УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.865.5

DOI: 10.17223/19988605/50/1

Т.Ю. Пашинская, В.В. Домбровский

СТРАТЕГИИ ПРОГНОЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ СО СКРЫТЫМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ РЕЖИМОВ

Рассматривается задача управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке с переключением режимов с учетом явных ограничений на объемы вложений и займов и транзакционных издержек. Предполагается, что параметры финансовых активов изменяются в соответствии с эволюцией дискретной скрытой марковской цепи. Для оценки параметров используется адаптивный ЕМ-алгоритм. Представлены результаты численного моделирования с использованием реальных данных российского фондового рынка.

Ключевые слова: инвестиционный портфель; скрытая марковская цепь; прогнозирующее управление; ограничения.

Задача управления инвестиционным портфелем (ИП) является одной из ключевых в финансовой инженерии. Финансовые временные ряды представляют собой нестационарные динамические стохастические системы с высокой волатильностью и скачкообразными изменениями. В связи с этим для описания динамики ИП широко используются модели с марковскими скачками.

Задаче управления ИП на финансовом рынке с марковским переключением режимов посвящены работы [1–7]. В этих работах предполагается, что цепь Маркова является наблюдаемой. Однако на практике при управлении реальным ИП состояние цепи, как правило, не доступно прямому наблюдению.

В работах [8, 9] рассматривается задача управления ИП на скачкообразном рынке со скрытой сменой режимов цепи. В частности, работа [8] посвящена задаче управления по критерию «mean-variance». Оценки параметров модели скрытой цепи Маркова получены с использованием ЕМ-алгоритма. Оптимизационная задача сводится к решению уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана. В работе [9] исследуется задача оптимизации ИП по критерию «mean-variance» с учетом квадратичных транзакционных издержек и ограничений. Для решения задачи используется метод управления с прогнозирующей моделью (Model Predictive Control).

В данной работе рассматривается динамическая задача управления ИП на финансовом рынке с переключением режимов с учетом явных ограничений на объемы вложений и займов и транзакционных издержек. Задача управления ИП формулируется как динамическая задача слежения со скользящим горизонтом инвестирования за эталонным портфелем, имеющим заданную доходность. Предполагается, что параметры финансовых активов изменяются в соответствии с эволюцией дискретной скрытой марковской цепи. Для оценки параметров используется адаптивный ЕМ-алгоритм, предложенный в работе [10]. Представлены результаты численного моделирования с использованием реальных данных российского фондового рынка.

1. Описание модели ИП и определение оптимальной стратегии управления

Рассмотрим ИП, состоящий из n рискованных вложений и безрискового финансового актива (например, банковский счет или надежные облигации). Допускаются также возможность займа по

безрисковой ставке и участие в операциях «продажи без покрытия». Управление портфелем осуществляется путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций посредством банковского счета [11].

Пусть $x_i(k)$ ($i = \overline{1, n}$) – объем вложений в i -й рисковый актив в момент времени k ; $x_{n+1}(k) \geq 0$ – объем вложений в безрисковый актив; $u_i^+(k) \geq 0$ – объем капитала, переведенного с банковского счета в i -й рисковый актив в k -м периоде; $u_i^-(k) \geq 0$ – объем капитала, переведенного с i -го рискового актива на банковский счет. Если $x_i(k) < 0$ ($i = \overline{1, n}$), то это означает участие в операции «продажа без покрытия» на сумму $|x_i(k)|$.

Допускается также возможность займа по безрисковой ставке. Объем займа безрискового актива равен $x_{n+2}(k) \geq 0$; $v(k)$ – объем заемного капитала, перераспределяемого между банковским и кредитным счетами в k -м периоде: $v(k) > 0$ означает заем в размере $v(k)$, $v(k) < 0$ означает возврат кредита в размере $|v(k)|$; $r_1(k+1)$ – ставка доходности безрискового актива за период $(k, k+1]$, $r_2(k+1)$ – ставка займа безрискового актива за период $(k, k+1]$, $r_1(k+1) < r_2(k+1)$.

Динамика вложений в рисковый актив i -го вида $x_i(k)$ ($i = \overline{1, n}$) удовлетворяет уравнению

$$x_i(k+1) = [1 + \eta_i(k+1)][x_i(k) + u_i^+(k) - u_i^-(k)], \quad (1)$$

где $\eta_i(k+1)$ – ставка доходности i -го рискового актива за период времени $[k, k+1]$, определяемая по формуле $\eta_i(k+1) = (Z_i(k+1) - Z_i(k)) / Z_i(k)$, $Z_i(k)$ – рыночная цена i -го рискового актива в момент времени k (наблюдаемая величина).

Предполагается, что транзакционные издержки при покупке и продаже рисковых активов удерживаются из банковского счета (безрискового вложения), динамика которого имеет вид:

$$x_{n+1}(k+1) = [1 + r_1(k+1)][x_{n+1}(k) + v(k) - (1 + \lambda^+) \sum_{i=1}^n u_i^+(k) + (1 - \lambda^-) \sum_{i=1}^n u_i^-(k)], \quad (2)$$

где λ^+ – доля капитала $u_i^+(k)$, идущая на уплату транзакционных издержек при покупке рискового актива i -го вида, а λ^- – доля капитала $u_i^-(k)$, идущая на уплату издержек при продаже рискового актива i -го вида.

Динамика кредитного счета описывается уравнением

$$x_{n+2}(k+1) = [1 + r_2(k+1)][x_{n+2}(k) + v(k)]. \quad (3)$$

Поскольку $x_{n+1}(k+1) \geq 0$, $x_{n+2}(k+1) \geq 0$, то справедливы неравенства

$$x_{n+1}(k) + v(k) - (1 + \lambda^+) \sum_{i=1}^n u_i^+(k) + (1 - \lambda^-) \sum_{i=1}^n u_i^-(k) \geq 0, \quad (4)$$

$$x_{n+2}(k) + v(k) \geq 0. \quad (5)$$

Будем полагать, что объем операций «продажа без покрытия» по активу i -го вида ограничен величиной $d_i(k) \geq 0$, следовательно, справедливо неравенство:

$$x_i(k) + u_i^+(k) - u_i^-(k) \geq -d_i(k), (i = \overline{1, n}), \quad (6)$$

если «продажи без покрытия» запрещены, то $d_i(k) = 0$. Объем заемных средств также ограничен величиной $d_0(k) \geq 0$, следовательно,

$$x_{n+2}(k) + v(k) \leq d_0(k). \quad (7)$$

Величины $d_i(k)$ ($i = 0, \dots, n$) часто зависят от величины общего капитала ИП $V(k)$, что можно учесть, положив $d_i(k) = \gamma_i V(k)$, где $\gamma_i > 0$ – постоянный коэффициент.

Капитал инвестиционного портфеля $V(k)$ описывается уравнением

$$V(k) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i(k) - x_{n+2}(k). \quad (8)$$

Будем полагать, что эволюция доходностей рискованных активов $\eta_i(k)$ ($i = 1, \dots, n$) описывается разностной аппроксимацией уравнений геометрического (экономического) броуновского движения с параметрами, зависящими от состояния цепи Маркова [1, 7]:

$$\eta_i[\theta(k), k] = \mu_i[\theta(k), k] + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}[\theta(k), k] w_j(k), \quad (9)$$

где $\mu_i[\theta(k), k]$ – ожидаемая доходность i -го рискованного вложения; $\sigma[\theta(k), k] = \{\sigma_{ij}[\theta(k), k]\}_{i,j=1,\dots,n}$ – матрица волатильностей; $\{w_j(k); k = 0, 1, \dots; j = 1, \dots, n\}$ – независимые между собой дискретные белые шумы с нулевым средним и единичной дисперсией; $\theta(k) = [\delta(\alpha(k), 1), \dots, \delta(\alpha(k), v)]^T$, $\delta(\alpha(k), j)$ – функция Кронекера ($j = 1, 2, \dots, v$); $\alpha(k)$ – однородная дискретная цепь Маркова, принимающая значения из конечного множества $\{1, 2, \dots, v\}$, с матрицей переходных вероятностей

$$P = [P_{ij}], (i, j \in \{1, 2, \dots, v\}), P_{ji} = P\{\alpha(k+1)=j | \alpha(k)=i\}, \sum_{j=1}^v P_{ji} = 1,$$

и начальным распределением $p_i = P\{\alpha(0)=i\}, i = \overline{1, v}, \sum_{i=1}^v p_i = 1$.

Последовательности $w_j(k)$ и $\alpha(k)$ независимы. Марковская цепь $\alpha(k)$ определяет состояние (режим) рынка, например рынок в состоянии высокой или низкой волатильности.

Ожидаемые доходности и волатильности принимают одно из возможных значений из заданного набора в зависимости от состояния цепи Маркова:

$$\mu_i[\theta(k), k] \in \{\mu_i^{(1)}, \dots, \mu_i^{(v)}\}, \sigma[\theta(k), k] \in \{\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(v)}\}, \sigma^{(l)} = \{\sigma_{ij}^{(l)}\}, (i, j = \overline{1, n}), (l = \overline{1, v}).$$

С учетом (9), уравнение (1) примет вид:

$$x_i(k+1) = [1 + \mu_i[\theta(k+1), k+1] + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}[\theta(k+1), k+1] w_j(k+1)] x_i(k) + u_i^+(k) - u_i^-(k). \quad (10)$$

Введем обозначения: $x(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_{n+2}(k)]^T$ – вектор, определяющий состояние портфеля в момент времени k ; $u(k) = [v(k) \quad u_1^+(k) \quad \dots \quad u_n^+(k) \quad u_1^-(k) \quad \dots \quad u_n^-(k)]^T$ – вектор управляющих переменных. Тогда с учетом (2), (3), (10), эволюция капитала ИП может быть представлена в виде разностного уравнения [7]:

$$x(k+1) = [A_0[\theta(k+1), k+1] + \sum_{i=1}^n A_j[\theta(k+1), k+1] w_j(k+1)] x(k) + [B_0[\theta(k+1), k+1] + \sum_{i=1}^n B_j[\theta(k+1), k+1] w_j(k+1)] u(k), \quad (11)$$

где

$$A_0[\theta(k), k] = \text{diag}\{b_0[\theta(k), k], 1 + r_1(k), 1 + r_2(k)\}, \quad A_j[\theta(k), k] = \text{diag}\{\sigma_{1j}[\theta(k), k], \dots, \sigma_{nj}[\theta(k), k], 0, 0\},$$

$$B_0[\theta(k), k] = \begin{bmatrix} \bar{0}_n^T & b_0[\theta(k), k] & -b_0[\theta(k), k] \\ 1 + r_1(k) & -(1 + \lambda^+) b_1(k) & (1 - \lambda^-) b_1(k) \\ 1 + r_2(k) & \bar{0}_n & \bar{0}_n \end{bmatrix},$$

$$B_j[\theta(k), k] = \begin{bmatrix} \bar{0}_n^T & \bar{b}_j[\theta(k), k] & -\bar{b}_j[\theta(k), k] \\ 0 & \bar{0}_n & \bar{0}_n \\ 0 & \bar{0}_n & \bar{0}_n \end{bmatrix},$$

$$b_0[\theta(k), k] = \text{diag}\{1 + \mu_1[\theta(k), k], \dots, 1 + \mu_n[\theta(k), k]\}, \quad b_1(k) = [1 + r_1(k)] 1_n,$$

$$\bar{b}_j[\theta(k), k] = \text{diag}\{\sigma_{1j}[\theta(k), k], \dots, \sigma_{nj}[\theta(k), k]\}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \bar{0}_n = [0, \dots, 0]_n, \quad 1_n = [1, \dots, 1]_n.$$

Ограничения $u_i^+(k) \geq 0$, $u_i^-(k) \geq 0$ и (4)–(7) могут быть записаны в матричном виде:

$$D(k) \leq S(k)u(k), \quad (12)$$

где

$$S(k) = \begin{bmatrix} \bar{0}_n^T & I_n & 0_n \\ \bar{0}_n^T & 0_n & I_n \\ \bar{0}_n^T & I_n & -I_n \\ 1 & -(1+\lambda^+)I_n & (1-\lambda^-)I_n \\ 1 & \bar{0}_n & \bar{0}_n \\ -1 & \bar{0}_n & \bar{0}_n \end{bmatrix}, \quad D(k) = \begin{bmatrix} \bar{0}_n^T \\ \bar{0}_n^T \\ \bar{X}(k) \\ -x_{n+1}(k) \\ -x_{n+2}(k) \\ x_{n+2}(k) - d_0(k) \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} -x_1(k) - d_1(k) \\ \dots \\ -x_n(k) - d_n(k) \end{bmatrix}.$$

Будем определять стратегию управления ИП путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций так, чтобы капитал реального портфеля с минимально возможными отклонениями следовал капиталу некоторого определяемого инвестором эталонного портфеля с желаемой доходностью μ_0 , эволюция которого описывается уравнением

$$V^0(k+1) = [1 + \mu_0]V^0(k), V^0(0) = V(0). \quad (13)$$

Критерий качества управления со скользящим горизонтом инвестирования имеет вид:

$$J(k+m|k) = \sum_{i=1}^m E \left\{ \rho_1(k+i) \left[V(k+i|k) - V^0(k+i) \right]^2 - \right. \\ \left. - \rho_2(k+i) \left[V(k+i|k) - V^0(k+i) \right] + u^T(k+i-1|k) R(k+i-1) u(k+i-1|k) \right\} V(k), \theta(k) \Big\}, \quad (14)$$

где m – горизонт прогноза, k – текущий момент времени; $V(k+i|k) = cx(k+i|k)$, $c = [1, \dots, 1, -1]_{n+2}^T$, – прогнозное значение капитала ИП согласно уравнению динамики (11); $u(k+i|k) = [v(k+i|k), u_1^+(k+i|k), \dots, u_n^+(k+i|k), u_1^-(k+i|k), \dots, u_n^-(k+i|k)]^T$ – вектор прогнозирующих управлений; $\rho_1(k+i) \geq 0$, $\rho_2(k+i) \geq 0$ – весовые коэффициенты (скалярные величины); $R(k+i) > 0$ – положительно определенная симметричная матрица размерности $(2n+1) \times (2n+1)$.

Критерий (14) может быть записан в виде:

$$J(k+m|k) = \sum_{i=1}^m E \left\{ x^T(k+i) R_1(k+i) x(k+i) - \right. \\ \left. - R_2(k+i) x(k+i) + u^T(k+i-1|k) R(k+i-1) u(k+i-1|k) \right\} x(k), \theta(k) \Big\}, \quad (15)$$

где $R_1(k+i) = c^T c$ и $R_2(k+i) = [2\rho_1(k+i)V^0(k+i) + \rho_2(k+i)]c$.

Решение данной задачи управления ИП дается следующей теоремой.

Теорема. Пусть капитал ИП описывается уравнением (11) при ограничениях (12). Стратегия прогнозирующего управления $u(k+i|k)$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$) со скользящим горизонтом m , минимизирующая критерий (15), при ограничениях (12) на каждом шаге k определяется уравнением

$$u(k) = [I_{2n+1} \quad 0_{2n+1} \quad \dots \quad 0_{2n+1}] U(k),$$

где I_{2n+1} – единичная матрица размерности $2n+1$, 0_{2n+1} – квадратная нулевая матрица размерности $2n+1$; $U(k) = [u^T(k|k), \dots, u^T(k+m-1|k)]^T$ – последовательность прогнозирующих управлений, которая определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида:

$$Y(k+m|k) = [2x^T(k)G(k) - F(k)]U(k) + U^T(k)H(k)U(k),$$

при ограничениях

$$U_{\min}(k) \leq \bar{S}(k)U(k) \leq U_{\max}(k),$$

$H(k) = \{H_{ts}(k)\}$, $G(k) = \{G_t(k)\}$, $F(k) = \{F_t(k)\}$ ($s, t = \overline{1, m}$) – блочные матрицы, блоки которых удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} H_{tt}(k) &= \sum_{i_t=1}^v \sum_{j=0}^n \left(B_j^{(i_t)}(k+t) \right)^T Q^{(i_t)}(k) B_j^{(i_t)}(k+t) + R(k+t-1), \\ H_{ts}(k) &= \sum_{i_t=1}^v \left(B_0^{(i_t)}(k+t) \right)^T \sum_{i_{t+1}=1}^v \dots \sum_{i_{s-1}=1}^v \left(A_0^{(i_{s-1})}(k+t+1) \right)^T \dots \left(A_0^{(i_{s-1})}(k+s-1) \right)^T \times \\ &\quad \times \sum_{j=0}^n \sum_{i_s=1}^v \left(A_j^{(i_s)}(k+s) \right)^T Q^{(i_t, \dots, i_s)}(k) B_j^{(i_s)}(k+s), s > t, \\ H_{ts}(k) &= (H_{st}(k))^T, s < t, \\ G_t(k) &= \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_{t-1}=1}^v \left(A_0^{(i_1)}(k+1) \right)^T \dots \left(A_0^{(i_{t-1})}(k+t-1) \right)^T \sum_{j=0}^n \sum_{i_t=1}^v \left(A_j^{(i_t)}(k+t) \right)^T Q^{(i_1, i_2, \dots, i_t)}(k) B_j^{(i_t)}(k+t), \\ F_t(k) &= \sum_{i_t=1}^v Q_2^{(i_t)}(k) B_0^{(i_t)}(k+t). \end{aligned}$$

Последовательности матриц $Q^{(i_t, \dots, i_s)}(k)$, $Q_2^{(i_t, \dots, i_s)}(k)$, ($s, t = \overline{1, m}$) определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} Q^{(i_t, \dots, i_s)}(k) &= \Theta^{(i_t, \dots, i_s)}(k) R_1(k+s) + \sum_{j=0}^n \sum_{i_{s+1}=1}^v \left(A_j^{(i_{s+1})}(k+s+1) \right)^T Q^{(i_t, \dots, i_{s+1})}(k) A_j^{(i_{s+1})}(k+s+1), t = \overline{1, m-2}, t < s < m, \\ Q^{(i_t)}(k) &= e_{i_t} P^t \theta(k) R_1(k+t) + \sum_{j=0}^n \sum_{i_{t+1}=1}^v \left(A_j^{(i_{t+1})}(k+t+1) \right)^T Q^{(i_t, i_{t+1})}(k) A_j^{(i_{t+1})}(k+t+1), t = \overline{1, m-1}, \quad (16) \\ Q_2^{(i_t, \dots, i_s)}(k) &= R_2(k+s) \Theta^{(i_t, \dots, i_s)}(k) + \sum_{i_{s+1}=1}^v Q_2^{(i_t, \dots, i_{s+1})}(k) A_0^{(i_{s+1})}(k+s+1), t = \overline{1, m-2}, t < s < m, \\ Q_2^{(i_t)}(k) &= R_2(k+t) e_{i_t} P^t \theta(k) + \sum_{i_{t+1}=1}^v Q_2^{(i_t, i_{t+1})}(k) A_0^{(i_{t+1})}(k+t+1), t = \overline{1, m-1}, \end{aligned}$$

с начальными условиями:

$$Q^{(i_m)}(k) = e_{i_m} P^m \theta(k) R_1(k+m), Q^{(i_t, \dots, i_m)}(k) = \Theta^{(i_t, \dots, i_m)}(k) R_1(k+m), t = \overline{1, m-1}, \quad (17)$$

$$Q_2^{(i_m)}(k) = e_{i_m} P^m \theta(k) R_2(k+m), Q_2^{(i_t, \dots, i_m)}(k) = \Theta^{(i_t, \dots, i_m)}(k) R_2(k+m), t = \overline{1, m-1}, \quad (18)$$

$$\Theta^{(i_t, \dots, i_s)}(k) = P_{i_s, i_{s-1}} P_{i_{s-1}, i_{s-2}} \dots P_{i_{t+1}, i_t} \theta_{i_t}(k+t | k), t = \overline{1, m-1}, s > t, \quad (19)$$

где $\theta_{i_t}(k+t | k)$ – компонента вектора прогноза состояния цепи Маркова

$$\theta(k+t | k) = E\{\theta(k+t) | \theta(k)\} = P^t \theta(k), e_{i_t} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]_{1 \times v}, i_t = \overline{1, v}, t = \overline{1, m}.$$

Методика доказательства теоремы основана на результатах, приведенных в работе [7].

2. Адаптивный алгоритм фильтрации марковской цепи

При определении оптимальной стратегии прогнозирующего управления предполагалось, что состояние марковской цепи $\alpha(k)$ в момент времени k доступно наблюдению. Однако на практике при управлении реальным ИП состояние цепи Маркова не доступно прямому наблюдению.

Для оценки параметров модели со скрытыми марковскими переключениями будем использовать адаптивный ЕМ-алгоритм, предложенный в работе [10]. В дальнейшем будем предполагать, что вектор доходностей рискованных активов подчиняется условному многомерному нормальному распределению с параметрами, зависящими от состояния:

$$\eta(k) | \alpha(k) \sim N(\mu[\alpha(k)], \sigma[\alpha(k)]).$$

Это означает, что в динамике доходностей (9) величины $w_j(k)$ подчиняются стандартному нормальному распределению. Параметрами, подлежащими оценке, являются векторы ожидаемых доход-

ностей $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(v)}$, матрицы волатильностей рисков активов $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(v)}$ в каждом состоянии цепи и матрица переходных вероятностей P , а также состояние цепи в момент времени k $\theta(k)$.

Обозначим $l(k)$ – совместную вероятность появления последовательности $Y_k = \{\eta(1), \dots, \eta(k)\}$ и нахождения цепи в состоянии i в момент времени k :

$$l^{(i)}(k) = f(\alpha(k) = i, Y_k).$$

Обозначим f_k – вектор плотностей распределения доходностей $\eta(k)$ в каждом состоянии цепи:

$$f_k = [f^{(1)}(\eta(k)), \dots, f^{(v)}(\eta(k))],$$

$$f^{(i)}(\eta(k)) = f(\eta(k) | \alpha(k) = i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\sigma^{(i)}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{(\eta(k) - \mu^{(i)})^T (\sigma^{(i)})^{-1} (\eta(k) - \mu^{(i)})}{2} \right], i = \overline{1, v}.$$

Оценки параметров модели скрытой цепи Маркова пересчитываются на каждом шаге $k = 2, 3, \dots, T$, с появлением нового наблюдения вектора доходностей рисков активов. Пошагово алгоритм оценки имеет вид:

1. Задаются начальные значения вероятностей перехода $P_{ji}(1)$, начальное распределение $p_i(1)$ и значения параметров нормального распределения $\mu^{(i)}(1)$, $\sigma^{(i)}(1)$, ($i = \overline{1, v}$) (здесь индекс в скобках (1) определяет номер итерации алгоритма). Начальные значения величин $l^{(i)}(1)$ вычисляются по формуле:

$$l^{(i)}(1) = p_i(1) f^{(i)}(\eta(1)), i = \overline{1, v}.$$

2. На каждом шаге $k = 2, 3, \dots, T$ величины $l^{(i)}(k)$ пересчитываются, суммируя вероятности всех возможных путей, которые ведут в новое состояние j , по формуле

$$l^{(j)}(k) = \sum_{i=1}^v l^{(i)}(k-1) \hat{P}_{ji}(k-1) f^{(j)}(\eta(k)), j = \overline{1, v}.$$

Вероятности фильтрации равны

$$\hat{\xi}_{i,k|k} = P\{\alpha(k) = i | Y_k\} = \frac{f(\alpha(k) = i, Y_k)}{f(Y_k)} = \frac{l^{(i)}(k)}{1_v l(k)}, 1_v = [1, \dots, 1]_v, i = \overline{1, v}.$$

Оцененные совместные апостериорные вероятности равны

$$\zeta_{ij,k|k} = P\{\alpha(k-1) = i, \alpha(k) = j | Y_k\} = \frac{l^{(i)}(k-1) \hat{P}_{ji}(k-1) f^{(j)}(\eta(k))}{1_v l(k)}, i, j = \overline{1, v}.$$

Оцененные апостериорные вероятности перехода равны

$$\hat{P}_{ji}(k) = \frac{\sum_{\tau=2}^{k-1} \hat{\xi}_{i,\tau|\tau}}{\sum_{\tau=2}^k \hat{\xi}_{i,\tau|\tau}} \hat{P}_{ji}(k-1) + \frac{\zeta_{ij,k|k}}{\sum_{\tau=2}^k \hat{\xi}_{i,\tau|\tau}}, i, j = \overline{1, v}. \quad (20)$$

Оцененные параметры рисков финансовых активов равны

$$\mu^{(i)}(k) = \frac{\sum_{\tau=1}^{k-1} \hat{\xi}_{i,\tau|\tau}}{\sum_{\tau=1}^k \hat{\xi}_{i,\tau|\tau}} \mu^{(i)}(k-1) + \frac{\hat{\xi}_{i,k|k} \eta(k)}{\sum_{\tau=1}^k \hat{\xi}_{i,\tau|\tau}}, \quad (21)$$

$$\sigma^{(i)}(k) = \frac{\sum_{\tau=1}^{k-1} \hat{\xi}_{i,\tau|\tau}}{\sum_{\tau=1}^k \hat{\xi}_{i,\tau|\tau}} \sigma^{(i)}(k-1) + \frac{\hat{\xi}_{i,k|k} \left(\eta(k) - \mu^{(i)}(k) \right) \left(\eta(k) - \mu^{(i)}(k) \right)^T}{\sum_{\tau=1}^k \hat{\xi}_{i,\tau|\tau}}, i = \overline{1, v}. \quad (22)$$

В выражениях (16)–(19) в качестве оценки состояния цепи Маркова в момент времени k будем использовать сглаживающие вероятности $\theta(k) = \hat{\xi}_{k|k} = [\hat{\xi}_{1,k|k}, \dots, \hat{\xi}_{v,k|k}]^T$.

3. Численное моделирование

В данном разделе приводятся результаты численного моделирования с использованием реальных данных российского фондового рынка. Для моделирования использовались цены закрытия наиболее ликвидных акций, торгуемых на Московской бирже, а именно: ПАО «Сбербанк России» (SBER), ПАО «Газпром» (GAZP), ПАО «Газпром нефть» (SIBN), ПАО «ГМК «Норильский никель»» (GMKN), ПАО «Банк ВТБ» (VTBR), ПАО «ЛУКОЙЛ» (LKOH), ПАО «НК «Роснефть»» (ROSN). Данные взяты с www.finam.ru. Рассматривались все возможные комбинации портфелей, состоящих из $n = 5$ рискованных активов и одного безрискового актива с доходностью $r_1 = 0,00001$ (0,001% в день). Допускалось привлечение заемных средств по ставке $r_2 = 0,0001$ (0,01% в день). Предполагалось, что в начальный момент времени весь капитал инвестирован в безрисковый актив, следовательно

$$x_i(0) = x_{n+2}(0) = 0, (i = \overline{1, n}), x_{n+1}(0) = V(0) = V^0(0) = 1.$$

Управление портфелем осуществлялось в каждый торговый день. Весовая матрица полагалась равной $R(k+i) = \text{diag}\{10^{-3}, \dots, 10^{-3}\}$ для всех k, i . Объем заемных средств ограничивался величиной $d_0(k) = 3V(k)$. Операции «продажи без покрытия» запрещены, т.е. $d_i(k) = 0, (i = \overline{1, n})$. Транзакционные издержки составляли $\lambda^+ = \lambda^- = 0,0006$.

Предполагалось, что финансовый рынок может находиться в двух состояниях ($v = 2$). Оценка параметров скрытой цепи Маркова производилась согласно алгоритму, описанному в разделе 2. При этом для оценки состояния скрытой цепи и матрицы переходных вероятностей использовалась подгруппа из двух акций, входящих в портфель. Векторы средних значений и матрицы волатильностей для разных состояний цепи оценивались для портфеля в целом. Данный подход обусловлен тем, что применение полного портфеля для оценки состояния цепи и матрицы переходных вероятностей приводит к частым переключениям состояний цепи и, как следствие, к низкому качеству управления [9]. Полученные на каждом шаге k параметры модели скрытой цепи Маркова далее использовались для определения оптимальной стратегии прогнозирующего управления. Горизонт прогноза $m = 5$.

Рис 1. Динамика капиталов эталонного ИП (линия 1) и управляемого ИП (линия 2)

Fig. 1. Control portfolio value (line 1) and reference portfolio value (line 2)

Рис. 2. Динамика доходности акции SBER (линия 1 (η)) и сглаживающие вероятности

(линия 2 ($\xi_{1,k|k}$) – состояние 1, линия 3 ($\xi_{2,k|k}$) – состояние 2)

Fig.2. Daily return of SBER (line 1 (η)) and smoothed probabilities (line 2 ($\xi_{1,k|k}$) – state 1, line 3 ($\xi_{2,k|k}$) – state 2)

Численно была реализована стратегия слежения за эталонным инвестиционным портфелем с доходностью $\mu_0 = 0,001$ (0,1% в день), $\rho_1(k+i) = 1$, $\rho_2(k+i) = 0,02$. Капитал реального управляемого ИП вычислялся по формулам (1)–(3) и (8), где использовались реальные наблюдаемые значения доходностей в момент времени $k+1$.

Далее приводятся типичные результаты моделирования. Портфель составлен из рискованных активов LKOH, GAZP, SBER, ROSN, GMKN. Период инвестирования: 27.05.2010–17.06.2016 (1 520 торговых дней). Для оценки состояния рыночного режима и матрицы переходных вероятностей использовались акции SBER и GMKN. На рис. 1 показана динамика капиталов эталонного портфеля $V^0(k)$ и управляемых портфелей $V(k)$. Рисунок 2 иллюстрирует динамику доходности акции SBER и сглаживающие вероятности состояний цепи Маркова, приведенные к значениям доходностей для наглядного отображения на графике.

Рисунок 1 показывает, что капитал реального портфеля следует капиталу эталонного портфеля.

Заключение

В данной работе предложен метод управления ИП с прогнозирующей моделью на финансовом рынке переключением режимов в соответствии со скрытой цепью Маркова с учетом явных ограничений на объемы вложений и займов и транзакционных издержек. Для оценки параметров используется адаптивный ЕМ-алгоритм. Результаты численного моделирования с использованием реальных данных демонстрируют эффективность предложенной стратегии управления.

ЛИТЕРАТУРА

- Costa O.L.V., Araujo M.V. A generalized multi-period portfolio optimization with Markov switching parameters // Automatica. 2008. V. 44, No. 10. P. 2487–2497.
- Гальперин В.А., Домбровский В.В., Федосов Е.Н. Динамическое управление инвестиционным портфелем на диффузионно-скачкообразном финансовом рынке с переключающимися режимами // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 175–189.
- Bäuerle N., Rieder U. Portfolio optimization with Markov-modulated stock prices and interest rates // IEEE Transactions on Automatic Control. 2004. V. 49, No. 3. P. 442–447.
- Sotomayor L.R., Cadenillas A. Explicit Solutions of Consumption-investment Problems in Financial Markets with Regime-switching // Mathematical Finance. 2009. V. 19, No. 2. P. 251–279.
- Wu H. Mean-variance portfolio selection with a stochastic cash flow in a Markov-switching Jump-Diffusion Market // J. Optim. Theory Appl. 2013. V. 158. P. 918–934.
- Levy M., Kaplanski G. Portfolio selection in two-regime world // European J. of Operational Research. 2015. V. 241. P. 514–524.
- Dombrovskii V., Pashinskaya T. Design of model predictive control for constrained Markov jump linear systems with multiplicative noises and online portfolio selection // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2020. V. 30, No. 3. P. 1050–1070.
- Ishijima H., Uchida M. Log Mean-Variance Portfolio Selection Under Regime Switching // Asia-Pacific Financial Markets. 2011. V. 18, No. 2. P. 213–229.
- Nystrup P., Boyd S., Lindström E., Madsen H. Multi-period portfolio selection with drawdown control // Ann. Oper. Res. 2018. V. 282. P. 245–271.
- Stenger B., Ramesh V., Paragios N., Coetzee F., Buhmann J.M. Topology Free Hidden Markov Models: Application to Background Modeling // Proc. of the 8th IEEE Int. Conf. on Computer Vision. 2001. V. 1. P. 294–301.
- Dombrovskii V.V., Dombrovskii D.V., Lyashenko E.A. Investment portfolio optimization with transaction costs and constraints using model predictive control // Proc. of the 8th Russian-Korean Int. Symposium on Science and Technology. KORUS. Tomsk, Russia : IEEE, 2004. P. 202–205.

Поступила в редакцию 23 мая 2019 г.

Pashinskaya T.Y., Dombrovskii V.V. (2020) PREDICTIVE CONTROL STRATEGIES FOR INVESTMENT PORTFOLIO IN THE FINANCIAL MARKET WITH HIDDEN REGIME SWITCHING. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 50. pp. 4–13

Consider an investment portfolio consisting of n risky assets and one risk-free asset (e.g., a bank account). Let $x_i(k)$ ($i = \overline{1, n}$) denote the amount of the wealth invested in the i th risky asset; $x_{n+1}(k) \geq 0$ is the amount invested in a risk-free asset; $u_i^+(k) \geq 0$ is the amount of money by which an investor buys the i th risky asset; $u_i^-(k) \geq 0$ is the amount of money by which an investor sells the i th risky asset. The volume of borrowing of a risk-free asset is equal to $x_{n+2}(k) \geq 0$; $v(k)$ is the amount of borrowing that transferred from borrowing account to bank account; $r_1(k+1)$ is the riskless lending rate over time period $(k, k+1]$, $r_2(k+1)$ is the riskless borrowing rate.

The i th stock holding $x_i(k)$ ($i = \overline{1, n}$) satisfies the following stochastic difference equation:

$$x_i(k+1) = [1 + \eta_i(k+1)][x_i(k) + u_i^+(k) - u_i^-(k)],$$

where $\eta_i(k+1)$ is the return of the i th risky asset. The dynamics of the bank account is given by:

$$x_{n+1}(k+1) = [1 + r_1(k+1)][x_{n+1}(k) + v(k) - (1 + \lambda^+) \sum_{i=1}^n u_i^+(k) + (1 - \lambda^-) \sum_{i=1}^n u_i^-(k)],$$

where λ^+ , λ^- are fractions of the amount transacted on purchase $u_i^+(k)$ and sell $u_i^-(k)$ of the i th stock, respectively. The evolution of the borrowing account is the following: $x_{n+2}(k+1) = [1 + r_2(k+1)][x_{n+2}(k) + v(k)]$. The wealth process satisfies $V(k) = cx(k)$, $c = [1, \dots, 1, -1]_{n+2}$, $x(k) = [x_1(k), \dots, x_{n+2}(k)]^T$.

The following constraints are taken into account:

$$x_{n+1}(k) + v(k) - (1 + \lambda^+) \sum_{i=1}^n u_i^+(k) + (1 - \lambda^-) \sum_{i=1}^n u_i^-(k) \geq 0, \quad x_{n+2}(k) + v(k) \geq 0, \quad (1)$$

$$x_i(k) + u_i^+(k) - u_i^-(k) \geq -d_i(k); \quad x_{n+2}(k) + v(k) \leq d_0(k); \quad u_i^+(k) \geq 0, u_i^-(k) \geq 0, (i = \overline{1, n}). \quad (2)$$

The evolution of the risky assets returns $\eta_i(k)$ is described by the equation:

$$\eta_i[\theta(k), k] = \mu_i[\theta(k), k] + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}[\theta(k), k] w_j(k),$$

where $\mu_i[\theta(k), k]$ is the expected return; $\sigma[\theta(k), k] = \{\sigma_{ij}[\theta(k), k]\}_{i,j=1,\dots,n}$ is the volatility matrix; $\{w_j(k); j = 1, \dots, n\}$ are independent noises with zero mean and unit variance; $\theta(k) = [\delta(\alpha(k), 1), \dots, \delta(\alpha(k), v)]^T$, $\delta(\alpha(k), j)$ is a Kronecker function ($j = 1, 2, \dots, v$); $\alpha(k) \in \{1, 2, \dots, v\}$ is a discrete-time Markov chain.

Our objective is to control the investment portfolio by tracking a deterministic portfolio with a desired return μ_0 , which evolution is described by the equation:

$$V^0(k+1) = [1 + \mu_0]V^0(k), V^0(0) = V(0).$$

In this paper, we design portfolio control strategies subject to constraints (1)–(2) under the quadratic performance criterion with receding horizon m :

$$J(k+m|k) = \sum_{i=1}^m E \left\{ \rho_1(k+i)[V(k+i|k) - V^0(k+i)]^2 - \right. \\ \left. - \rho_2(k+i)[V(k+i|k) - V^0(k+i)] + u^T(k+i-1|k)R(k+i-1)u(k+i-1|k) \middle| V(k), \theta(k) \right\},$$

where $u(k+i|k) = [v(k+i|k), u_1^+(k+i|k), \dots, u_n^+(k+i|k), u_1^-(k+i|k), \dots, u_n^-(k+i|k)]^T$ is the predictive control vector; $\rho_1(k+i) \geq 0$, $\rho_2(k+i) \geq 0$ are the weight coefficients (scalar values); $R(k+i) > 0$ is a symmetric weight matrix of dimension $(2n+1) \times (2n+1)$.

We assume that the state of the Markov chain $\theta(k)$ is not observed. To estimate the parameters of the hidden Markov model, the on-line adaptive EM-algorithm is applied. We present the numerical modelling results based on the real data from the Russian stock exchange.

Keywords: investment portfolio; hidden Markov chain; model predictive control; constraints.

PASHINSKAYA Tatiana Yurievna (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: tani4kin@mail.ru

DOMBROVSKII Vladimir Valentinovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

REFERENCES

- Costa, O.L.V. & Araujo, M.V. (2008) A generalized multi-period portfolio optimization with Markov switching parameters. *Automatica*. 44(10). pp. 2487–2497. DOI: 10.1016/j.automatica.2008.02.014
- Galperin, V.A., Dombrovsky, V.V. & Fedosov, E.N. (2005) Dynamic control of the investment portfolio in the jump-diffusion financial market with regime-switching. *Automation and Remote Control*. 66(5). pp. 837–850. DOI: 10.1007/s10513-005-0127-9

3. Bäuerle, N. & Rieder, U. (2004) Portfolio optimization with Markov-modulated stock prices and interest rates. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 49(3). pp. 442–447. DOI: 10.1109/TAC.2004.824471
4. Sotomayor, L.R. & Cadenillas, A. (2009) Explicit Solutions of Consumption-investment Problems in Financial Markets with Regime-switching. *Mathematical Finance*. 19(2). pp. 251–279. DOI: 10.1111/j.1467-9965.2009.00366.x
5. Wu, H. (2013) Mean-variance portfolio selection with a stochastic cash flow in a Markov-switching Jump-Diffusion Market. *Journal of Optimization Theory and Application*. 158. pp. 918–934. DOI: 10.1007/s10957-013-0292-x
6. Levy, M. & Kaplanski, G. (2015) Portfolio selection in two-regime world. *European Journal of Operational Research*. 241. pp. 514–524. DOI: 10.1016/j.ejor.2014.10.012
7. Dombrovskii, V. & Pashinskaya, T. (2020) Design of model predictive control for constrained Markov jump linear systems with multiplicative noises and online portfolio selection. *International Journal of Robust Nonlinear Control*. 30(3). pp. 1050–1070. DOI: 10.1002/rnc.4807
8. Ishijima, H. & Uchida, M. (2011) Log Mean-Variance Portfolio Selection Under Regime Switching. *Asia-Pacific Financial Markets*. 18(2). pp. 213–229. DOI: 10.1007/s10690-010-9132-2
9. Nystrup, P., Boyd, S., Lindström, E. & Madsen, H. (2018) Multi-period portfolio selection with drawdown control. *Annals of Operations Research*. 282(2). pp. 1–27. DOI: 10.1007/s10479-018-2947-3
10. Stenger, B., Ramesh, V., Paragios, N., Coetzee, F. & Buhmann, J.M. (2001) Topology Free Hidden Markov Models: Application to Background Modeling. *Proc. to the 8th IEEE International Conference on Computer Vision*. 1. pp. 294–301. DOI: 10.1109/ICCV.2001.937532
11. Dombrovskii, V.V., Dombrovskii, D.V. & Lyashenko, E.A. (2004) Investment portfolio optimization with transaction costs and constraints using model predictive control. *IEEE: Proc. of the 8th Russian-Korean Int. Symposium on Science and Technology. KORUS*. Tomsk, Russia. pp. 202–205.