УДК 533.69

DOI 10.17223/19988621/62/7

Н.Н. Брагин, С.А. Орлов, С.В. Пейгин

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ КОМПОНОВКИ КРЫЛО – ФЮЗЕЛЯЖ ШИРОКОФЮЗЕЛЯЖНОГО ДАЛЬНЕМАГИСТРАЛЬНОГО САМОЛЕТА К ЕГО НАЧАЛЬНОЙ ФОРМЕ¹

Приведены результаты исследования устойчивости алгоритма оптимального аэродинамического проектирования трехмерной компоновки крыло – фюзеляж широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета начальной форме. Показано, что алгоритм решения задачи определения геометрии, сочетающий высокоточное численное решение уравнений Навье – Стокса и глобальную оптимизацию поиска с распределенной параллельной реализацией, устойчив к выбору начальной формы крыла для двух сильно отличающихся вариантов задания начальной формы.

Ключевые слова: *оптимальная геометрия, уравнения Навье – Стокса, момент тангажа, коэффициент сопротивления, устойчивость процесса оптимизации.*

Одним из важнейших вопросов, возникающих при использовании алгоритма автоматического оптимального аэродинамического проектирования для решения практических задач по проектированию летательного аппарата является вопрос о том, насколько результат такого проектирования зависит от начальной формы оптимизируемой поверхности.

С практической точки зрения очень важно, чтобы алгоритм давал хорошие результаты не только в случае, когда начальная геометрия обладает приемлемыми аэродинамическими характеристиками, но и в случае, когда исходная форма в точках проектирования имеет высокий уровень полного сопротивления.

С математической точки зрения возникает вопрос об устойчивости алгоритма автоматического оптимального проектирования к начальной форме. Иными словами, если мы проведем две оптимизации с одинаковыми условиями и ограничениями, но для двух сильно отличающихся друг от друга начальных геометрий, то насколько будут отличаться друг от друга две полученные оптимальные геометрии? Для уединенного крыла такая задача рассматривалась в работе [1], в которой рассматривалось крыло, ранее исследованное в [2].

2. Постановка задачи

Каждый шаг оптимального проектирования летательного аппарата начинается с задания его начальной геометрической конфигурации. На первом таком шаге геометрическая модель поступает из начальной стадии проектирования вместе с заданными аэродинамическими характеристиками. В число этих характеристик входят условия полета (скорость и высота полета) и требуемые для устойчивого

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке прикладных научных исследований Министерства образования и науки РФ: уникальный идентификатор работ RFMEFI57617X0103.

полета значения коэффициента подъемной силы и момента тангажа, а также максимально допустимое значение сопротивления при заданных условиях полета. Эти параметры должны обеспечить выполнение основных требований к полету, таких как его дальность, полезная нагрузка, объем топливного бака и т.д.. Исходящая геометрия ищется в классе аэродинамических форм, удовлетворяющих различным ограничениям, которые также определяются на начальной стадии проектирования. Традиционно геометрические ограничения относятся к максимальной относительной толщине базовых секционных профилей крыла, а ограничения, связанные с аэродинамическими характеристиками летательного аппарата, относятся к моменту тангажа конфигурации, коэффициенту подъемной силы при крейсерском полете и на режиме взлета и т.д.

С математической точки зрения данная задача сводится к определению оптимальной формы летательного аппарата с компоновкой крыло – фюзеляж. Оптимальность этой формы понимается в том смысле, что значение коэффициента полного сопротивления данной компоновки является минимальным в заданных условиях аэродинамического проектирования и она одновременно удовлетворяет всем требуемым ограничениям геометрического и аэродинамического характера.

Математическая формулировка данной задачи оптимального аэродинамического дизайна может быть представлена следующим образом.

Одноточечная задача оптимального дизайна состоит в нахождении поверхности многосекционного пространственного крыла фиксированной формы в плане для летательного аппарата с компоновкой крыло – фюзеляж, которая отвечает следующим условиям:

- Значение коэффициента полного сопротивления всей компоновки C_X является минимальным.
 - Значение коэффициента подъемной силы C_Y всей компоновки равно заданному значению в точке аэродинамического дизайна.
 - Значение момента тангажа M_Z всей компоновки отвечает заданным условиям устойчивости полета летательного аппарата.
 - Значение относительной максимальной толщины каждой базовой секции крыла $(t/c)_i$ не меньше заданного.
 - Значения локальных толщин каждой базовой секции крыла $(y/t)_{ij}$ не меньше заданных.
 - Значение радиуса скругления передней кромки крыла $(R_L)_i$ не меньше заданного.
 - Значения угла схода потока с задней кромки крыла $(q_T)_i$ не меньше заданного.
- Здесь i – номер секций вдоль размаха крыла, $i = 1, \dots, N_{ws}$, j – номер ограничения на локальную толщину в i -й секции, $j = 1, \dots, N_{bs}(i)$.

Многоточечная задача оптимального дизайна состоит в нахождении поверхности многосекционного пространственного крыла фиксированной формы в плане для летательного аппарата с компоновкой крыло – фюзеляж, которая отвечает следующим условиям [3]:

- Значение взвешенной комбинации коэффициентов полного сопротивления компоновки крыло – фюзеляж в нескольких точках проектирования является минимальным.
- Приведенные выше ограничения геометрического характера не зависят от условий дизайна и остаются неизменными.
- Ограничения аэродинамического характера задаются для каждой точки оптимизации по отдельности.

В нашем случае, поскольку для расчета целевой функции C_x необходимо учитывать эффекты вязко-невязкого взаимодействия, в качестве базовых уравнений используются осредненные по числу Рейнольдса уравнения Навье–Стокса, которые для вязкого сжимаемого газа можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{q}_t + \operatorname{div} \mathbf{C} = \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad (1)$$

Здесь тензор $\mathbf{C} = (\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})$ относится к конвективным членам уравнения, вязкий тензор $\mathbf{V} = (\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ содержит члены, связанные с эффектами молекулярного переноса, $\mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T$, ρ – плотность, (u, v, w) – вектор скорости, E – энергия, t – время, $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ – невязкие (конвективные) потоки, и $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$ – вязкие потоки.

Потоки невязкого характера имеют следующие компоненты:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = u\mathbf{q} + p(0, 1, 0, 0, u)^T,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = v\mathbf{q} + p(0, 0, 1, 0, v)^T,$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = w\mathbf{q} + p(0, 0, 0, 1, w)^T.$$

Вязкие потоки имеют следующие компоненты:

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) = \mu(0, \tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31}, \bar{\theta}_1)^T,$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{q}) = \mu(0, \tau_{12}, \tau_{22}, \tau_{32}, \bar{\theta}_2)^T,$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{q}) = \mu(0, \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{33}, \bar{\theta}_3)^T,$$

где составляющие тензора вязких напряжений задаются следующим образом:

$$\tau_{21} = \tau_{12} = u_y + v_x,$$

$$\tau_{31} = \tau_{13} = u_z + w_x,$$

$$\tau_{22} = (4/3)v_y - (2/3)u_x - (2/3)w_z,$$

$$\tau_{32} = \tau_{23} = u_z + w_y,$$

$$\tau_{33} = (4/3)w_z - (2/3)u_x - (2/3)v_y,$$

$$\bar{\theta}_1 = u\tau_{11} + v\tau_{12} + w\tau_{13} + (c^2)_x / ((\gamma - 1)\operatorname{Pr}),$$

$$\bar{\theta}_2 = u\tau_{21} + v\tau_{22} + w\tau_{23} + (c^2)_y / ((\gamma - 1)\operatorname{Pr}),$$

$$\bar{\theta}_3 = u\tau_{31} + v\tau_{32} + w\tau_{33} + (c^2)_z / ((\gamma - 1)\operatorname{Pr}).$$

В этих уравнениях μ – вязкость, γ – отношение теплоемкостей газа, Pr – число Прандтля, $p = (\gamma - 1)[E - 0.5\rho(u^2 + v^2 + w^2)]$, $c^2 = \gamma p / \rho$, $H = (E + p) / \rho$.

Вычисление коэффициента сопротивления для реальных форм самолетов до сих пор является достаточно сложной задачей. Значение коэффициента сопротивления на два порядка ниже остальных аэродинамических характеристик летательного аппарата и поэтому должен быть найден с точностью порядка $10^{-4} - 10^{-5}$. В данной работе для численного решения задачи используется пакет OPTIMENGA_AERO [3], который обеспечивает выполнение этого требования. В нем используется метод полных уравнений Навье – Стокса вязкой сжимаемой жидкости (1), основанный на аппроксимации конвективного оператора при помощи схемы высокого порядка точности ENO, а вязкие члены аппроксимируются центральными разностями. Для увеличения скорости итерационной сходимости

применяется многосеточный алгоритм. При этом на грубой сетке конвективный оператор аппроксимируется при помощи схемы первого порядка, а схема высокого порядка ENO только на самой мелкой сетке [3–5]. Для решения задачи оптимизации используется эвристический (генетический) алгоритм [6–9]. Генетические алгоритмы, как и любые другие прямые методы оптимизации, требуют чрезвычайно большого количества расчетов целевой функции, что делает невозможным задачи, если при каждом вычислении целевой функции решать систему уравнений Навье – Стокса. Поэтому в [3] используется следующий итерационный процесс. На каждой итерации в окрестности текущего наилучшего решения строится база данных из решений системы уравнений Навье – Стокса, а при поиске следующего приближения к оптимальному решению в качестве целевой функции используется аппроксимация по этой базе данных. При учете ограничений на оптимальное решение используется метод [10].

3. Результаты численных решений

При решении поставленной выше задачи оптимального аэродинамического дизайна, трехмерное крыло имело постоянную форму в плане и определялось пятью базовыми секциями по размаху крыла, которые описаны в [2], где рассматривалась оптимизация изолированного крыла, и [3], где рассматривалась устойчивость оптимизации изолированного крыла к начальным данным.

Трехточечная оптимизация проводилась в следующих точках проектирования:

- $M = 0.86$, $C_Y = 0.55$ (с весом 0.75),
- $M = 0.87$, $C_Y = 0.55$ (с весом 0.2),
- $M = 0.2$, $C_Y = 1.0$ (с весом 0.05).

Были рассмотрены 2 варианта задания начальных форм крыла. В 1-м варианте секционные профили совпадали с исходной геометрией широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета. Все эти профили имели суперкритический характер, что и требуется для полета при высоких трансзвуковых числах Маха.

Во втором варианте начальная геометрия была намеренно выбрана абсолютно непригодной с аэродинамической точки зрения.

В частности, вместо суперкритического профиля на 1-й промежуточной секции крыла был поставлен симметричный профиль, в котором верхняя поверхность совпадала с верхней поверхностью исходного суперкритического профиля. Дополнительно полученный симметричный профиль был откалиброван, чтобы он отвечал всем требуемым ограничениям: имел максимальную относительную толщину 11.1 % и относительную толщину 8.9 % (при $X/C = 0.16$) и 7.7 % (при $X/C = 0.65$).

Сравнение данных начальных профилей для двух вариантов оптимизации представлено на рис. 1

Анализ распределения давления на поверхности в основной точке проектирования при $M = 0.86$, $C_Y = 0.55$ подтвердил предположение, что симметричный профиль в середине крыла абсолютно непригоден для данных условий обтекания.

Все это говорит о том, что с аэродинамической и геометрической точек зрения 2-й вариант начальной геометрии крыла находится очень далеко от оптимального решения.

Перейдем теперь к сравнениям результатов этих двух трехточечных оптимизаций. Для получения оптимального решения для 1-го варианта задания начальной формы потребовалось 9 шагов оптимизационного алгоритма, в то время как

для достижения сходимости для 2-го варианта было необходимо 17 шагов. Соответствующая картина сходимости оптимизационного процесса приведена на рис. 2. В отличие от работы [1] для сходимости требуется несколько большее количество итераций, что объясняется наличием фюзеляжа.

Рис. 1. Сравнения начальных профилей в 1-й промежуточной секции крыла для конфигурации крыло – фюзеляж широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета (сплошная линия – первый вариант, пунктирная линия – второй вариант)

Fig. 1. Comparison of the initial profiles in the first crank section of the wing of wing-fuselage configuration for a wide-body long-range aircraft (the solid line is the first option; the dashed line, the second option)

Рис. 2. История сходимости оптимизационного процесса. Зависимость коэффициента сопротивления от номера оптимизационного шага (сплошная линия – первый вариант, пунктирная линия – второй вариант)

Fig. 2. The history of optimization convergence. Drag coefficient as a function of optimization step number (the solid line is the first option; the dashed line, the second option)

Результаты этих двух оптимальных аэродинамических проектирований оказались очень близкими и в широком диапазоне условий полета практически идентичными. В частности, в основной точке проектирования $M = 0.86$, $C_y = 0.55$ сопротивление оптимального крыла для 1-го варианта составило 272.6 аэродинамических каунта против 273.0 для 2-го варианта.

Соответствующие распределения давления на поверхности оптимальных конфигураций (рис. 3 для 1-го варианта задания начальной геометрии и рис. 4 для 2-го варианта задания начальной геометрии) и секционные распределения давления (рис. 5, 6) оказались очень близки.

Рис. 3. Распределения коэффициента давления C_p на верхней поверхности оптимального крыла при $M = 0.86$, $C_Y = 0.55$

Fig. 3. Distribution of the pressure C_p on the upper surface of the optimal wing at $M = 0.86$ and $C_Y = 0.55$

Рис. 4. Распределения коэффициента давления C_p на верхней поверхности оптимального крыла для 2-го варианта начальной геометрии при $M = 0.86$, $C_Y = 0.55$

Fig. 4. Distribution of the pressure C_p on the upper surface of the optimal wing for the second option of the initial geometry at $M = 0.86$ and $C_Y = 0.55$

Рис. 5. Сравнение секционных распределений коэффициента давления C_p поперек оптимального крыла в точке $M=0.86$, $C_Y=0.55$ при $Z=8.0$ м (квадратные маркеры – первый вариант, треугольные маркеры – второй вариант)

Fig. 5. Comparison of the distributions of pressure C_p along the optimal wing cross section for $M=0.86$, $C_Y=0.55$ at $Z=8.0$ m (the squares denote the first option; the triangles, the second option)

Рис. 6. Сравнение секционных распределений коэффициента давления C_p поперек оптимального крыла в точке $M=0.87$, $C_Y=0.55$ при $Z=20.0$ м (квадратные маркеры – первый вариант, треугольные маркеры – второй вариант)

Fig. 6. Comparison of the distributions of pressure C_p along the optimal wing cross section for $M=0.87$, $C_Y=0.55$ at $Z=20.0$ m (the squares denote the first option; the triangles, the second option)

Об этом же говорят и сравнения оптимальных профилей для оптимизированных секций крыла (рис. 7).

Рис. 7. Сравнения форм сечений оптимальных крыльев широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета для двух вариантов задания начальной геометрии (сплошная линия – первый вариант, пунктирная линия – второй вариант)

Fig. 7. Comparison of the cross section shapes of the optimal wings of a wing-body configuration for a wide-body long-range aircraft for two options of initial geometry specification (the solid line is the first option; the dashed line, the second option)

В заключение приведем данные по сравнению интегральных характеристик оптимальных геометрий, полученных для двух вариантов задания начальной формы.

На рис. 8 – 10 приведены сравнения соответствующих оптимальных поляр сопротивления.

Рис. 8. Сравнение поляр сопротивления для оптимальных конфигураций крыло – фюзеляж широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета для двух вариантов начальной геометрии при $M = 0.86$ (сплошная линия – первый вариант, пунктирная линия – второй вариант)

Fig. 8. Comparison of the drag polar for optimal wing-body configurations of the wide-body long-range aircraft for two options of the initial geometry at $M = 0.86$ (the solid line is the first option; the dashed line, the second option)

Рис. 9. Сравнение поляра сопротивления для оптимальных конфигураций крыло – фюзеляж широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета для двух вариантов начальной геометрии при $M = 0.87$ (сплошная линия – первый вариант, пунктирная линия – второй вариант)

Fig. 9. Comparison of the drag polar for optimal wing-body configurations of the wide-body long-range aircraft for two options of the initial geometry at $M = 0.87$ (the solid line is the first option; the dashed line, the second option)

Рис. 10. Сравнение поляра сопротивления для оптимальных конфигураций крыло – фюзеляж широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета для двух вариантов начальной геометрии при $M = 0.88$ (сплошная линия – первый вариант, пунктирная линия – второй вариант)

Fig. 10. Comparison of the drag polar for optimal wing-body configurations of the wide-body long-range aircraft for two options of the initial geometry at $M = 0.88$ (the solid line is the first option; the dashed line, the second option)

4. Заключение

Анализ полученных аэродинамических характеристик оптимальных конфигураций крыло – фюзеляж широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета для двух вариантов задания начальной формы крыла показывает, что используемый алгоритм является устойчивым к заданию начальной формы, поскольку:

- оптимальные конфигурации обладают практически одним и тем же полным сопротивлением в основной точке проектирования $C_Y = 0.55$, $M = 0.86$ и в ее окрестности по числу Маха и углу атаки;

- формы оптимальных крыльев очень блики друг к другу;
 - оптимальные геометрии обладают очень близкими (практически идентичными) интегральными аэродинамическими характеристиками в широком диапазоне изменения условий полета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Peigin, S.V., Timchenko, S.V., Epstein, B.S.* The Stability of the Optimal Aerodynamic Design of an Isolated Three-Dimensional Wing to Its Initial Form // Technical Physics. 2018. V. 63(12). P. 1736–1742
2. *Пейгин С.В., Пуцин Н.А., Болсуновский А.Л., Тимченко С.В.* Оптимальное аэродинамическое проектирование крыла широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 117–129.
3. *Epstein B., Peigin S., Bolsunovskiy A., Timchenko S.V.* Aerodynamic shape optimization by automatic hybrid genetic tool OPTIMENGA AERO // Source of the Document 52nd AIAA Aerospace Sciences Meeting AIAA Science and Technology Forum and Exposition, SciTech 2014. DOI: 10.2514/6.2014-0569.
4. *Epstein B, Averbuch A. and Yavneh I.* An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows // Journal of Computational Physics. 2001. V. 168. P. 316–328. DOI: 10.1006/jcph.2001.6698.
5. *Epstein B, Peigin S.V.* Implementation of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) Approach to Navier – Stokes Computations // International Journal of CFD. V. 18. No. 3. 2004. DOI: 10.1080/1061-8560310001621243.
6. *Пейгин С.В., Periaux J., Тимченко С.В.* Применение генетических алгоритмов для оптимизации формы тела по тепловому потоку // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 9. С. 111–122.
7. *Казаков В.Ю., Пейгин С.В., Тимченко С.В.* Оптимизация траектории входа в атмосферу земли по интегральному тепловому потоку // ЖПМТФ. 2000. Т. 41. No. 4. P. 112–121.
8. *Michalewicz Z.* Genetic algorithms + data structures = evolution programs. New York: Springer-Verlag, 1992. Artificial Intelligence. DOI: 10.1007/978-3-662-02830-8.
9. *Тимченко С.В.* Параллельный генетический алгоритм для решения задач многокритериальной оптимизации // Ползуновский вестник. 2012. № 2/1. С. 103–107.
10. *Орлов С.А., Пейгин С.В., Степанов К.А. Тимченко С.В.* Эффективная реализация нелинейных ограничений при оптимизации трехмерных трансзвуковых крыльев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1. С. 72–81. DOI: 10.17223/19988621/33/7.

Статья поступила 26.04.2019 г.

Bragin N.N., Orlov S.A., Peygin, S.V. (2019) INVESTIGATION OF THE STABILITY OF OPTIMAL AERODYNAMIC DESIGNING OF THE THREE-DIMENSIONAL WING-FUSELAGE LAYOUT FOR A WIDE-BODY LONG-RANGE AIRCRAFT WITH REGARD TO ITS INITIAL SHAPE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 79–90

DOI 10.17223/19988621/62/7

Keywords: optimal geometry, the Navier – Stokes equations, pitch moment, drag coefficient, stability of optimization.

In this paper, the results of investigation of the algorithm stability for optimal three-dimensional designing of a wing-fuselage configuration for a wide-body long-range aircraft with regard to its initial shape are presented. The solution to the problem of determining the geometry, which has a minimum value of the total drag coefficient under given geometric and aerodynamic constraints of various types, is obtained using the algorithm based on the combination of the

methods of highly accurate numerical solution to the Navier – Stokes equations and the methods of global search optimization with the use of distributed parallel technologies. The multipoint problem of optimal designing consists in the determination of the surface of a multi-sectional spatial wing of aircraft. In the aircraft plan, the wing shape is uniform. The optimal wing satisfies the following condition: the value of a weighted combination of drag coefficients for the wing-fuselage layout is minimal at several points of engineering design. The geometric constraints on the wing are independent of the designing conditions and remain unchanged. The aerodynamic constraints on the wing are imposed for each optimization point separately. It was shown that the algorithm is resistant to the choice of the initial shape of the wing, since the optimal geometries obtained for two very different options for initial shape assignment are very close to each other and have almost identical integral aerodynamic characteristics in the cruise flight mode and also in a wide range of this mode.

Financial support: This work was financially supported by applied research of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation: a unique identifier – RFMEFI57617X0103.

Nikolay N. BRAGIN (Central Aerohydrodynamic Institute, Moscow, Russian Federation).

Sergey A. ORLOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: orlov@ftf.tsu.ru

Sergey V. PEYGIN (Doctor of Physics and Mathematics, OPTIMENGA-777 Ltd., Moscow, Russian Federation).

REFERENCES

1. Peigin S.V., Timchenko S.V., Epstein B.S. (2018) The stability of the optimal aerodynamic design of an isolated three-dimensional wing to its initial form. *Technical Physics*. 63(12). pp. 17361742. DOI: 10.1134/S1063784218120149.
2. Peygin S.V., Pushchin N.A., Bolsunovskiy A.L., Timchenko S.V. (2018) Optimal'noe aerodynamicheskoe proektirovanie kryla shirokofyuzelyazhnogo dalnemagistral'nogo samoleta [An optimal aerodynamic design for the wing of a wide-body long-range aircraft]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 51. pp. 117–129. DOI: 10.17223/19988621/51/10.
3. Epstein B., Peigin S., Bolsunovskiy A., Timchenko S.V. (2014) Aerodynamic shape optimization by automatic hybrid genetic tool OPTIMENGA AERO. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. DOI: 10.2514/6.2014-0569.
4. Epstein B., Averbuch A., Yavneh I. (2001) An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows. *Journal of Computational Physics*. 168(2). pp. 316–338. DOI: 10.1006/jcph.2001.6698.
5. Epstein B., Peigin S.V. (2004) Application of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) Approach to Navier – Stokes Computations. *International Journal of CFD*. 18(3). pp. 289–293. DOI: 10.1080/1061-8560310001621243.
6. Peygin S.V., Periaux J., Timchenko S.V. (1998) Primenenie geneticheskikh algoritmov dlya optimizatsii formy tela po teplovomu potoku [Application of genetic algorithms in a body shape optimization in terms of a heat flux]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 10(9). pp. 111–122.
7. Kazakov V.Yu., Peygin S.V., Timchenko S.V. (2000) Optimizatsiya traektorii vkhoda v atmosferu zemli po integral'nomu teplovomu potoku [Optimization of the trajectory of the earth atmosphere entry according to the integral heat flux]. *Zhurnal prikladnoy matematiki i tekhnicheskoy fiziki – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 41(4). pp. 112–121.
8. Michalewicz Z. (1992) *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*. New York: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/978-3-662-02830-8.

9. Timchenko S.V. (2012) Parallel'nyy geneticheskiy algoritm dlya resheniya zadach mnogokriterial'noy optimizatsii [A parallel genetic algorithm for solving multicriterion optimization problems]. *Polzunovskiy vestnik*. 2(1). pp. 103–107.
10. Orlov S.A., Peygin S.V., Stepanov K.A., Timchenko S.V. (2015) Effektivnaya realizatsiya nelineynykh ograniceniy pri optimizatsii trekhmernykh transzvukovykh kryl'ev [Effective implementation of nonlinear constraints in optimization of three-dimensional transonic wings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 33(1). pp. 72–81. DOI: 10.17223/19988621/33/7.

Received: April 24, 2019