})}{|x'' - y|^2} \right] dL_y. \end{aligned} \quad (9)$$

Слагаемые интегралы в равенстве (9) обозначим через $R_1(x', x'')$, $R_2(x', x'')$, $R_3(x', x'')$, $R_4(x', x'')$, $R_5(x', x'')$, $R_6(x', x'')$, $R_7(x', x'')$, $R_8(x', x'')$ и $R_9(x', x'')$ соответственно.

Очевидно, что $|R_1(x', x'')| \leq M h \|\rho\|_\infty$.

Выражение $R_2(x', x'')$ представим в виде

$$\begin{aligned} R_2(x', x'') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{L_d(x') \setminus \\ (L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x''))}} (\overline{\text{gradp}}(\tilde{y}') - \overline{\text{gradp}}(x''), \overline{x'y'}) \left(\frac{1}{|x' - y|^2} - \frac{1}{|x'' - y|^2} \right) \tilde{n}(y) dL_y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{L_d(x') \setminus \\ (L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x''))}} \left[\frac{(\overline{\text{gradp}}(\tilde{y}') - \overline{\text{gradp}}(\tilde{y}''), \overline{x'y'})}{|x'' - y|^2} + \frac{(\overline{\text{gradp}}(\tilde{y}') - \overline{\text{gradp}}(x'), \overline{x'y'})}{|x'' - y|^2} \right] \tilde{n}(y) dL_y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{L_d(x') \setminus (L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x''))} \frac{n(y) - n(x')}{|x' - y|^2} (\overline{\text{gradp}}(x'') - \overline{\text{gradp}}(x'), \overline{x'y'}) dL_y + \\ &+ \frac{n(x')}{2\pi} \int_{L_d(x') \setminus (L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x''))} \frac{(\overline{\text{gradp}}(x'') - \overline{\text{gradp}}(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} dL_y. \end{aligned}$$

Слагаемые интегралы в правой части последнего равенства обозначим через $R_{2,1}(x', x'')$, $R_{2,2}(x', x'')$, $R_{2,3}(x', x'')$ и $R_{2,4}(x', x'')$ соответственно.

Так как для любого $y \in L_d(x') \setminus (L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x''))$

$$|x' - y| \leq |x' - x''| + |x'' - y| \leq 3|x'' - y|,$$

а также

$$|x'' - y| \leq 3|x' - y|,$$

то имеем

$$|R_{2,1}(x', x'')| \leq M h \int_h^d \frac{\omega(\overline{\text{gradp}}, t)}{t^2} dt.$$

Очевидно, что существует такая точка $\tilde{x} = x' + \theta(x'' - x')$, что

$$\rho(x'') - \rho(x') = (\overline{\text{gradp}}(\tilde{x}), \overline{x'x''}), \quad (10)$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta_i \in (0, 1)$, $i = \overline{1, 2}$. Тогда учитывая равенства (7), (8) и (10), получаем, что

$$\begin{aligned} (\overline{\text{gradp}}(\tilde{x}), \overline{x'x''}) &= \rho(x'') - \rho(x') = (\rho(y) - \rho(x')) - (\rho(y) - \rho(x'')) = \\ &= (\overline{\text{gradp}}(\tilde{y}'), \overline{x'y'}) + (\overline{\text{gradp}}(\tilde{y}''), \overline{x''y'}) = \\ &= (\overline{\text{gradp}}(\tilde{y}') - \overline{\text{gradp}}(\tilde{y}''), \overline{x'y'}) + (\overline{\text{gradp}}(\tilde{y}''), \overline{x'x''}), \end{aligned}$$

а значит,

$$(\overline{\text{gradp}}(\tilde{y}') - \overline{\text{gradp}}(\tilde{y}''), \overline{x'y'}) = (\overline{\text{gradp}}(\tilde{x}) - \overline{\text{gradp}}(\tilde{y}''), \overline{x'x''}).$$

В этом случае нетрудно показать, что

$$\left| R_{2,2}(x', x'') \right| \leq M h \int_h^d \frac{\omega(\overline{\text{grad} p}, t)}{t^2} dt.$$

Очевидно, что $\left| R_{2,3}(x', x'') \right| \leq M \omega(\overline{\text{grad} p}, h)$.

Оценим выражение $R_{2,4}(x', x'')$. Для этого на куске $L_d(x')$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u, v) с началом в точке x' , в которой ось v направим вдоль нормали $\vec{n}(x')$, а ось u направим вдоль положительного направления касательной прямой $\Gamma(x')$. Тогда координатами точки x' будут $(0, 0)$, а координаты точки x'' обозначим через $(u'', f(u''))$. Пусть $h_0 = |u''|$ и через $\Omega_{h/2}(x', x'')$ обозначим проекцию множества $L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x'')$ на касательной прямой $\Gamma(x')$. Тогда по формуле вычисления криволинейного интеграла, получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{L_d(x') \setminus (L_{h/2}(x') \cup L_{h/2}(x''))} \frac{(\overline{\text{grad} p}(x') - \overline{\text{grad} p}(x''), \overline{x'y})}{|x' - y|^2} dL_y = \\ & = \left(\frac{\partial p(x')}{\partial x_2} - \frac{\partial p(x'')}{\partial x_2} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{f(u) \sqrt{1 + (f'(u))^2} du}{u^2 + (f(u))^2} + \\ & + \left(\frac{\partial p(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial p(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{u \left(\sqrt{1 + (f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du + \\ & + \left(\frac{\partial p(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial p(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} u \left(\frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) du + \\ & + \left(\frac{\partial p(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial p(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Учитывая (3) и (4), получаем, что

$$\sqrt{1 + (f'(u))^2} - 1 \leq M |u|^{2\alpha}, \quad \forall u \in \Omega_d(x')$$

и
$$\left| \frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right| \leq M |u|^{2\alpha-2}, \quad \forall u \in \Omega_d(x') \setminus 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\partial p(x')}{\partial x_2} - \frac{\partial p(x'')}{\partial x_2} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{f(u) \sqrt{1 + (f'(u))^2} du}{u^2 + (f(u))^2} \right| \leq M \omega(\overline{\text{grad} p}, h), \\ & \left| \left(\frac{\partial p(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial p(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{u \left(\sqrt{1 + (f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du \right| \leq M \omega(\overline{\text{grad} p}, h) \end{aligned}$$

и
$$\left| \left(\frac{\partial p(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial p(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} u \left(\frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) du \right| \leq M \omega(\overline{\text{grad} p}, h).$$

Так как

$$\int_{(-d_0, d_0) \setminus (-2h, 2h)} \frac{du}{u} = \int_{-d_0}^{-2h} \frac{du}{u} + \int_{2h}^{d_0} \frac{du}{u} = 0,$$

то

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{du}{u} = \\ & = \left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1} \right) \left(\int_{\Omega_d(x') \setminus (-d_0, d_0)} \frac{du}{u} + \int_{(-2h, 2h) \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{du}{u} \right). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{du}{u} \right| \leq \\ & \leq M \left(\omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) \int_{h/C_1}^{2h} \frac{du}{u} \right) \leq M \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h), \end{aligned}$$

а значит,

$$|R_{2,4}(x', x'')| \leq M \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h).$$

В результате находим

$$|R_2(x', x'')| \leq M \left(\omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + h \int_h^d \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t^2} dt \right).$$

Также, принимая во внимание полученные выше неравенства, можно доказать, что

$$\begin{aligned} |R_3(x', x'')| & \leq M \left(\omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt \right), \\ |R_4(x', x'')| & \leq M \left(\omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt \right) \end{aligned}$$

и

$$|R_5(x', x'')| \leq M \left(\omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + h^\alpha \|\overline{\text{grad} \rho}\|_\infty \right).$$

Учитывая неравенство

$$h/2 \leq |y - x''| \leq 3h/2, \quad y \in L_{h/2}(x'),$$

имеем

$$\begin{aligned} |R_6(x', x'')| & \leq \frac{\|\overline{\text{grad} \rho}\|_\infty}{2\pi} \left(\int_{L_{h/2}(x')} \frac{dL_y}{|x' - y|^{1-\alpha}} + \int_{L_{h/2}(x')} \frac{dL_y}{|x'' - y|^{1-\alpha}} \right) \leq \\ & \leq M \|\overline{\text{grad} \rho}\|_\infty \left(\int_0^{h/2} \frac{du}{u^{1-\alpha}} + \frac{\text{mes} L_{h/2}(x')}{(h/2)^{1-\alpha}} \right) \leq M h^\alpha \|\overline{\text{grad} \rho}\|_\infty \end{aligned}$$

и

$$|R_7(x', x'')| \leq M h^\alpha \|\overline{\text{grad} \rho}\|_\infty.$$

Так как интеграл

$$\int_{L_d(x')} \frac{(\overline{\text{grad} p}(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} dL_y$$

сходится в смысле главного значения Коши, то

$$\left| \int_{L_d(x')} \frac{(\overline{\text{grad} p}(x'), \overline{x'y'})}{|x' - y|^2} dL_y \right| \leq M \|\overline{\text{grad} p}\|_{\infty}.$$

Тогда

$$|R_8(x', x'')| \leq M h^{\alpha} \|\overline{\text{grad} p}\|_{\infty}.$$

Представим выражение $R_9(x', x'')$ в виде

$$\begin{aligned} R_9(x', x'') = & \frac{\bar{n}(x'')}{2\pi} \left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1} \right) \int_{L_d(x')} \frac{y_1 - x'_1}{|x' - y|^2} dL_y + \\ & + \frac{\bar{n}(x'')}{2\pi} \left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_2} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_2} \right) \int_{L_d(x')} \frac{y_2 - x'_2}{|x' - y|^2} dL_y + \\ & + \frac{\bar{n}(x'')}{2\pi} \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1} \left(\int_{L_d(x')} \frac{y_1 - x'_1}{|x' - y|^2} dL_y - \int_{L_d(x')} \frac{y_1 - x''_1}{|x'' - y|^2} dL_y \right) + \\ & + \frac{\bar{n}(x'')}{2\pi} \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_2} \left(\int_{L_d(x')} \frac{y_2 - x'_2}{|x' - y|^2} dL_y - \int_{L_d(x')} \frac{y_2 - x''_2}{|x'' - y|^2} dL_y \right). \end{aligned}$$

Слагаемые в правой части последнего равенства обозначим через $R_{9,1}(x', x'')$, $R_{9,2}(x', x'')$, $R_{9,3}(x', x'')$ и $R_{9,4}(x', x'')$ соответственно.

Ввиду того, что интегралы

$$\int_{L_d(x')} \frac{y_1 - x'_1}{|x' - y|^2} dL_y \quad \text{и} \quad \int_{L_d(x')} \frac{y_2 - x'_2}{|x' - y|^2} dL_y$$

сходятся в смысле главного значения Коши, то

$$|R_{9,1}(x', x'')| \leq M \omega(\overline{\text{grad} p}, h) \quad \text{и} \quad |R_{9,2}(x', x'')| \leq M \omega(\overline{\text{grad} p}, h).$$

Известно, что в смысле главного значения Коши

$$\int_{-d_0}^{d_0} \frac{du}{u} = 0 \quad \text{и} \quad \int_{u''-d_0+h_0}^{u''+d_0-h_0} \frac{du}{u-u''} = 0.$$

Тогда выражение $R_{9,3}(x', x'')$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} R_{9,3}(x', x'') = & \frac{\bar{n}(x'')}{2\pi} \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1} \left[- \int_{(-d_0, d_0) \setminus (u''-d_0+h_0, u''+d_0-h_0)} \frac{du}{u-u''} + \right. \\ & + \left. \int_{\Omega_d(x') \setminus (-d_0, d_0)} \left(\frac{u}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{u-u''}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} \right) \sqrt{1 + (f'(u))^2} du + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{(-d_0, d_0) \setminus ((-h_0/2, h_0/2) \cup (u''-h_0/2, u''+h_0/2))} \frac{u'' \left(\sqrt{1+(f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du + \\
& + \int_{((-h_0/2, h_0/2) \cup (u''-h_0/2, u''+h_0/2)) \setminus (-d_0, d_0)} \frac{(u-u'') \left((u-u'')^2 - u^2 + (f(u)-f(u''))^2 - (f(u))^2 \right)}{(u^2 + (f(u))^2) \left((u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2 \right)} \times \\
& \times \left(\sqrt{1+(f'(u))^2} - 1 \right) du + \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \frac{u \left(\sqrt{1+(f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du + \int_{u''-h_0/2}^{u''+h_0/2} \frac{u \left(\sqrt{1+(f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du - \\
& - \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \frac{(u-u'') \left(\sqrt{1+(f'(u))^2} - 1 \right)}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} du - \frac{\sqrt{1+(f'(u''))^2} - 1}{1+(f'(u''))^2} \int_{u''-h_0/2}^{u''+h_0/2} \frac{du}{u-u''} - \\
& - \int_{u''-h_0/2}^{u''+h_0/2} \frac{(u-u'') \left(\sqrt{1+(f'(u))^2} - \sqrt{1+(f'(u''))^2} \right)}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} du - \\
& - \left(\sqrt{1+(f'(u''))^2} - 1 \right) \int_{u''-h_0/2}^{u''+h_0/2} \frac{1}{u-u''} \left(\frac{(u-u'')^2}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} - \frac{1}{1+(f'(u''))^2} \right) du + \\
& + \int_{((-d_0, d_0) \setminus (u''-d_0+h_0, u''+d_0-h_0))} \left(u \left(\frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) - (u-u'') \left(\frac{1}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} - \frac{1}{(u-u'')^2} \right) \right) du + \\
& + \int_{((-h_0/2, h_0/2) \cup (u''-h_0/2, u''+h_0/2)) \setminus (u''-d_0+h_0, u''+d_0-h_0)} u'' \left(\frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) du + \\
& + \int_{((-h_0/2, h_0/2) \cup (u''-h_0/2, u''+h_0/2)) \setminus (u''-d_0+h_0, u''+d_0-h_0)} \left(\left(\frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{(u-u'')^2 (1+(f'(u''))^2)} - \frac{1}{u^2} \right) \right) (u-u'') du + \\
& + \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \left(\frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) u du + \int_{u''-h_0/2}^{u''+h_0/2} \left(\frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) u du + \\
& + \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \left(\frac{1}{(u-u'')^2 (1+(f'(u''))^2)} - \frac{1}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} \right) (u-u'') du + \\
& + \int_{u''-h_0/2}^{u''+h_0/2} \left(\frac{1}{(u-u'')^2 (1+(f'(u''))^2)} - \frac{1}{(u-u'')^2 + (f(u)-f(u''))^2} \right) (u-u'') du \Big].
\end{aligned}$$

Так как существует такая точка $u_* = u'' + \tilde{\theta}(u - u'')$, что

$$f(u) - f(u'') = f'(u_*)(u - u''),$$

где $\tilde{\theta} \in (0, 1)$, то нетрудно убедиться, что

$$|R_{9,3}(x', x'')| \leq M \|\overline{\text{grad} \rho}\|_{\infty} h^{\alpha}.$$

Также можно показать, что

$$|R_{9,4}(x', x'')| \leq M \|\overline{\text{grad} \rho}\|_{\infty} h^{\alpha}.$$

Следовательно,

$$|R_9(x', x'')| \leq M \left(h^{\alpha} \|\overline{\text{grad} \rho}\|_{\infty} + \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) \right),$$

а значит,

$$|R(x', x'')| \leq M \left(h^{\alpha} \|\overline{\text{grad} \rho}\|_{\infty} + \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam} L} \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t^2} dt \right).$$

В результате, суммируя полученные оценки для выражений $Q(x', x'')$ и $R(x', x'')$, получаем, что если $0 < \alpha < 1$, то

$$\begin{aligned} & \left| \overline{\text{grad} W}(x') - \overline{\text{grad} W}(x'') \right| \leq \\ & \leq M \left[h^{\alpha} (\|\rho\|_{\infty} + \|\overline{\text{grad} \rho}\|_{\infty}) + \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam} L} \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t^2} dt \right]. \end{aligned}$$

Из доказательства теоремы ясно, что если $\alpha = 1$, то

$$\begin{aligned} & \left| \overline{\text{grad} W}(x') - \overline{\text{grad} W}(x'') \right| \leq \\ & \leq M \left[h |\ln h| (\|\rho\|_{\infty} + \|\overline{\text{grad} \rho}\|_{\infty}) + \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam} L} \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t^2} dt \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(h) = \begin{cases} h^{\alpha} + \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam} L} \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t^2} dt, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ h |\ln h| + \omega(\overline{\text{grad} \rho}, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam} L} \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t^2} dt, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases}$$

Учитывая, что $\lim_{h \rightarrow 0} \psi(h) = 0$, функция $\psi(h)$ не убывает, а функция $\psi(h)/h$ не возрастает, получим доказательство теоремы.

Следствие 2. Пусть $L \subset R^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$, $\rho(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на L и

$$\int_0^{\text{diam} L} \frac{\omega(\overline{\text{grad} \rho}, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда при $0 < \alpha < 1$

$$\omega\left(\frac{\partial W}{\partial \vec{n}}, h\right) \leq M_p \left(h^\alpha + \omega(\overline{\text{grad}} \rho, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad}} \rho, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam} L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}} \rho, t)}{t^2} dt \right),$$

а при $\alpha = 1$

$$\omega\left(\frac{\partial W}{\partial \vec{n}}, h\right) \leq M_p \left(h |\ln h| + \omega(\overline{\text{grad}} \rho, h) + \int_0^h \frac{\omega(\overline{\text{grad}} \rho, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam} L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}} \rho, t)}{t^2} dt \right),$$

где M_p – положительная постоянная, зависящая лишь от L и ρ .

Пусть $\varphi \in \chi$. Через $H(\varphi)$ обозначим линейное пространство всех непрерывных на L функций ρ , удовлетворяющих условию

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq C_\rho \varphi(|x - y|), \quad x, y \in L,$$

где C_ρ – положительная постоянная, зависящая от L и ρ , а не от x и y . Обозначим также через $H_1(\varphi)$ линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых на L функций ψ , удовлетворяющих условию

$$|\overline{\text{grad}} \psi(x) - \overline{\text{grad}} \psi(y)| \leq C_\psi \varphi(|x - y|), \quad x, y \in L,$$

где C_ψ – положительная постоянная, зависящая от L и ψ , а не от x и y . Известно [11], что пространства $H(\varphi)$ и $H_1(\varphi)$ являются банаховыми пространствами с соответствующими нормами

$$\|\rho\|_{H(\varphi)} = \sup_{x \in L} |\rho(x)| + \sup_{\substack{x, y \in L \\ x \neq y}} \frac{|\rho(x) - \rho(y)|}{\varphi(|x - y|)}$$

$$\text{и} \quad \|\rho\|_{H_1(\varphi)} = \sup_{x \in L} |\rho(x)| + \sup_{x \in L} |\overline{\text{grad}} \rho(x)| + \sup_{\substack{x, y \in L \\ x \neq y}} \frac{|\overline{\text{grad}} \rho(x) - \overline{\text{grad}} \rho(y)|}{\varphi(|x - y|)}.$$

Из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. Пусть $L \subset R^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова и $\varphi \in J_0(S)$. Тогда оператор $(B\rho)(x) = \overline{\text{grad}} W(x)$, $x \in L$, ограниченно действует из $H_1(\varphi)$ в $H(Z(\varphi))$, причем

$$\|B\rho\|_{H(Z(\varphi))} \leq M \|\rho\|_{H_1(\varphi)}.$$

Через $H_\beta(L)$ обозначим пространство всех непрерывных на L функций g , удовлетворяющих условию Гельдера

$$|g(x) - g(y)| \leq M_g |x - y|^\beta, \quad \forall x, y \in L,$$

где $0 < \beta \leq 1$ и M_g – положительная постоянная, зависящая от g , а не от x и y . Известно [11], что пространства $H_\beta(L)$ и $H_{1,\beta}(L)$ являются банаховыми пространствами с соответствующими нормами

$$\|g\|_\beta = \sup_{x \in L} |g(x)| + \sup_{\substack{x, y \in L \\ x \neq y}} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\beta}$$

$$\text{и} \quad \|\rho\|_{1,\beta} = \sup_{x \in L} |\rho(x)| + \sup_{x \in L} |\overrightarrow{\text{grad}} \rho(x)| + \sup_{\substack{x, y \in L \\ x \neq y}} \frac{|\overrightarrow{\text{grad}} \rho(x) - \overrightarrow{\text{grad}} \rho(y)|}{|x - y|^\beta}.$$

Следствие 3. Пусть $L \subset R^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$, а $\rho \in H_{1,\beta}(L)$. Тогда логарифмический потенциал двойного слоя $W(x)$ имеет на L непрерывную производную, причем

- (а) если $\alpha < \beta \leq 1$, то $\overrightarrow{\text{grad}} W \in H_\alpha(L)$ и $\|\overrightarrow{\text{grad}} W\|_\alpha \leq M \|\rho\|_{1,\beta}$;
- (б) если $\beta \leq \alpha < 1$, то $\overrightarrow{\text{grad}} W \in H_\beta(L)$ и $\|\overrightarrow{\text{grad}} W\|_\beta \leq M \|\rho\|_{1,\beta}$;
- (с) если $\alpha = 1, \beta < 1$, то $\overrightarrow{\text{grad}} W \in H_\beta(L)$ и $\|\overrightarrow{\text{grad}} W\|_\beta \leq M \|\rho\|_{1,\beta}$;
- (д) если $\alpha = 1, \beta = 1$, то $\overrightarrow{\text{grad}} W \in H_\gamma(L)$ и $\|\overrightarrow{\text{grad}} W\|_\gamma \leq M \|\rho\|_{1,1}$, где $\gamma \in (0, 1)$.

Следствие 4. Пусть $L \subset R^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова и $\varphi \in J_0(S)$. Тогда оператор A ограниченно действует из $H_1(\varphi)$ в $H(Z(\varphi))$, причем

$$\|A\rho\|_{H(Z(\varphi))} \leq M \|\rho\|_{H_1(\varphi)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
2. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат, 1953. 415 с.
3. Халилов Э.Г. О свойствах оператора, порожденного производной акустического потенциала простого слоя // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. Т. 17. № 1. 2017. С. 78–90.
4. Халилов Э.Г. Некоторые свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55. № 3. С. 690–700.
5. Khalilov E.H. Cubic formula for the normal derivative of a double layer acoustic potential // Transactions of NAS of Azerbaijan, series of physical-technical and mathematical sciences. V. 34. No. 1. 2014. P. 73–82.
6. Халилов Э.Г. О приближенном решении одного класса граничных интегральных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1277–1283.
7. Халилов Э.Г. Конструктивный метод решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. No. 4. С. 544–555.
8. Khalilov E. H., Aliev A.R. Justification of a quadrature method for an integral equation to the external Neumann problem for the Helmholtz equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. V. 41. № 16. 2018. P. 6921–6933.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
10. Кустов Ю.А., Мусаев Б.И. Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения // Деп. в ВИНТИ. № 4281-81. 60 с.
11. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980. 416 с.

Статья поступила 07.03.2019 г.

Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N. (2019) ON THE DERIVATIVE OF THE DOUBLE-LAYER LOGARITHMIC POTENTIAL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 38–54

DOI 10.17223/19988621/62/4

Keywords: Laplace equations, Lyapunov curve, derivative of the double-layer logarithmic potential, curvilinear singular integral, generalized Hölder spaces.

In the paper, it is proved that if $L \subset R^2$ is a simple closed Lyapunov curve with exponent $0 < \alpha \leq 1$, and $\rho(x)$ is a continuously differentiable function on L , where

$$\int_0^{\text{diam } L} \frac{\omega(\overline{\text{grad}} \rho, t)}{t} dt < +\infty,$$

then the logarithmic potential of the double layer

$$W(x) = \int_L \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \bar{n}(y)} \rho(y) dL_y, \quad x \in L,$$

has a normal derivative on $\forall x \in L$; moreover,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x)}{\partial \bar{n}(x)} = & -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{(\overline{yx}, \bar{n}(y))(\overline{yx}, \bar{n}(x))}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\bar{n}(y), \bar{n}(x))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y, \quad x \in L, \end{aligned} \quad (1)$$

and

$$\left| \frac{\partial W(x)}{\partial \bar{n}(x)} \right| \leq M \left(\|\rho\|_\infty + \|\overline{\text{grad}} \rho\|_\infty + \int_0^d \frac{\omega(\overline{\text{grad}} \rho, t)}{t} dt \right), \quad \forall x \in L,$$

where $\omega(f, t)$ denotes the modulus of continuity of the functions f , $\bar{n}(y)$ is the external unit normal at the point $y \in L$, $\Phi(x, y)$ is the fundamental solution of the Laplace equation, i.e.

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, \quad x, y \in R^2, \quad x \neq y,$$

and the last integral in equality (1) exists in the sense of the principal value of Cauchy.

Let $\varphi \in \chi = \left\{ f : f \uparrow, \lim_{\delta \rightarrow 0} f(\delta) = 0, f(\delta)/\delta \downarrow \right\}$. We denote by $H(\varphi)$ the linear space of all continuous functions ρ on L satisfying the condition

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq C_\rho \varphi(|x-y|), \quad x, y \in L,$$

where C_ρ is a positive constant depending on L and ρ , not on x and y . We also denote by $H_1(\varphi)$ the linear space of all continuously differentiable functions ψ on L satisfying the condition

$$|\overline{\text{grad}} \psi(x) - \overline{\text{grad}} \psi(y)| \leq C_\psi \varphi(|x-y|), \quad x, y \in L,$$

where C_ψ is a positive constant depending on L and ψ , not on x and y .

In addition, the paper shows the validity of A. Zygmund's estimate for the normal derivative of the logarithmic potential of a double layer, and it is proved that the operator $(A\rho)(x) = \frac{\partial W(x)}{\partial \bar{n}(x)}, x \in L$, operates boundedly from a generalized space $H_1(\varphi)$ to a generalized space $H(Z(\varphi))$, where

$$Z(\phi) = \begin{cases} h^\alpha + \phi(h) + \int_0^h \frac{\phi(t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam } L} \frac{\phi(t)}{t^2} dt, & \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ h|\ln h| + \phi(h) + \int_0^h \frac{\phi(t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam } L} \frac{\phi(t)}{t^2} dt, & \text{if } \alpha = 1. \end{cases}$$

AMS Mathematical Subject Classification: 45E05; 31B10

Financial support. This work was supported by the University Grant of the ASOIU (grant no. ADNSU-2018-1-01).

Elnur H. KHALILOV (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of "General and Applied Mathematics" of the Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: elnurkhalil@mail.ru

Mehpara N. BAKHSHALIYEVA (PhD student of the department of "General and Applied Mathematics" of the Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: mehparebaxshaliyeva93@gmail.com

Received: March 7, 2019

REFERENCES

1. Colton D.L., Kress R. (1983) *Integral equation methods in scattering theory*. John Wiley & Sons. 271 p.
2. Gyunter N.M. (1967) *Potential theory and its applications to basic problems of mathematical physics*. F. Ungar Publ. Co. 338 p.
3. Khalilov E.H. (2018) Properties of the operator generated by the derivative of the acoustic single layer potential. *Journal of Mathematical Sciences*. 231(2). pp. 168–180.
4. Khalilov E.H. (2014) Some properties of the operators generated by a derivative of the acoustic double layer potential. *Siberian Mathematical Journal*. 55(3). pp. 564–573. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446614030173>.
5. Khalilov E.H. (2014) Cubic formula for the normal derivative of a double layer acoustic potential. *Transactions of NAS of Azerbaijan, series of physical-technical and mathematical sciences*. 34(1). pp. 73–82.
6. Khalilov E.H. (2016) On an approximate solution of a class of boundary integral equations of the first kind. *Differential equations*. 52(9). pp. 1234–1240. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266116090147>.
7. Khalilov E.H. (2018) Constructive method for solving a boundary value problem with impedance boundary condition for the Helmholtz equation. *Differential Equations*. 54(4). pp. 539–550. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266118040109>.
8. Khalilov E.H., Aliev A.R. (2018) Justification of a quadrature method for an integral equation to the external Neumann problem for the Helmholtz equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 41(16). pp. 6921–6933. DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.5204>.
9. Vladimirov V.S. (1971) *Equations of mathematical physics*. New York: Marcel Dekker publ. 426 p.
10. Kustov Yu.A., Musaev B.I. (1981) *Kubatur'naya formula dlya dvumernogo singulyarnogo integrala i ee prilozheniya* [The cubature formula for a two-dimensional singular integral and their applications]. Submitted to VINITI. 4281-81. 60 p.
11. Guseinov A.I., Mukhtarov Kh.Sh. (1980) *Vvedenie v teoriyu nelineynykh singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Nonlinear Singular Integral Equations], Moscow: Nauka publ. 416 p.