ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2020 Управление, вычислительная техника и информатика № 50

УДК 519.872
DOI: 10.17223/19988605/50/4

Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий

АНАЛИЗ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ В ОТКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ СЕТЯХ С РАЗЛИЧНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Проведено исследование системы разностно-дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют ожидаемые доходы открытых марковских сетей массового обслуживания с различными особенностями. Число состояний сети в этом случае и число уравнений в данной системе бесконечны. Потоки поступающих в сеть заявок являются простейшими и независимыми, времена обслуживания заявок распределены по экспоненциальным законам. Доходы от переходов между состояниями сети являются детерминированными функциями, зависящими от ее состояния и времени, а доходы систем в единицу времени, когда они не меняют своих состояний, зависят только от этих состояний. Для нахождения ожидаемых доходов систем сети предложен модифицированный метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов.
Ключевые слова: система разностно-дифференциальных уравнений; открытая сеть массового обслуживания; метод последовательных приближений.

Сети массового обслуживания (СеМО) с доходами в нестационарном режиме изучались в работе [1]. Заявка при переходе из одной СМО в другую приносит последней некоторый доход, а доход первой СМО уменьшается на эту величину. При этом доходы от переходов между состояниями сетей зависели от их состояний и времени или являлись случайными величинами (СВ) с заданными моментами первого и второго порядков. В статьях [1–3] приведены результаты по анализу, оптимизации и выбору оптимальных стратегий управления в марковских сетях с доходами, описаны различные применения их в качестве стохастических моделей прогнозирования ожидаемых доходов в информационно-телекоммуникационных системах и сетях (ИТСС), в страховых компаниях, логистических транспортных системах, производственных системах и других объектах. Как известно, функционирование любой марковской СеМО можно описать при помощи цепей Маркова с непрерывным временем и, как правило, с большим или счетным числом состояний. В простейшем случае марковские цепи с небольшим числом состояний и доходами от переходов между состояниями, являющимися константами, были рассмотрены в монографии [4].

Следует отметить, что марковские сети с положительными и отрицательными заявками были исследованы E. Gelenbe в статьях [5–9] как модели поведения компьютерных вирусов в ИТСС и называются ныне G-сетями. Нахождение нестационарных вероятностей состояний марковской G-сети с сигналами и групповым удалением заявок модифицированным методом последовательных приближений, совмещенным с методом рядов, изложено в [10].

В последние годы большое внимание было уделено исследованию марковских сетей с доходами и различными особенностями: с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежными СМО [11]. В [12] рассматривалась марковская G-сеть с доходами в случае, когда доходы от переходов между состояниями могут зависеть от ее состояний и времени. Для сети, допускающей мультипликативное представление для совместного стационарного распределения вероятностей состояний, для ожидаемых доходов систем сети выведена система разностно-дифференциальных уравнений (РДУ), для решения которой также предложено использовать метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов. В данной статье эти результаты обобщены на случай других марковских сетей с заявками многих классов. Марковские СеМО являются математическими моделями различных реальных объектов, которые обычно функционируют на каком-то конечном промежутке времени, например $[0; T]$.

Требуется найти ожидаемые (средние) доходы систем сети, полученные модифицированным методом последовательных приближений, совмещенным с методом рядов, для марковских сетей с различными особенностями.

1. Система РДУ для ожидаемых доходов

На основании ранее полученных результатов [2, 10–12] было замечено, что в общем случае систему РДУ для ожидаемых доходов открытой марковской сети, в которой могут присутствовать положительные и отрицательные заявки и сигналы различных классов, системы обслуживания могут подвергаться поломкам, заявки могут быть «нетерпеливыми» и с иными различными особенностями, можно записать в общем случае в виде:

$$\frac{d\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)}{dt}=-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)+\sum_{i^*,j^*=0}^{n}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\theta,\eta=0}^{\Psi r}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{1}\Theta_{i^*j^*\alpha m\beta b\gamma\theta\eta}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\times$$
$$\times\vec{V}\left(\vec{d}+I_{i^*}-I_{j^*},\vec{k}+\tilde{I}_{\alpha}+m\tilde{I}_{\beta}-b\tilde{I}_{\gamma},\vec{l}+\tilde{I}_{\theta}-\tilde{I}_{\eta},t\right)+\vec{E}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right), \quad (1)$$

где $\tilde{I}_{\alpha}$ – вектор размерности Ψr, состоящий из нулей, за исключением компоненты с номером α, которая равна 1, Ψr – некоторое целое положительное число, r – число типов заявок, I_{α} – вектор размерности n, состоящий из нулей, за исключением компоненты с номером α, которая равна 1, I_{ic} – вектор размерности nr, состоящий из нулей, за исключением компоненты с номером $(i-1)r+c$, которая равна 1, $\vec{d}$ – вектор размерности n с компонентами d_i, где d_i – количество исправных линий обслуживания в i-й СМО, $\vec{k}$ – вектор размерности Ψr с компонентами k_{ic}, где k_{ic} – количество положительных заявок типа c в i-той СМО, $\vec{l}$ – вектор размерности Ψr с компонентами l_{ic}, где l_{ic} – количество сигналов типа c в i-й СМО, $i=\overline{1,n}$, $c=\overline{1,r}$. Здесь $\vec{V}^T\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)=$ $=\left(v_1\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right),v_2\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right),...,v_n\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)\right)$, где $v_i\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)$ – ожидаемый (средний) доход, который получает i-я СМО за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии $\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)$, $\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)$, $\Theta_{i^*j^*\alpha m\beta b\gamma\theta\eta}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)$, $\vec{E}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)$ – некоторые функции, различные для каждой сети обслуживания, $\vec{E}^T\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)=\left(E_1\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right),E_2\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right),...,E_n\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\right)$.

Предположим, что ряд $\sum_{i^*,j^*=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\theta,\eta=0}^{\Psi r}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{1}\Theta_{i^*j^*\alpha m\beta b\gamma\theta\eta}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)$ сходится. Ранее в работах [1, 10–12] это было доказано для конкретных марковских сетей.

Из системы (1) следует:

$$\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)=e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)t}\left(\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0\right)+\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)x}\times\right.$$
$$\times\left(\sum_{i^*,j^*=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\theta,\eta=0}^{nr}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{1}\Theta_{i^*j^*\alpha m\beta b\gamma\theta\eta}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\right)\left(\sum_{i^*,j^*=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\theta,\eta=0}^{nr}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{1}\Theta_{i^*j^*\alpha m\beta b\gamma\theta\eta}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\vec{V}\left(\vec{d}+I_{i^*}-I_{j^*},\vec{k}+I_{\alpha}+mI_{\beta}-bI_{\gamma},\vec{l}+I_{\theta}-I_{\eta},x\right)\right)dx\right)+$$
$$+\frac{\vec{E}\left(\vec{d},k,\vec{l}\right)}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)}\left[1-e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)t}\right]. \quad (2)$$

Обозначим через $\vec{V}_q\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)$ приближение $\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)$ на q-й итерации, а $\vec{V}_{q+1}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)$ – решение системы (1), полученное методом последовательных приближений. Тогда из (2) вытекает, что

$$\vec{V}_{q+1}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)=e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)t}\left(\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0\right)+\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)x}\left(\sum_{i^*,j^*=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\theta,\eta=0}^{\Psi r}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{1}\Theta_{i^*j^*\alpha m\beta b\gamma\theta\eta}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\vec{V}_q\left(\vec{d}+I_{i^*}-I_{j^*},\vec{k}+I_\alpha+mI_\beta-bI_\gamma,\vec{l}+I_\theta-I_\eta,x\right)\right)dx\right)+$$
$$+\frac{\vec{E}\left(\vec{d},k,\vec{l}\right)}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)}\left[1-e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)t}\right]. \qquad (3)$$

2. Нахождение ожидаемых доходов методом последовательных приближений

Аналогично [10] можно показать, что последовательность $\left\{\vec{V}_q\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)\right\}$, $q=0,1,2,...$, построенная по схеме (3), при любом ограниченном по t нулевом приближении $\vec{V}_0\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)$ сходится при $q\to\infty$ к единственному решению системы (1), а каждое последовательное приближение с течением времени сходится к стационарному решению системы (1), которое удовлетворяет соотношению

$$\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)=\sum_{i^*,j^*=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\theta,\eta=1}^{\Psi r}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{1}\Theta_{i^*j^*\alpha m\beta b\gamma\theta\eta}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\times$$
$$\times\vec{V}\left(\vec{d}+I_{i^*}-I_{j^*},\vec{k}+I_\alpha+mI_\beta-bI_\gamma,\vec{l}+I_\theta-I_\eta\right)+\vec{E}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right). \qquad (4)$$

Кроме того, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Любое приближение $\vec{V}_q\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},.t\right)$, $q\geq 1$, представимо в виде сходящегося степенного ряда

$$\vec{V}_q\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\vec{g}_{ql}^{\,+-}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)t^l, \qquad (5)$$

коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\vec{g}_{q+1l}^{\,+-}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)=\frac{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)^l}{l!}\left\{\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0\right)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)^{u+1}}\vec{G}_{qu}^{+-}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\right\},l\geq 0,$$
$$\vec{g}_{q0}^{\,+-}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)=\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0\right),\ \vec{g}_{0l}^{\,+}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)=\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0\right)\delta_{l0}, \qquad (6)$$
$$\vec{G}_{ql}^{+-}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)=\sum_{i^*,j^*=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\theta,\eta=0}^{\Psi r}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{1}\Theta_{i^*j^*\alpha m\beta b\gamma\theta\eta}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\times$$
$$\times\vec{g}_{ql}\left(\vec{d}+I_{i^*}-I_{j^*},\vec{k}+I_\alpha+mI_\beta-bI_\gamma,\vec{l}+I_\theta-I_\eta\right).$$

Доказательство. Докажем, что коэффициенты степенного ряда (5) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (6). Подставим последовательные приближения (6) в (3). Тогда, учитывая, что

$$e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)t}\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)x}x^l dx=\left[\frac{1}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)}\right]^{l+1}l!\sum_{j=l+1}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\right]^l}{j!},l=0,1,2,...,$$

получим

$$\sum_{l=0}^{\infty}\vec{g}_{ql}^{\,+-}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)t^l=e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)t}\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0\right)+\sum_{i^*,j^*=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\theta,\eta=0}^{\Psi r}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{1}\Theta_{i^*j^*\alpha m\beta b\gamma\theta\eta}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\times$$
$$\times\vec{g}_{q-1l}\left(\vec{d}+I_{i^*}-I_{j^*},\vec{k}+I_\alpha+mI_\beta-bI_\gamma,\vec{l}+I_\theta-I_\eta\right).$$

Используя обозначения (6), этот ряд можно переписать в виде:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\vec{g}_{ql}^{+-}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)t^{l}=e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)t}\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0\right)+\sum_{l=0}^{\infty}\vec{G}_{ql}^{+-}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\left[\frac{1}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)}\right]^{l+1}l!\sum_{u=l+1}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\right]^{u}}{u!}t^{u}.$$

Поменяв местами индексы суммирования и разлагая $e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)t}$ в ряд по степеням *t*, будем иметь

$$\sum_{l=0}^{\infty}\vec{g}_{ql}^{+-}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)t^{l}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\right]^{l}}{l!}\left\{\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0\right)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\left[\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\right]^{u+1}}G_{qu}^{+-}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\right\}t^{l}. \qquad (7)$$

Приравнивая в левой и правой частях выражения (7) коэффициенты при t^l, получим соотношения (6) для коэффициентов ряда (5). Доказательство того, что радиус сходимости ряда (6) равен $+\infty$, можно провести, используя формулу Коши–Адамара, аналогично [12].

3. Анализ сети с разнотипными заявками и сигналами

Рассмотрим, например, G-сеть с разнотипными положительными заявками и сигналами. В сеть из внешней среды поступают простейший поток обычных (положительных) заявок с интенсивностью λ^{+} и дополнительный поток сигналов, который также является простейшим с интенсивностью $\lambda^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$. Все поступающие потоки независимы. Каждая положительная заявка входного потока независимо от других заявок направляется в *i*-ю СМО как заявка типа *c* с вероятностью p_{0ic}^{+}, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}p_{0ic}^{+}=1.$ Если линия обслуживания в *i*-й СМО свободна, то заявка поступает на обслуживание, иначе она становится в очередь. Положительная заявка при переходе из одной СМО в другую приносит ей некоторый доход, а доход первой СМО уменьшается, соответственно, на эту величину. Длительности обслуживания положительных заявок *c*-го типа в *i*-й СМО распределены по экспоненциальному закону с параметром μ_{ic}, $i=\overline{1,\ n}$, $c=\overline{1,r}$. Будем считать, что заявки на обслуживание из очереди выбираются случайно, т.е. если в *i*-й СМО находится k_{is} заявок класса *s*, то вероятность того, что на обслуживании в ней будет заявка класса *c*, равна $\frac{k_{ic}}{\sum_{s=1}^{r}k_{is}}$, $i=\overline{1,n}$, $c=\overline{1,r}$.

Сигнал входного потока независимо от других сигналов направляется в *i*-ю СМО как сигнал типа *c* с вероятностью $p_{0ic}^{-}, \sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}p_{0ic}^{-}=1$. Сигнал типа *c*, поступающий в СМО, в которой нет положительных заявок данного типа, не оказывает никакого влияния и сразу исчезает из нее. В противном случае могут произойти следующие события: поступающий сигнал мгновенно перемещает положительную заявку типа *c* из системы *i*-й СМО в *j*-ю СМО как заявку типа *s* с вероятностью q_{icjs}, в этом случае сигнал называют триггером, или с вероятностью $q_{i\tilde{n}0}=1-\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}q_{icjs}$ сигнал срабатывает как отрицательная заявка и уничтожает в *i*-й СМО положительную заявку типа *c*. Таким образом, отрицательная заявка является частным случаем сигнала, когда $q_{icjs}=0$, $q_{ic0}=1$. После окончания обслуживания положительной заявки типа *c* в *i*-й СМО она направляется в *j*-ю СМО с вероятностью p_{icjs}^{+} опять как положительная заявка типа *s*, а с вероятностью p_{icjs}^{-} как сигнал типа *s* , и с вероятностью $p_{ic0}=1-\sum_{j=1}^{n}\left(p_{icjs}^{+}+p_{icjs}^{-}\right)$ уходит из сети, $i,\ j=\overline{1,n}$.

Под состоянием i-й СМО в момент времени t будем понимать вектор $\vec{k}_i(t)=\left(k_{i1}(t),k_{i2}(t),...,k_{ir}(t)\right),$ где $k_{ic}(t)$ – число положительных заявок типа c в i-й СМО в момент времени t, а под состоянием сети – вектор $\vec{k}(t)=\left(\vec{k},t\right)=\left(\vec{k}_1(t),...,\vec{k}_n(t)\right)$, который образует цепь Маркова со счетным числом состояний и непрерывным временем.

Введем в рассмотрение вектор I_{ic}, состоящий из нулей, за исключением компоненты с номером $r(i-1)+c,$ которая равна единице; $M_{ic}\left(\vec{k}_i\right)=\mu_{ic}\dfrac{k_{ic}+1}{\sum_{s^*=1}^{r}k_{is^*}+1}$; $v_i\left(\vec{k},t\right)$ – ожидаемый доход, который получает i-я СМО за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии $\vec{k}$; $u(x)$ – единичная функция Хевисайда, $u(x)=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x\le 0,\end{cases}$. Наша цепь Маркова может осуществлять следующие переходы в состояние ($\vec{k}$, t) за время Δt:

1) из состояния $\left(\vec{k}-I_{js},t\right), j\ne i,s\ne c$, в этом случае в j-ю СМО за время Δt поступит положительная заявка типа s с вероятностью $\lambda^{+}p_{0js}^{+}u\left(k_{js}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right), j=\overline{1,n},s=\overline{1,r};$ доход системы S_i в этом случае составит $r_i\left(\vec{k}\right)\Delta t+v_i\left(\vec{k}-I_{js},t\right)$; если $i=j$, $s=c$, то доход системы S_i составит $r_{0ic}\left(\vec{k}-I_{ic}\right)+$ $+v_i\left(\vec{k}-I_{ic},t\right)$, где $r_{0ic}\left(\vec{k}-I_{ic}\right)$, доход i-й системы от данного перехода, $r_i\left(\vec{k}\right)$ – доход системы в единицу времени за пребывание в состоянии $\vec{k}$;

2) из состояния $\left(\vec{k}+I_{js},t\right),\ j\ne i,s\ne c$, в данном случае в j-ю СМО за время Δt поступит сигнал типа s, который сработает как отрицательная заявка и уничтожит в ней положительную заявку своего типа, или после завершения обслуживания положительная заявка типа s уйдёт из сети, или переходит в m-ю СМО как сигнал типа l, но не обнаружит там положительных заявок данного типа с вероятностью $\left(\lambda^{(1)}p_{0js}^{-}q_{js0}+M_{js}\left(\vec{k}_j\right)p_{js0}+M_{js}\left(\vec{k}_j\right)p_{jsml}^{-}\left(1-u\left(k_{ml}\right)\right)\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right),\ j=\overline{1,n},\ s=\overline{1,r};$ доход системы S_i в этом случае составит $r_i\left(\vec{k}\right)\Delta t+v_i\left(\vec{k}+I_{js},t\right),$ если $i=j$, $s=c$, то доход системы S_i составит $-R_{ic0}\left(\vec{k}+I_{ic}\right)+v_i\left(\vec{k}+I_{ic},t\right),$ где $R_{ic0}\left(\vec{k}+I_{ic}\right)$ – доход i-й системы от данного перехода;

3) из состояния $\left(\vec{k}+I_{ml}-I_{dh},\ t\right),\ m\ne i,l\ne c,\ d\ne j,\ h\ne s,$ при этом положительная заявка типа l после обслуживания в m-й СМО перейдет в d-ю СМО в качестве положительной заявки типа h, или из внешней среды в m-ю СМО поступит сигнал типа l, который действует как триггер и сразу переместит положительную заявку из системы S_m в систему S_d в качестве положительной заявки типа h; вероятность такого события равна $\left(M_{ml}\left(\vec{k}_m\right)p_{mldh}^{+}+\lambda^{(1)}p_{0ml}^{-}q_{mldh}\right)u\left(k_{dh}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right),\quad d,m=\overline{1,\ n};$ $l,h=\overline{1,r};$ доход системы S_i в этом случае составит $r_i\left(\vec{k}\right)\Delta t+v_i\left(\vec{k}+I_{ml}-I_{dh},t\right);$ если $m=j$, $l=s$, $i=d$, $c=h$, то доход S_i составит $-r_{jsic}\left(\vec{k}+I_{js}-I_{ic}\right)+v_i\left(\vec{k}+I_{js}-I_{ic},t\right);$ если $k=i$, $l=c$, $j=d$, $s=h$, то доход S_i составит $r_{icjs}\left(\vec{k}-I_{js}+I_{ic}\right)+v_i\left(\vec{k}-I_{js}+I_{ic},t\right)$;

4) из состояния $\left(\vec{k}+I_{ml}+I_{dh},t\right)$, при этом после окончания обслуживания положительной заявки типа l в СМО S_m она направится в СМО S_d в качестве сигнала типа d, который сработает в ней как отрицательная заявка типа d, уничтожит в S_d положительную заявку своего типа; вероятность такого события равна $M_{ml}\left(\vec{k}_m\right)p_{mldh}^{-}q_{dh0}\Delta t+o\left(\Delta t\right)$; доход системы S_i в этом случае составит $r_i\left(\vec{k}\right)\Delta t+v_i\left(\vec{k}+I_{ml}+I_{dh},t\right);$ если $m=j$, $l=s$, $I=d$, $c=h$, то доход S_i составит $r_{icjs}\left(\vec{k}+I_{js}+I_{ic}\right)+v_i\left(\vec{k}+I_{js}+I_{ic},t\right)$;

5) из состояния $\left(\vec{k}+I_{ml}+I_{dh}-I_{\alpha\beta},\ t\right)$, в этом случае после окончания обслуживания заявки типа m в СМО S_m она направится в СМО S_j как сигнал типа s, который мгновенно переместит положительную заявку своего типа из системы S_j в систему S_m как положительную заявку типа l; вероятность такого события равна $M_{ml}\left(\vec{k}_m\right)p^-_{mldh}\,q_{dh\alpha\beta}u\left(k_{dh}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$; доход системы S_i в этом случае составит $r_i\left(\vec{k}+I_{ml}+I_{dh}-I_{\alpha\beta},t\right)\Delta t+v_i\left(\vec{k}+I_{ml}+I_{dh}-I_{\alpha\beta},t\right)$; при $m=i$, $l=c$ доход составит $-r_{dh\alpha}\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{dh}-I_{\alpha\beta},t\right)+v_i\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{dh}-I_{\alpha\beta},t\right)$; при $\alpha=i,\ \beta=c$ он будет равен $-r_{dh\alpha}\left(\vec{k}+I_{ml}+I_{dh}-I_{ic},t\right)+v_i\left(\vec{k}+I_{ml}+I_{dh}-I_{ic},t\right)$; иначе $r_{dh\alpha}\left(\vec{k}+I_{ml}+I_{ic}-I_{\alpha\beta},t\right)+\ v_i\left(\vec{k}+I_{ml}+I_{ic}-I_{\alpha\beta},t\right)$;

6) из состояния $(\vec{k},t)$, при этом в каждую СМО S_i, $i=\overline{1,n}$, не поступают ни положительные заявки любых типов, ни сигналы, или сигналы при поступлении не будут обнаруживать заявок своего типа и в этих СМО за время Δt не обслужилось ни одной заявки; вероятность такого события равна $1-\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{c=1}^{r}\left[\lambda^+p^+_{0ic}+\lambda^-p^-_{0ic}+\mu_{ic}\right]\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$; доход системы S_i в этом случае составит $r_i\left(\vec{k}\right)\Delta t+v_i\left(\vec{k},t\right)$.

Используя формулу полной вероятности, поделив обе ее части на Δt и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим, что ожидаемые доходы систем рассматриваемой в данном случае сети удовлетворяют системе РДУ (1), где:

$$\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)=\Lambda\left(\vec{k}\right)=\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\lambda^{+}_{0ic}+\lambda^{(1)}_{0ic}+\mu_{ic}\right],$$

$$\Theta_{i^*j^*\alpha m\beta b\gamma\theta\eta}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)=\Theta_{i^*j^*\alpha m\beta b\gamma\theta\eta}\left(\vec{k}\right)=\delta_{i^*j^*}\delta_{\vec{d}\vec{1}_n}\delta_{\alpha((i-1)r+c)}\delta_{\theta\eta}\delta_{\vec{l}\vec{0}}\left(\delta_{m0}\delta_{b1}\delta_{\gamma((j-1)r+s)}\times\right.$$

$$\times\delta_{0j}\delta_{0s}[\lambda^{(1)}p^-_{0ic}q_{ic0}+\mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum_{s^*=1}^{r}k_{is^*}+1}p_{ic0}+\mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum_{s^*=1}^{r}k_{is^*}+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}p^-_{icml}\left(1-u\left(k_{ml}\right)\right)]+$$

$$+\delta_{0i}\delta_{0c}\lambda^+p^+_{0js}u\left(k_{js}\right)+[\mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum_{l^*=1}^{\kappa}k_{il^*}+1}p^+_{icjs}+\lambda^{(1)}p_{0ic}q_{icjs}]u\left(k_{js}\right)+$$

$$+\delta_{m1}\delta_{b0}\delta_{\beta((j-1)r+s)}\mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum_{l^*=1}^{r}k_{ic}+1}p^-_{icjs}\delta_{0m}\delta_{0l}+\ \delta_{m1}\delta_{b1}\delta_{\beta((j-1)r+s)}\delta_{\gamma((m-1)r+l)}\ \mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum_{l=1}^{r}k_{ic}+1}p^-_{icjs}q_{jsml}u\left(k_{js}\right),$$

$$E_i\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)=\ r_i\left(\vec{k}\right)+\lambda^+p^+_{0ic}u\left(k_{ic}\right)r_{0ic}\left(\vec{k}-I_{ic}\right)-$$

$$-[\lambda^{(1)}p^-_{0js}q_{js0}+\mu_{js}\frac{k_{js}+1}{\sum_{s^*=1}^{r}k_{js^*}+1}p_{js0}+\mu_{js}\frac{k_{js}+1}{\sum_{s^*=1}^{r}k_{js^*}+1}p^-_{jsml}\left(1-u\left(k_{ml}\right)\right)]R_{ic0}\left(\vec{k}-I_{ic},t\right)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{c=1}^{r}(\mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum_{l^*=1}^{r}k_{il^*}+1}p^+_{icjs}+\lambda^{(1)}p_{0ic}q_{icjs})u\left(k_{ic}\right)r_{icjs}\left(\vec{k}-I_{ic}+I_{js},t\right)-$$

$$-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{c=1}^{r}(\mu_{js}\frac{k_{js}+1}{\sum_{l^*=1}^{r}k_{jl^*}+1}p^+_{jsic}+\lambda^{(1)}p_{0js}q_{jsic})u\left(k_{js}\right)r_{icjs}\left(\vec{k}-I_{js}+I_{ic},t\right)+$$

$$+\sum_{d,\alpha=1}^{n}\sum_{h,\beta=1}^{r}\mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum_{l=1}^{r}k_{il}+1}p_{icdh}^{-}q_{dh\alpha\beta}u(k_{dh})r_{id\alpha}\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{dh}-I_{\alpha\beta},\ t\right)+$$

$$+\sum_{m,\alpha=1}^{n}\sum_{l,\beta=1}^{r}\mu_{ml}\frac{k_{ml}+1}{\sum_{l=1}^{r}k_{ml}+1}p_{mlic}^{-}q_{ic\alpha\beta}u(k_{dh})r_{mi\alpha}\left(\vec{k}+I_{ml}+I_{ic}-I_{\alpha\beta},\ t\right)+$$

$$+\sum_{m,d=1}^{n}\sum_{l,h=1}^{r}\mu_{ml}\frac{k_{ml}+1}{\sum_{l=1}^{r}k_{ml}+1}p_{mldh}^{-}q_{dhic}u(k_{dh})r_{mdi}\left(\vec{k}+I_{ml}+I_{dh}-I_{ic},\ t\right).$$

Заключение

Проведено исследование в нестационарном режиме открытых марковских СеМО с различными особенностями. Рассмотрена обобщенная система РДУ для ожидаемых доходов в системах сети, состоящая из счетного числа таких уравнений. Когда доходы от переходов между состояниями сети зависят только от ее состояний, для решения системы предложено применить метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов. Исследованы свойства последовательных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маталыцкий М.А. О некоторых результатах анализа и оптимизации марковских сетей с доходами и их применении // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. Р. 97–113.
2. Паньков А.В. Анализ стохастической модели расходов на содержание гибкого вычислительного кластера // Современные математические методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей : материалы 20-й междунар. науч. конф., Минск, 26–29 янв. 2009 г. / ред. А.Н. Дудин [и др.]. Минск : РИВШ, 2009. Вып. 20. С. 184–188.
3. Gelenbe E. G-networks: a unifying model for neural and queueing networks // Annals of Operations Research. 1994. V. 48. P. 433–461.
4. Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы. М. : Сов. радио, 1964. 109 с.
5. Gelenbe E. Product form queueing networks with negative and positive customers // J. of Applied Probability. 1991. V. 28. P. 656–663.
6. Gelenbe E., Labed A. G-networks with multiple classes of signals and positive customers // European J. of Operational Research. 1998. V. 108. P. 293–305.
7. Gelenbe E. G-networks with signals and batch removal // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 1993. V. 7. P. 335–342.
8. Fourneaua J.M., Gelenbe E., Surosc R. G-networks with multiple classes of negative and positive customers // Theoretical Computer Science. 1996. V. 155, is. 1. P. 141–156.
9. Gelenbe E. G-Networks: Multiple Classes of Positive Customers, Signals, and Product Form // Results Performance Evaluation of Complex Systems: Techniques and Tools. Springer, 2002. P. 1–16. (Lecture Notes in Computer Science. V. 2459)
10. Matalytski M. Finding non-stationary state probability of G-networks with signal and customers batch removal // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2017. V. 31, No. 4. P. 346–412.
11. Статкевич С.Э. Анализ НМ-сети с ненадёжными системами обслуживания и случайными доходами от переходов между её состояниями // Вестник Гродненского государственного университета. Сер. 2. 2010. № 3. С. 40–52.
12. Маталыцкий М.А., Науменко В.В. Стохастические сети с нестандартными перемещениями заявок. Гродно : Гродненский гос. ун-т, 2016. 347 с.

Поступила в редакцию 5 июля 2019 г.

Matalytski M.A., Kopat D.Ya. (2020) ANALYSIS OF EXPECTED REVENUES IN OPEN MARKOV NETWORKS WITH VARIOUS FEATURES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 50. pp. 31–38

DOI: 10.17223/19988605/50/4

Investigation at non-stationary regime open Markov QN with various features has been carried out. The generalized system of DDE for expected revenues in network systems, consisting from countable of number equations has been considered. When the revenues from transitions between network states can depend only on these states, a successive approximation method in combination with a series method has been proposed for the decision system. The properties of successive approximations are investigated. The considered system has the form:

$$\frac{d\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)}{dt} = -\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\vec{V}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right) + \sum_{i^*,j^*=0}^{n}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\theta,\eta=0}^{\Psi r}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{1}\Theta_{i^* j^* \alpha m\beta b\gamma\theta\eta}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\times$$
$$\times\vec{V}\left(\vec{d}+I_{i^*}-I_{j^*},\vec{k}+\tilde{I}_\alpha+m\tilde{I}_\beta-b\tilde{I}_\gamma,\vec{l}+\tilde{I}_\theta-\tilde{I}_\eta,t\right)+\vec{E}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right),$$

where $\vec{V}^{\mathrm{T}}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)=\left(v_1\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right),v_2\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},,t\right),...,v_n\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},,t\right)\right)$, $v_i\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)$ are the expected revenue obtained by the *i*-th QS in time t, $\tilde{I}_\alpha$ is a vector of dimension Ψr, consisting of zeros, with the exception of the component with number α, which is 1, Ψr is a positive number, r is the number of customer types, I_α is a vector of dimension n, consisting of zeros, with the exception of the component with the number α, which is 1, $\vec{d}$ is a vector of dimension n, consisting of components d_i,, where d_i is a number of serviceable channels in the *i*-th QS at the moment t, $\vec{k}$ is a vector of dimension Ψr, consisting of components k_{ic}, where k_{ic} is a number of positive customers of type c in queue i at the moment t, $\vec{l}$ is a vector of dimension Ψr, consisting of components l_{ic}, where l_{ic} is a number of signals of type c in the queue i at the moment t, $\Lambda\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)$, $\Theta_{i^* j^* \alpha m\beta b\gamma\theta\eta}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right),\vec{E}\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)$ are some functions that are different for each service network.

The form of successive approximations and their properties have been investigated in the paper.

Keywords: the system of difference-differential equations (DDE); open queueing network; the method of successive approximations.

MATALYTSKI Mihail Alekseevich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Grodno State University, Belarus).
E-mail: m.matalytski@gmail.com

KOPAT Dmitry Yaroslavovich (Post-graduate Student, Grodno State University, Belarus).
E-mail: dk80395@mail.ru

REFERENCES

1. Matalytski, M. (2009) On some results in analysis and optimization of Markov networks with incomes and their application. *Automatic and Remote Control*. 70(10). pp. 1683–1697. DOI: 10.1134/S0005117909100075
2. Pankov, A.V. (2009) [Analysis of the stochastic cost model for maintaining a flexible computing cluster]. *Sovremennye matematicheskie metody analiza i optimizatsii informatsionno-telekommunikatsionnykh setey* [Modern Mathematical Methods for the Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks]. Proc. of the 20th International Conference. Minsk. Janruary 26–29, 2009. pp. 184–188.
3. Gelenbe, E. (1994) G-networks: a unifying model for neural and queueing networks. *Annals of Operations Research*. 48. pp. 433–461. DOI: 10.1007/BF02033314
4. Howard, R. (1964) *Dinamicheskoe programmirovanie i markovskie protsessy* [Dynamic programming and Markov process]. Translated from English by V.V. Rykov. Moscow: Sovetskoe Radio.
5. Gelenbe, E. (1991) Product form queueing networks with negative and positive customers. *Journal of Applied Probability*. 28. pp. 656–663. DOI: 10.2307/3214499
6. Gelenbe, E. & Labed, A. (1998) G-networks with multiple classes of signals and positive customers. *European Journal of Operational Research*. 108. pp. 293–305. DOI: 10.1016/S0377-2217(97)00371-8
7. Gelenbe, E. (1993) G-networks with signals and batch removal. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 7. pp. 335–342. DOI: 10.1017/S0269964800002953
8. Fourneaua, J.M., Gelenbe, E. & Surosc, R. (1996) G-networks with multiple classes of negative and positive customers. *Theoretical Computer Science*. 155(1). pp. 141–156. DOI: 10.1016/0304-3975(95)00018-6
9. Gelenbe, E. (2002) G-Networks: Multiple classes of positive customers, signals, and product form. In: Calzarossa, M.C. & Tucci, S. (eds) *Results performance evaluation of complex systems: Techniques and Tools*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. pp. 1–16. DOI: 10.1007/3-540-45798-4
10. Matalytski, M. (2017) Finding non-stationary state probability of G-networks with signal and customers batch removal. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 31(4). pp.346–412. DOI: 10.1017/S0269964817000109
11. Statkevich, S. (2010) Analysis of HM-networks with unreliable systems and random revenues for transitions between states. *Vestnik GrSU*. 1(3). pp. 40–52.
12. Matalytski, M. & Naumenko, V. (2016) *Stochastic network with nonstandart moving customers*. Grodno: GrSU.