

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.872

DOI: 10.17223/19988605/51/3

С.Г. Алиева

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ  
С ОТСРОЧЕННЫМИ ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ

Изучаются модели многоканальных систем массового обслуживания с отсроченными обратными связями. Вызов принимается для обслуживания, если в момент его поступления имеется хотя бы один свободный канал, иначе он, согласно схеме Бернулли, либо получает отказ, либо уходит в орбиту для повторения своего запроса после некоторого промежутка времени. После завершения обслуживания каждый вызов, согласно схеме Бернулли, либо окончательно покидает систему, либо уходит в орбиту. Поступающий с орбиты вызов принимается для обслуживания, если в этот момент имеется свободный канал, иначе он, согласно схеме Бернулли, либо покидает орбиту, либо остается в ней. Изучаются модели с конечным и бесконечным размером орбиты. Разработаны точный и приближенный методы расчета вероятностей состояний системы и ее характеристик. Даны результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания; отсроченная обратная связь; численный анализ.

Модели систем массового обслуживания (СМО) с обратными связями [1, 2] адекватно описывают процессы передачи информации в телекоммуникационных сетях. Это объясняется тем, что в этих сетях ошибочно переданные данные (пакеты, кадры и т.д.) требуют повторной передачи. При этом в зависимости от принятого протокола эти данные могут быть повторно переданы либо мгновенно, либо с некоторой задержкой. В первом случае потребуется использовать модели СМО с мгновенной обратной связью [3–14], а во втором – СМО с отсроченной обратной связью [15–22].

Анализ указанных работ показал, что для стационарного распределения вероятностей состояний СМО с обратными связями не удастся получить простые расчетные формулы даже для моделей систем с числом каналов больше двух. Поэтому разработка эффективных методов для численного анализа многоканальных СМО с обратными связями является актуальной проблемой.

В данной работе предлагаются точный и приближенный методы анализа характеристик модели многоканальной СМО с отсроченной обратной связью. Подобная модель ранее была изучена в [22], где предполагалось, что если в момент поступления первичного вызова (т.е. вызова, который поступает извне) все каналы системы заняты, то он теряется с вероятностью, равной единице. В настоящей работе предполагается, что в этих случаях такие вызовы, согласно схеме Бернулли, либо отправляются в орбиту для повторения своего запроса для обслуживания, либо теряются. Кроме того, здесь же корректируются технические ошибки, допущенные в работе [22].

## 1. Описание модели системы и постановка задачи

На вход многоканальной системы, которая содержит  $N$ ,  $1 < N < \infty$ , идентичных каналов, поступает пуассоновский поток вызовов с интенсивностью  $\lambda$ . Эти вызовы называются первичными вызовами ( $p$ -вызовы). Если в момент поступления  $p$ -вызова имеется хотя бы один свободный канал,

то он принимается в систему, и немедленно начинается процесс его обслуживания; иначе, т.е. если в этот момент все каналы системы заняты, поступивший  $p$ -вызов, согласно схеме Бернулли, либо с вероятностью  $\sigma(r)$ ,  $0 \leq \sigma(r) \leq 1$ , уходит в орбиту для повторения обслуживания через некоторое случайное время, либо с дополнительной вероятностью  $1 - \sigma(r)$  покидает систему, где  $r$  – текущее число вызовов в орбите (рис. 1).

Времена обработки  $p$ -вызовов являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, которые имеют показательную функцию распределения со средним  $\mu^{-1}$ . После завершения обслуживания  $p$ -вызов, согласно схеме Бернулли, либо с вероятностью  $\alpha(n)$  уходит в орбиту для повторения обслуживания через случайное время, либо с дополнительной вероятностью  $1 - \alpha(n)$  вызов уходит из системы. Здесь параметр  $n$  указывает число занятых каналов непосредственно перед моментом завершения обслуживания данного вызова,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Считается, что  $\alpha(n) > 0$  для всех  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

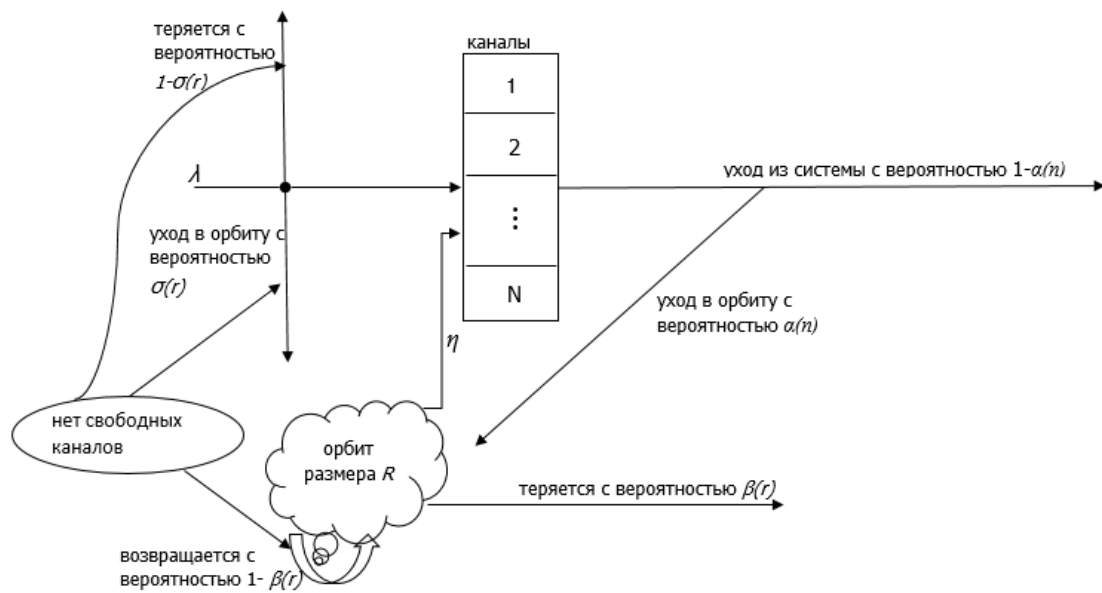


Рис. 1. Структурная схема системы  
Fig. 1. The structural diagram of the system

Вызовы, которые требуют повторного обслуживания, и вызовы, которые не смогли получить доступ в канал в момент поступления, организуют общую орбиту повторных вызовов ( $r$ -вызовы) с максимальным размером  $R$ ,  $0 < R \leq \infty$ . В случае  $R < \infty$  вызов принимается в орбиту, если в момент его поступления общее число повторных вызовов в орбите меньше, чем  $R$ , иначе он покидает систему с вероятностью, равной единице. Орбита генерирует запросы для обслуживания через случайные моменты времени, которые подчиняются показательному закону распределения со средним  $(r\eta)^{-1}$ , где параметр  $r$  указывает текущее число  $r$ -вызовов в орбите. Считается, что  $r$ -вызовы и  $p$ -вызовы являются идентичными по длительности их обслуживания. Считается, что если в момент поступления  $r$ -вызова все каналы системы заняты, то он, согласно схеме Бернулли, с вероятностью  $\beta(r)$ ,  $0 \leq \beta(r) \leq 1$ , покидает систему или с дополнительной вероятностью  $1 - \beta(r)$  остается в орбите, где  $r$  – текущее число  $r$ -вызовов в орбите,  $r = 1, 2, \dots, R$ .

Проблема состоит в определении стационарного распределения состояний данной системы и ее характеристик, при этом характеристиками данной системы являются вероятности потерь первичных ( $PB_p$ ) и повторных ( $PB_r$ ) вызовов, среднее число занятых каналов ( $N_{av}$ ), и среднее число повторных вызовов в орбите ( $L_0$ ).

## 2. Точный метод расчета характеристик системы

Сначала рассмотрим модель системы с ограниченным размером орбиты. В этом случае состояние этой системы в произвольный момент времени определяется двумерным вектором  $(n, r)$ , где  $n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , означает суммарное число вызовов (первичных и повторных) в каналах, а  $r$ ,  $r = 0, 1, \dots, R$ , указывает на число повторных вызовов в орбите. Тогда изучаемая система описывается двумерной цепью Маркова (Two Dimensional Markov Chain, 2D MC), где ее пространство состояний (ПС) задается так:

$$E = \{(n, r) : n = 0, 1, \dots, N; r = 0, 1, \dots, R\}. \quad (1)$$

Интенсивность перехода из состояния  $(n_1, r_1) \in E$  в состояние  $(n_2, r_2) \in E$  обозначается через  $q((n_1, r_1), (n_2, r_2))$ . Совокупность этих величин составляет производящую матрицу (ПМ) данной 2D MC. Исходя из описания работы системы заключаем, что положительные элементы ПМ определяются следующим образом (см. рис. 1).

Случай  $0 \leq n_1 \leq N-1$ :

$$q((n_1, r_1), (n_2, r_2)) = \begin{cases} \lambda, & (n_2, r_2) = (n_1 + 1, r_1), \\ n_1 \mu \alpha(n_1), & r_1 < R, (n_2, r_2) = (n_1 - 1, r_1 + 1), \\ n_1 \mu (1 - \alpha(n_1)), & r_1 < R, (n_2, r_2) = (n_1 - 1, r_1), \\ n_1 \mu, & r_1 = R, (n_2, r_2) = (n_1 - 1, r_1), \\ r_1 \eta, & (n_2, r_2) = (n_1 + 1, r_1 - 1). \end{cases} \quad (2)$$

Случай  $n_1 = N$ :

$$q((N, r_1), (n_2, r_2)) = \begin{cases} \lambda \sigma(r_1), & \text{если } r_1 < R, (n_2, r_2) = (N, r_1 + 1), \\ N \mu \alpha(N), & \text{если } r_1 < R, (n_2, r_2) = (N - 1, r_1 + 1), \\ N \mu (1 - \alpha(N)), & \text{если } r_1 < R, (n_2, r_2) = (N - 1, r_1), \\ N \mu, & \text{если } r_1 = R, (n_2, r_2) = (N - 1, R), \\ r_1 \eta \beta(r_1), & \text{если } (n_2, r_2) = (N, r_1 - 1). \end{cases} \quad (3)$$

Данная 2D MC является неприводимой, так как ее состояния сообщаются друг с другом (рис. 2). Поэтому при любых положительных значениях нагрузочных параметров системы в ней существует стационарный режим.

Пусть  $p(n, r)$  обозначает стационарную вероятность состояния  $(n, r) \in E$ . Эти вероятности удовлетворяют соответствующей системе уравнений равновесия (СУР), которая составляется на основе соотношений (2) и (3). Она имеет следующий вид.

Случай  $(n, r), r < R$ :

$$\begin{aligned} p(n, r) & (\lambda I(n < N) + \lambda \sigma(r) \delta(n, N) + n \mu + r \eta) = (r + 1) \eta p(n - 1, r + 1) I(n > 0) + \\ & + (r + 1) \eta \beta(r + 1) p(N, r + 1) \delta(n, N) + (n + 1) \mu (1 - \alpha(n + 1)) p(n + 1, r) I(n < N) + \\ & + \lambda p(n - 1, r) I(n > 0) + (n + 1) \mu \alpha(n + 1) p(n + 1, r - 1) I(r > 0) + \\ & + \lambda \sigma(r - 1) p(n, r - 1) I(1 < r < R) \delta(n, N). \end{aligned} \quad (4)$$

Случай  $(n, R)$ :

$$\begin{aligned} p(n, R) & (\lambda I(n < N) + n \mu + R \eta I(n < N) + R \eta \beta(R) \delta(n, N)) = \lambda p(n - 1, R) I(n > 0) + \\ & + (n + 1) \mu p(n + 1, R) I(n < N) + (n + 1) \mu \alpha(n + 1) p(n + 1, R - 1) + \\ & + \lambda \sigma(R - 1) p(N, R) \delta(n, R). \end{aligned} \quad (5)$$

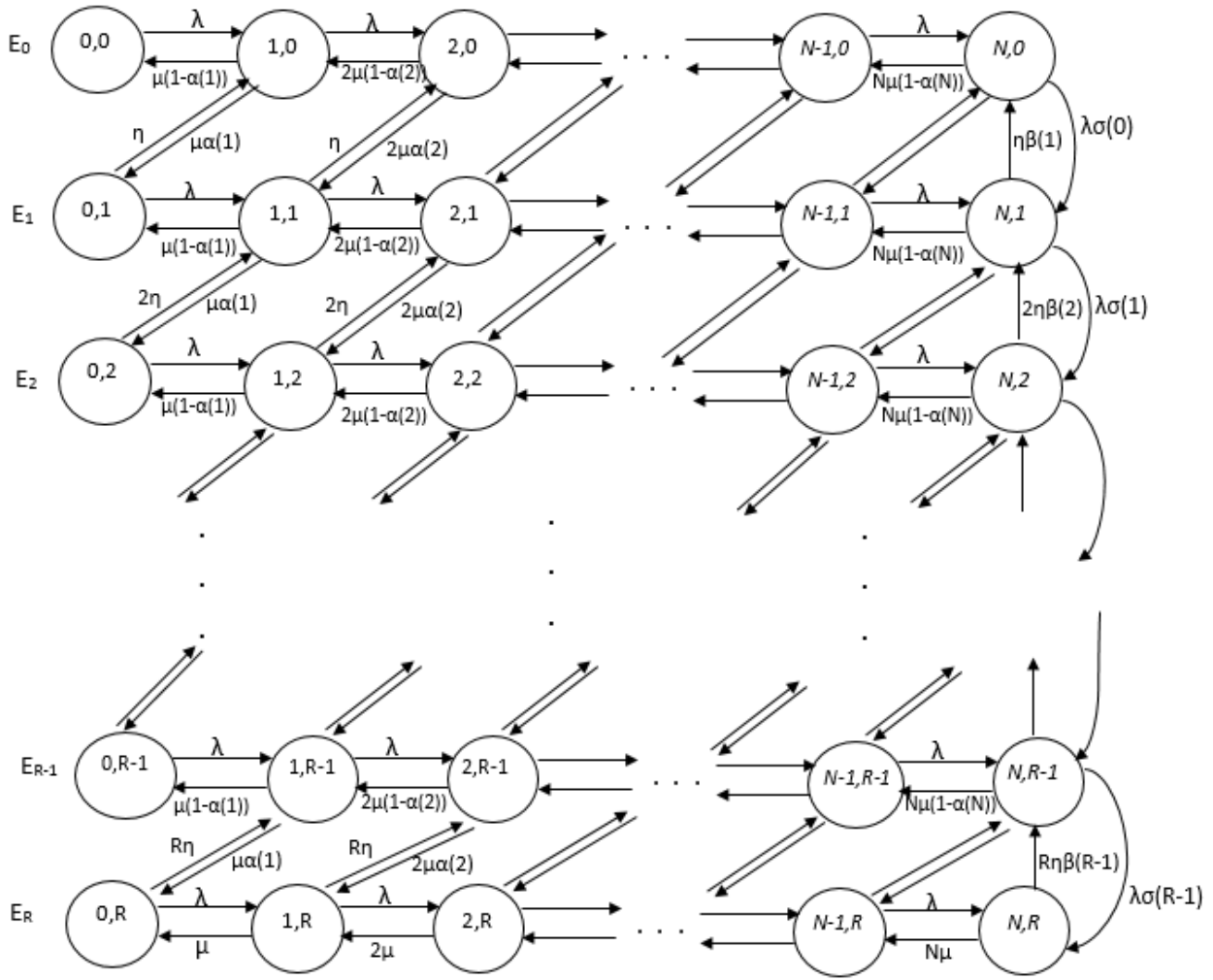


Рис. 2. Граф переходов  
Fig. 2. Transition graph

В уравнениях (4), (5) и далее приняты следующие обозначения:  $I(A)$  – индикаторная функция события  $A$ ,  $\delta(i, j)$  – символы Кронекера.

Нормирующее условие записывается как

$$\sum_{(n,r) \in E} p(n,r) = 1. \quad (6)$$

Характеристики системы определяются как

$$PB_p = \sum_{r=0}^R p(N,r)(1-\sigma(r)); \quad (7)$$

$$PB_r = \sum_{i=1}^R p(N,i)\beta(i); \quad (8)$$

$$N_{av} = \sum_{n=1}^N n \sum_{r=0}^R p(n,r); \quad (9)$$

$$L_o = \sum_{r=1}^R r \sum_{n=0}^N p(n,r). \quad (10)$$

Описанный выше точный метод позволяет вычислить характеристики (7)–(10) для моделей умеренной размерности. С ростом размерности ПС (1) этот метод испытывает серьезные вычислительные трудности. Для их устранения используем метод приближенного расчета стационарного распределения 2D MC [22].

### 3. Приближенный метод расчета характеристик системы

Для корректного применения указанного метода предположим, что интенсивность первичных вызовов существенно превышает интенсивности повторных вызовов, т.е. принимается, что  $\lambda \gg \eta$ . В силу указанного допущения получаем, что интенсивности переходов между состояниями внутри строк в диаграмме переходов модели намного превышают интенсивности переходов между ними (см. рис. 2). На основе этого факта в работе [22] используется следующее расщепление исходного ПС:

$$E = \bigcup_{r=0}^R E_r, E_r \cap E_{r'} = \emptyset, \text{ если } r \neq r', \quad (11)$$

где  $E_r = \{(n, r) \in E : n = 0, 1, \dots, N\}$ ,  $r = 0, 1, \dots, R$ . Иными словами, осуществляется расслоение графа переходов по строкам (см. рис. 1).

На основе расщепления (11) вводится следующая функция укрупнения:

$$U((n, r)) = \langle r \rangle, (n, r) \in E_r,$$

где  $\langle r \rangle$  является укрупненным состоянием, которое включает в себе все состояния из класса  $E_r$  и обозначается как  $\Omega = \{\langle r \rangle : r = 0, 1, \dots, R\}$ .

Согласно алгоритму приближенного расчета стационарного распределения 2D МС [22] находим, что вероятности состояний исходной модели определяются следующим образом:

$$p(n, r) \approx \rho_r(n) \pi(\langle r \rangle), \quad (12)$$

где  $\rho_r(n)$  – вероятность состояния  $(n, r)$  внутри расщепленной модели с пространством состояний  $E_r$ , а  $\pi(\langle r \rangle)$  – вероятность укрупненного состояния  $\langle r \rangle \in \Omega$ .

Из схемы разбиения (11) видно, что все расщепленные модели представляют собой идентичные одномерные процессы размножения и гибели (One-Dimensional Birth Death Process, 1-D BDP), так как в классе состояний  $E_r$  вторая компонента является постоянной. Поэтому при изучении расщепленной модели с ПС  $E_r$  микросостояние  $(n, r) \in E$  исходной модели может быть задано лишь одной компонентой  $n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ .

Интенсивность перехода между состояниями  $n$  и  $n'$  в расщепленных моделях с ПС  $E_r$  обозначается через  $q_r(n, n')$ ,  $n, n' = 0, 1, \dots, N, n \neq n'$ . Из (2) и (3) заключаем, что для всех расщепленных моделей с ПС  $E_r, r = 0, 1, \dots, R-1$ , при этом эти величины определяются одинаковым образом как

$$q_r(n, n') = \begin{cases} \lambda, & \text{если } n' = n + 1, \\ n\mu(1 - \alpha(n)), & \text{если } n' = n - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (13)$$

В расщепленной модели с ПС  $E_R$  эти величины определяются так:

$$q_R(n, n') = \begin{cases} \lambda, & \text{если } n' = n + 1, \\ n\mu, & \text{если } n' = n - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (14)$$

Из (13) заключаем, что вероятности состояний внутри расщепленных моделей с ПС  $E_r, r = 0, 1, \dots, R-1$ , не зависят от параметра  $r$  и определяются следующим образом:

$$\rho_r(n) = \frac{v^n}{n! \prod_{i=1}^n (1 - \alpha(i))} \rho_r(0), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

где  $v = \lambda/\mu$ ,  $\rho_r(0)$  находится из условия нормировки, т.е.  $\sum_{n=0}^N \rho_r(n) = 1$ .

**Замечание.** Поскольку вероятности состояний  $\rho_r(n)$  не зависят от индекса при  $0 \leq r \leq R-1$ , то ниже этот индекс для этих вероятностей иногда (когда это не приводит к недоразумению) опускается.

Из (14) находим, что вероятности состояний внутри расщепленной модели с ПС  $E_R$  совпадают с вероятностями состояний классической модели Эрланга  $M/M/N/N$  с нагрузкой  $v$ :

$$\rho_R(n) = \frac{v^n}{n!} / \sum_{i=0}^N \frac{v^i}{i!}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (16)$$

Тогда с учетом (2), (3), (15) и (16) после определенных математических выкладок получаем

$$q(<r_1>, <r_2>) = \begin{cases} \Lambda(r_1), & \text{если } r_2 = r_1 + 1, \\ r_1 M(r_1), & \text{если } r_2 = r_1 - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (17)$$

где  $\Lambda(r) = \mu \sum_{n=1}^N n \alpha(n) \rho(n) + \lambda \sigma(r) \rho(N)$ ,  $M(r) = \eta(1 - (1 - \beta(r)) \rho_r(N))$ .

Из (17) видно, что вероятности укрупненных состояний вычисляются как вероятности состояний 1-D BDP с переменными параметрами, т.е.

$$\pi(<r>) = \frac{1}{r!} \prod_{i=1}^r \frac{\Lambda(i-1)}{M(i)} \pi(<0>), \quad r = 1, \dots, R, \quad (18)$$

где  $\pi(<0>)$  находится из условия нормировки, т.е.  $\sum_{r=0}^R \pi(<r>) = 1$ .

Тогда с учетом соотношений (7)–(10), (12), (15), (16) и (18) после определенных математических выкладок получим следующие приближенные формулы для расчета искомых характеристик системы:

$$PB_p \approx \rho(N) \sum_{i=0}^{R-1} (1 - \sigma(i)) \pi(<i>) + E_B(v, N) \pi(<R>); \quad (19)$$

$$PB_r \approx \rho(N) \sum_{r=1}^{R-1} \beta(r) \pi(<r>) + E_B(v, N) \pi(<R>) \beta(R); \quad (20)$$

$$\begin{aligned} N_{av} &\approx \sum_{n=1}^N n \sum_{r=0}^R \rho_r(n) \pi(<r>) = (1 - \pi(<R>)) \sum_{n=1}^N n \rho(n) + \pi(<R>) \sum_{n=1}^N n \rho_r(n) = \\ &= (1 - \pi(<R>)) \sum_{n=1}^N n \rho(n) + v(1 - E_B(v, N)) \pi(<R>); \end{aligned} \quad (21)$$

$$L_o \approx \sum_{r=1}^R r \pi(<r>). \quad (22)$$

В (19)–(22) и далее  $E_B(v, N)$  означает В-формулы Эрланга для системы  $M/M/N/N$  с нагрузкой  $v$ , т.е.  $E_B(v, N) = \rho_R(N)$ . Отметим, что при выводе формулы (21) учитывается, что множитель  $\sum_{k=1}^N k \rho_r(k)$  представляет собой среднее число занятых каналов в системе  $M/M/N/N$  с нагрузкой  $v$  erl, которое равно  $v(1 - E_B(v, N))$ .

Отметим, что когда вероятности  $\alpha(n)$ ,  $\sigma(r)$  и  $\beta(r)$  являются постоянными величинами, т.е. если  $\alpha(n) = \alpha$  для всех  $n = 1, \dots, N$ ,  $\beta(r) = \beta$  и  $\sigma(r) = \sigma$  для всех  $r = 1, \dots, R$ , то полученные выше формулы упрощаются. Действительно, в этом случае вероятности состояний  $\rho_r(n)$  не зависят от индекса  $r$  при  $0 \leq r \leq R-1$  и совпадают с вероятностями состояний классической модели Эрланга  $M/M/N/N$  с нагрузкой  $\tilde{v} = v/(1 - \alpha)$ , т.е. эти вероятности определяются так:

$$\rho(n) = \frac{\tilde{v}^n}{n!} / \sum_{i=0}^N \frac{\tilde{v}^i}{i!}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (23)$$

Вероятности состояний  $\rho_R(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , внутри расщепленной модели с ПС  $E_R$  вычисляются с помощью (16). Тогда с учетом (2), (3), (16) и (23) после определенных математических выкладок получаем, что в этом случае интенсивности переходов между укрупненными состояниями определяются как

$$q(< r_1 >, < r_2 >) = \begin{cases} \Lambda_1, & \text{если } r_2 = r_1 + 1, \\ r_1 M_1(r_1), & \text{если } r_2 = r_1 - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (24)$$

где

$$\Lambda_1 = \mu \alpha \tilde{v} (1 - E_B(\tilde{v}, N)) + \lambda \sigma E_B(\tilde{v}, N),$$

$$M_1(r) = \begin{cases} M_1, & \text{если } 1 \leq r \leq R-1, \\ M_2, & \text{если } r = R, \end{cases}$$

$$M_1 = \eta(1 - (1 - \beta)E_B(\tilde{v}, N)), \quad M_2 = \eta(1 - (1 - \beta)E_B(v, N)).$$

Из (24) заключаем, что в этом случае вероятности укрупненных состояний вычисляются так:

$$\pi(< r >) = \begin{cases} \frac{1}{r!} \cdot \left( \frac{\Lambda_1}{M_1} \right)^r \pi(< 0 >), & \text{если } 1 \leq r \leq R-1, \\ \frac{1}{R!} \cdot \left( \frac{\Lambda_1}{M_1} \right)^R \cdot \frac{M_1}{M_2} \pi(< 0 >), & \text{если } r = R, \end{cases} \quad (25)$$

где  $\pi(< 0 >)$  находится из условия нормировки.

В такой модели характеристика (10) вычисляется с помощью (22) с учетом формулы (25), а остальные характеристики (7)–(9) определяются из следующих простых формул:

$$PB_p \approx (1 - \sigma) \rho(N) (1 - \pi(< R >)) + E_B(v, N) \pi(< R >); \quad (26)$$

$$PB_r \approx \beta (\rho(N) (1 - \pi(< 0 >) - \pi(< R >)) + E_B(v, N) \pi(< R >)); \quad (27)$$

$$N_{av} \approx \tilde{v} (1 - E_B(\tilde{v}, N)) (1 - \pi(< R >)) + v (1 - E_B(v, N)) \pi(< R >). \quad (28)$$

Важно отметить, что в случаях, когда указанные выше вероятности являются постоянными величинами, удастся получить явные формулы и для расчета характеристик моделей с бесконечным размером орбиты (т.е.  $R = \infty$ ). Заметим, что в отличие от модели с конечным размером орбиты, здесь вызовы, которые требуют повторного обслуживания, всегда принимаются в орбиту. Это означает, что все расщепленные модели с ПС  $E_r$ ,  $r = 0, 1, \dots$ , являются идентичными, т.е. вероятности состояний внутри расщепленных моделей определяются из формулы (23).

С учетом (23) из (17) получим, что в данной модели интенсивности переходов между состояниями укрупненной модели определяются так:

$$q(< r_1 >, < r_2 >) = \begin{cases} \Lambda_1, & \text{если } r_2 = r_1 + 1, \\ r_1 M_1, & \text{если } r_2 = r_1 - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (29)$$

Из соотношений (29) видно, что вероятности укрупненных состояний определяются как вероятности состояний модели Эрланга  $M/M/\infty$  с нагрузкой  $\Psi = \Lambda_1/M_1$

$$\pi(< r >) = \frac{\Psi^r}{r!} e^{-\Psi}, \quad r = 0, 1, \dots \quad (30)$$

Таким образом, с учетом соотношений (7)–(10), (23) и (25) после определенных математических выкладок получим следующие приближенные формулы для расчета искомых характеристик системы с бесконечным размером орбиты:

$$PB_p = (1 - \sigma) E_B(\tilde{v}, N); \quad (31)$$

$$PB_r \approx \beta E_B(\tilde{v}, N) (1 - e^{-\Psi}); \quad (32)$$

$$N_{av} \approx \tilde{v} (1 - E_B(\tilde{v}, N)); \quad (33)$$

$$L_o \approx \Psi. \quad (34)$$

В отличие от системы с конечным размером орбиты, здесь вероятность потери первичных вызовов и среднее число занятых каналов системы не зависят от интенсивности поступления повторных вызовов с орбиты (см. формулы (31) и (33)). Это объясняется тем, что согласно нашему допущению интенсивность поступления первичных вызовов существенно больше, чем интенсивность поступления повторных вызовов. Вместе с тем эти величины зависят от интенсивности ухода вызовов в орбиту, так как на них косвенно влияет число вызовов в орбите. Вероятность потери повторных вызовов и их среднее число в орбите зависят от всех структурных и нагрузочных параметров системы (см. формулы (32) и (34)).

Выше мы рассматривали случай линейной интенсивности поступления повторных вызовов с орбиты, т.е. считали, что если суммарное число таких вызовов в орбите равно  $r$ , то интенсивность их поступления равна  $r\eta$ . Вместе с тем можно исследовать и модель с постоянной интенсивностью поступления повторных вызовов с орбиты, т.е. предположить, что лишь вызов, который стоит в очереди повторных вызовов, может генерировать запрос для обслуживания. В таком случае интенсивность поступления повторных вызовов с орбиты не зависит от числа вызовов в ней и всегда равна  $\eta$ . В этой модели элементы ПМ также определяются из формул (2) и (3), однако здесь в правой части данных формул в последних строках следует учитывать, что  $r = 1$ . При точном подходе соответствующие замены должны быть учтены и в СУР (4)–(6). Аналогичные изменения необходимо учитывать и в полученных приближенных формулах в случае орбиты конечного размера. Однако в случае бесконечного размера орбиты требуется выполнение условия эргодичности модели, т.е. необходимо выполнение условия  $\Psi < 1$ . Отметим, что выполнение последнего условия трудно проверить на практике. Вместе с тем можно показать, что если выполняется легко проверяемое условие  $\lambda \max\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \sigma\right\} < \eta$ , то условие эргодичности  $\Psi < 1$  выполняется.

В конце данного раздела отметим, что предложенные точный и приближенный методы могут быть применены и для изучения модели с нетерпеливыми  $r$ -вызовами в орбите, т.е. можно предположить, что допустимое время пребывания  $r$ -вызова в орбите является случайной величиной, которая имеет показательное распределение с параметром  $\tau > 0$ . Иными словами, если время пребывания  $r$ -вызова превышает допустимое предельное значение, то он покидает орбиту с вероятностью, равной единице. Для этой модели элементы ПМ соответствующей двумерной цепи Маркова с ПС (1) определяются аналогично (2) и (3), но при этом следует учесть, что здесь появляются новые переходы из состояния типа  $(n, r), r > 0$ , в состояние  $(n, r-1)$  с интенсивностью  $r\tau$ . Из-за ограниченности объема статьи эта модель здесь не рассматривается.

#### 4. Численные результаты

Полученные формулы позволяют изучить поведение характеристик системы относительно изменения всех ее параметров. Из-за ограниченности объема статьи здесь предполагается, что параметры  $\beta(r), r = 1, 2, \dots, R$ , имеют релейный характер изменения, т.е. они определяются так:

$$\beta(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } r > K, \\ 0, & \text{если } r \leq K, \end{cases} \quad (35)$$

где  $K$ ,  $1 < K \leq R$ , является известной величиной.

Соотношение (35) описывает схему, согласно которой повторные вызовы покидают орбиту, если в моменты их генерации все каналы системы оказываются занятыми и при этом число вызовов в орбите больше некоторой величины  $K$ ,  $1 < K \leq R$ . Этой схеме адекватно соответствует реальное поведение вызовов в СМО с обратной связью.

Проведено большое количество вычислительных экспериментов для изучения зависимости характеристик системы от порогового параметра  $K$  при различных комбинациях изменения исходных данных. Результаты этих экспериментов показаны на рис. 3, где постоянные исходные данные выбирались так:  $N = 10, R = 50, \mu = 30, \eta = 4, \sigma = 0,3$ .

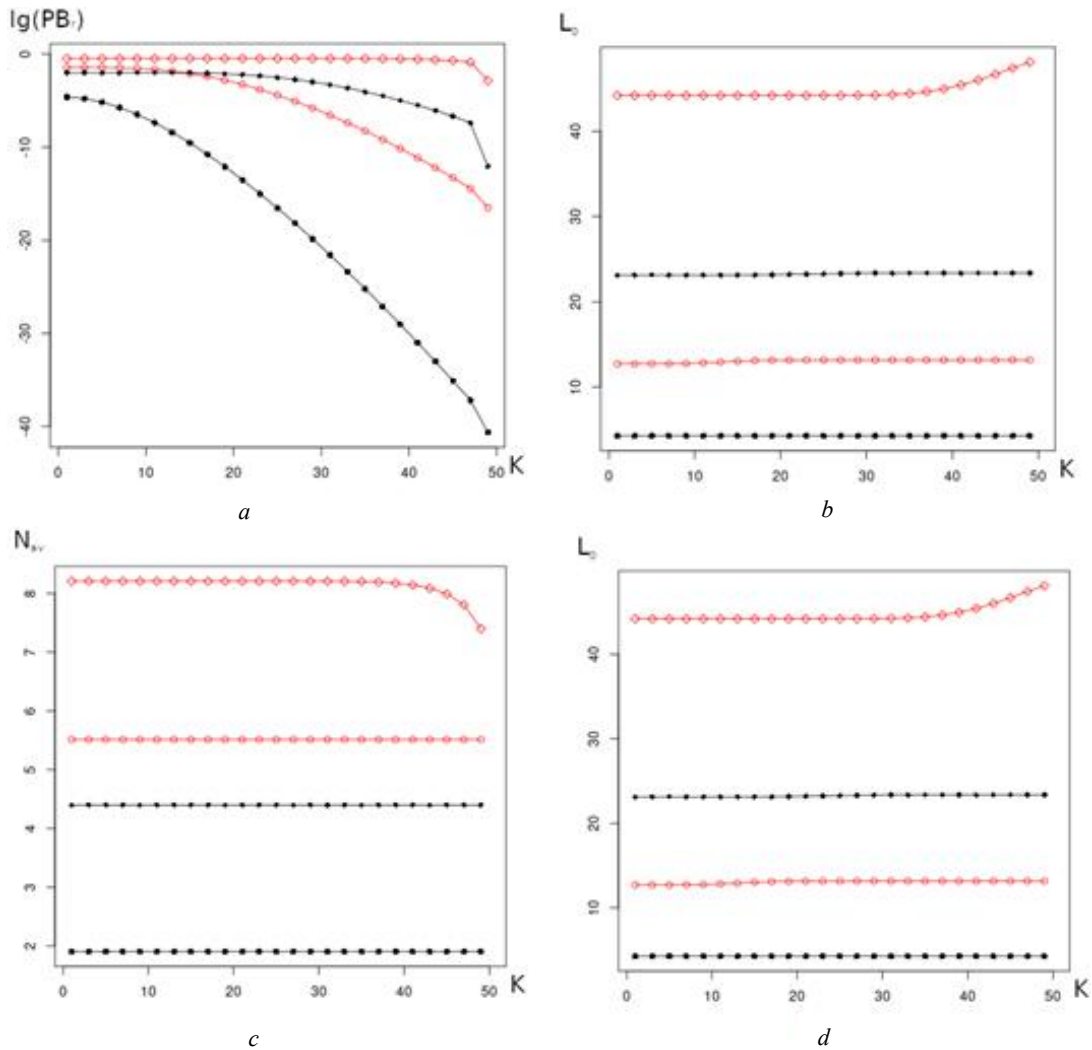


Рис. 3. Зависимость характеристик системы от параметра  $K$   
Fig. 3. Dependence of system characteristics on parameter  $K$

Рассмотрены четыре серии экспериментов для пары параметров  $(\lambda, \alpha)$ :

- 1)  $(\lambda, \alpha) = (120; 0,7)$ ;
- 2)  $(\lambda, \alpha) = (120; 0,3)$ ;
- 3)  $(\lambda, \alpha) = (40; 0,7)$ ;
- 4)  $(\lambda, \alpha) = (40; 0,3)$ .

На графиках символ  $\diamond$  соответствует первой серии,  $\circ$  – второй серии,  $\blacklozenge$  – третьей серии,  $\bullet$  – четвертой серии. Из графиков видно, что для выбранных исходных данных только вероятность потери повторных вызовов ( $PB_p$ ) существенно зависит от значения порогового параметра  $K$  (см. рис. 3, а), а остальные характеристики для трех серий экспериментов, кроме первой, являются почти постоянными величинами. Во всех сериях экспериментов вероятность потери повторных вызовов является убывающей относительно порогового параметра  $K$ , что вполне логично, ибо увеличение параметра  $K$  приводит к уменьшению шансов вызовов с орбиты быть потерянными. При этом с ростом нагрузки системы ( $\nu$ ) и вероятности возвращения вызовов в орбиту после окончания обслуживания ( $\alpha$ ) растет и вероятность потери повторных вызовов. Отметим, что при  $\alpha = 0,3$  для обеих нагрузок эта функция практически равна нулю для больших значений параметра  $K$ .

Среднее число повторных вызовов в орбите ( $L_o$ ) зависит от значения порогового параметра  $K$  только в первой серии экспериментов и при этом лишь при его критических значениях, близких к максимально возможному значению  $R$  (см. рис. 3, б). Для указанной серии экспериментов при критических значениях  $K$  орбита оказывается почти полной. Как и для функции  $PB_p$ , здесь также с ростом нагрузки системы ( $\nu$ ) и вероятности возвращения вызовов в орбиту после окончания обслуживания ( $\alpha$ ) растет и среднее число повторных вызовов в орбите.

В первой серии экспериментов несколько неожиданным является поведение функции  $N_{av}$  относительно параметра  $K$  (см. рис. 3, в). Так, при критических значениях параметра  $K$  она, хоть и с очень малой скоростью, начинает уменьшаться. Этот факт объясняется тем, что поскольку в этой серии экспериментов орбита оказывается почти полной (см. рис. 3, а), то при критических значениях параметра  $K$  вызовы с орбиты теряются часто и потому получается малая интенсивность поступления с орбиты, иными словами, при критических значениях параметра  $K$  функция  $N_{av}$  начинает уменьшаться. Уменьшение значений функции  $PB_p$  (с очень малой скоростью) относительно параметра  $K$  при его критических значениях (см. рис. 3, д) объясняется тем, что при этих значениях уменьшается и среднее число занятых каналов (т.е. функция  $N_{av}$ ). Отметим, что с ростом нагрузки системы ( $\nu$ ) и вероятности возвращения вызовов в орбиту после окончания обслуживания ( $\alpha$ ) растут обе функции –  $N_{av}$  и  $PB_p$ .

### Заключение

В работе изучаются математические модели многоканальных СМО с отсроченными обратными связями. Поступающие извне вызовы принимаются для обслуживания при наличии хотя бы одного свободного канала, иначе они, согласно схеме Бернулли, либо покидают систему, либо уходят в орбиту. После завершения обслуживания вызовы, согласно схеме Бернулли, либо покидают систему, либо уходят в орбиту и оттуда генерируют запросы в случайные моменты времени. Изучены модели с конечными и бесконечными размерами орбиты для пребывания повторных вызовов. Разработаны точный и приближенный методы расчета характеристик рассмотренных моделей и даны результаты численных экспериментов.

В качестве направлений дальнейших исследований можно указать изучение моделей с коррелированными потоками, а также моделей с отдельными орбитами для первичных и повторных вызовов.

**Благодарность.** Автор выражает искреннюю благодарность члену-корреспонденту НАН Азербайджана, доктору технических наук, профессору А.З. Меликову за постановку задачи и полезные обсуждения результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Takács L. A single-server queue with feedback // *Bell System Technical Journal*. 1963. V. 42. P. 505–519.
2. Takács L. A queuing model with feedback // *Operations Research*. 1977. V. 11. P. 345–354.
3. Назаров А.А., Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследования СМО с повторным обслуживанием и неограниченным числом обслуживаемых приборов методом предельной декомпозиции // *Вычислительные технологии*. 2008. Т. 13, вып. 5. С. 88–92.
4. Моисеева С.П., Захорольная И.А. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // *Автоматика*. 2011. Т. 47, вып. 6. С. 51–58.
5. Wortman M.A., Disney R.L., Kiessler P.C. The M/G/1 Bernoulli feedback queue with vacations // *Queueing Systems*. 1991. V. 9, No. 4. P. 353–363.
6. D'Avignon G.R., Disney R.L. Queues with instantaneous feedback // *Management Sciences*. 1977. V. 24, No. 2. P. 168–180.
7. Berg J.L., Boxma O.J. The M/G/1 queue with processor sharing and its relation to feedback queue // *Queueing Systems*. 1991. V. 9, No. 4. P. 365–402.
8. Hunter J.J. Sojourn time problems in feedback queue // *Queueing Systems*. 1989. V. 5, No. 1-3. P. 55–76.
9. Dudin A.N., Kazimirsky A.V., Klimenok V.I., Breuer L., Krieger U. The queuing model MAP/PH/1/N with feedback operating in a Markovian random environment // *Austrian Journal of Statistics*. 2005. V. 34, No. 2. P. 101–110.
10. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Kuliyeva Kh.N. Calculation of the characteristics of multi-channel queuing system with pure losses and feedback // *Journal of Automation and Information Science*. 2015. V. 47, No. 5. P. 19–29.
11. Gemikonakli O., Ever E., Kocyigit A. Approximate solution for two stage open networks with Markov-modulated queues minimizing the state space explosion problem // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2009. V. 223, No. 1. P. 519–533.
12. Ever E., Gemikonakli O., Kocyigit A., Gemikonakli E. A hybrid approach to minimize state explosion problem for the solution of two stage tandem queues // *Journal of Network and Computer Applications*. 2013. V. 36. P. 908–926.
13. Kirsal Y., Ever E., Kocyigit A., Gemikonakli O., Mapp G. A generic analytical modeling approach for performance evaluation of the handover schemes in heterogeneous environments // *Wireless Personal Communications*. 2014. V. 79. P. 1247–1276.
14. Kirsal Y., Ever E., Kocyigit A., Gemikonakli O., Mapp G. Modeling and analysis of vertical handover in highly mobile environments // *Journal of Supercomputing*. 2015. V. 71. P. 4352–4380.
15. Ayyapan G., Subramanian A.M.G., Sekar G. M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under non-pre-emptive priority service by matrix geometric method // *Applied Mathematical Sciences*. 2010. V. 4. P. 2379–2389.
16. Ayyapan G., Subramanian A.M.G., Sekar G. M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under pre-emptive priority service // *International Journal of Computer Applications*. 2010. V. 2. P. 27–34.
17. Bouchentouf A.A., Belarbi F. Performance evaluation of two markovian retrial queuing model with balking and feedback // *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica*. 2013. V. 5. P. 132–146.
18. Choi B.D., Kim Y.C., Lee Y.W. The M/M/c retrial queue with geometric loss and feedback // *Computers and Mathematics with Applications*. 1998. V. 36. P. 41–52.
19. Krishna K.B., Rukmani R., Thangaraj V. On multi-server feedback retrial queue with finite buffer // *Applied Mathematical Modeling*. 2009. V. 33. P. 2062–2083.
20. Do T.V. An efficient computation algorithm for a multi-server feedback retrial queue with a large queuing capacity // *Applied Mathematical Modeling*. 2010. V. 34. P. 2272–2278.
21. Mokaddis G.S., Metwally S.A., Zaki B.M. A feedback retrial queuing system with starting failures and single vacation // *Tamkang Journal of Science and Engineering*. 2007. V. 10. P. 183–192.
22. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Kuliyeva Kh.N. Numerical analysis of the queuing system with feedback // *Cybernetics and System Analysis*. 2015. V. 51, No. 2. P. 566–573.

Поступила в редакцию 15 ноября 2019 г.

Aliyeva S.H. (2020) NUMERICAL INVESTIGATION OF QUEUEING MODELS WITH DELAYED FEEDBACKS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 22–34

DOI: 10.17223/19988605/51/3

We consider queuing system with  $N$ ,  $1 < N < \infty$ , identical channels and Poisson input flow of primary calls ( $p$ -calls). If upon arrival of a  $p$ -call there is at least one free channel, then it accepted into the system and the service process immediately begins. Otherwise, i.e. if at this moment all the channels of the system are busy, then the incoming  $p$ -call, according to the Bernoulli scheme, either goes into orbit with probability  $\sigma(r)$ ,  $0 \leq \sigma(r) \leq 1$ , to repeat service after some random time, or leaves the system with an complementary probability  $1 - \sigma(r)$ , where  $r$  means the current number of calls in orbit.

The  $p$ -call service times are independent and identically distributed random variables that have an exponential distribution function with a common mean. After completing the service, the  $p$ -call, according to the Bernoulli scheme, either with probability  $\alpha(n)$

join to orbit for repeat the service after a random time, or with an complementary probability  $1 - \alpha(n)$  the call leaves the system. Here, the parameter  $n$  indicates the number of occupied channels immediately before the moment the service is completed for this call,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Calls that require repeated service and calls that were not able to access the channel at the time of arrival, organize a common orbit of repeated calls ( $r$ -calls) with a maximum size  $R$ ,  $0 < R \leq \infty$ .

In the case  $R < \infty$ , the call is accepted into orbit, if at the time of its arrival the total number of repeated calls in the orbit is less than  $R$ . Otherwise, he/she leaves the system with a probability one. The orbit generates service requests at random times that obey the exponential distribution with a finite mean. It is assumed that  $r$ -calls and  $p$ -calls are identical in duration of their service time.

Repeated calls are persistent, i.e. if upon arrival of the  $r$ -call all the channels of the system are busy, then, according to the Bernoulli scheme, he/she leave the system with probability  $\beta(r)$ ,  $0 \leq \beta(r) \leq 1$ , or he/she remain in orbit with an complementary probability  $1 - \beta(r)$ , where  $r$  means the current number of  $r$ -calls in orbit,  $r = 1, 2, \dots, R$ .

It is shown that the mathematical model of this system is a certain two-dimensional Markov chain. An algorithm for constructing the generating matrix of the constructed chain is developed. The paper proposes exact and approximate methods for calculating the steady-stationary probabilities of the constructed two-dimensional Markov chain. Formulas are obtained for calculating the characteristics of the system - the probability of loss of primary and repeated calls, the average number of busy channels and the average number of repeated calls in orbit. The exact method is based on the application of the balance equation method for steady-state probabilities, and it is effective for moderate-dimensional models. An approximate method for studying large-dimensional models, which is based on the principles of state space merging of the multidimensional Markov chains, is developed as well. The proposed approaches also allow us to investigate models with a constant intensity of retrial calls (i.e., a model in which only the  $r$ -call at the head of the queue of repeated calls can generate a request) and with impatient  $r$ -calls in orbit. Moreover, in cases where the indicated above probabilities are constant values, it is possible to obtain explicit formulas for calculating the characteristics of models with infinite orbit size. The results of numerical experiments are demonstrated and their analysis is given.

Keywords: queuing system; delayed feedback; numerical analysis.

ALIYEVA Sevindj Hamzaga kizi (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Baku State University, Baku, Azerbaijan).  
E-mail: s@aliyeva.info

## REFERENCES

1. Takacs, L. (1963) A single-server queue with feedback. *Bell System Technical Journal*. 42. pp. 505–519. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1963.tb00510.x
2. Takacs, L. (1977) A queuing model with feedback. *Operations Research*. 11. pp. 345–354.
3. Nazarov, A.A., Moiseeva, S.P. & Morozova, A.S. (2008) Investigation systems of service with repeated handling. method of limit decomposition. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(5). pp. 88–92.
4. Moiseeva, S.P. & Zakhoro'naya, I.A. (2011) Mathematical Model of Parallel Retrial Queueing of Multiple Requests. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 47(6). pp. 51–58.
5. Wortman, M.A., Disney, R.L. & Kiessler, P.C. (1991) The M/GI/1 Bernoulli feedback queue with vacations. *Queueing Systems*. 9(4). pp. 353–363. DOI: 10.1007/BF01159222
6. D'Avignon, G.R. & Disney, R.L. (1977) Queues with instantaneous feedback. *Management Sciences*. 24(2). pp.168–180. DOI: 10.1287/mnsc.24.2.168
7. Berg, J.L. & Boxma, O.J. (1991) The M/G/1 queue with processor sharing and its relation to feedback queue. *Queueing Systems*. 9(4). pp. 365–402. DOI: 10.1007/BF01159223
8. Hunter, J.J. (1989) Sojourn time problems in feedback queue. *Queueing Systems*. 5(1–3). pp. 55–76. DOI: 10.1007/BF01149186
9. Dudin, A.N., Kazimirsky, A.V., Klimenok, V.I., Breuer, L. & Krieger, U. (2005) The queuing model MAP/PH/1/N with feedback operating in a Markovian random environment. *Austrian Journal of Statistics*. 34(2). pp. 101–110. DOI: 10.17713/ajs.v34i2.403
10. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A. & Kuliyeva, Kh.N. (2015) Calculation of the characteristics of multi-channel queuing system with pure losses and feedback. *Journal of Automation and Information Science*. 47(5). pp.19–29. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i5.20
11. Gemikonakli, O., Ever, E. & Kocyigit, A. (2009) Approximate solution for two stage open networks with Markov-modulated queues minimizing the state space explosion problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 223(1). pp. 519–533. DOI: 10.1016/j.cam.2008.02.009
12. Ever, E., Gemikonakli, O., Kocyigit, A. & Gemikonakli, E. (2013) A hybrid approach to minimize state explosion problem for the solution of two stage tandem queues. *Journal of Network and Computer Applications*. 36. pp. 908–926. DOI: 10.1016/j.jnca.2012.10.006
13. Kirsal, Y., Ever, E., Kocyigit, A., Gemikonakli, O. & Mapp, G. (2014) A generic analytical modeling approach for performance evaluation of the handover schemes in heterogeneous environments. *Wireless Personal Communications*. 79. pp. 1247–1276. DOI: 10.1007/s11277-014-1929-2
14. Kirsal, Y., Ever, E., Kocyigit, A., Gemikonakli, O. & Mapp, G. (2015) Modeling and analysis of vertical handover in highly mobile environments. *Journal of Supercomputing*. 71. pp. 4352–4380. DOI: 10.1007/s11227-015-1528-3

15. Ayyapan, G., Subramanian, A.M.G. & Sekar, G (2010) M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under non-pre-emptive priority service by matrix geometric method. *Applied Mathematical Sciences*. 4. pp. 2379–2389. DOI: 10.5120/672-945
16. Ayyapan, G., Subramanian, A.M.G. & Sekar, G (2010) M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under pre-emptive priority service. *International Journal of Computer Applications*. 2. pp. 27–34. DOI: 10.5120/672-945
17. Bouchentouf, A.A. & Belarbi, F. (2013) Performance evaluation of two markovian retrial queuing model with balking and feedback. *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica*. 5. pp 132–146. DOI: 10.2478/ausm-2014-0009
18. Choi, B.D., Kim, Y.C. & Lee, Y.W. (1998) The M/M/c retrial queue with geometric loss and feedback. *Computers and Mathematics with Applications*. 36. pp. 41–52. DOI: 10.1016/S0898-1221(98)00160-6
19. Krishna, K.B., Rukmani, R. & Thangaraj, V. (2009) On multi-server feedback retrial queue with finite buffer. *Applied Mathematical Modeling*. 33. pp. 2062–2083. DOI: 10.1016/j.apm.2008.05.011
20. Do, T.V (2010) An efficient computation algorithm for a multi-server feedback retrial queue with a large queuing capacity. *Applied Mathematical Modeling*. 34. pp. 2272–2278. DOI: 10.1016/j.apm.2009.10.025
21. Mokaddis, G.S., Metwally, S.A. & Zaki, B.M. (2007) A feedback retrial queuing system with starting failures and single vacation. *Tamkang Journal of Science and Engineering*. 10. pp. 183–192.
22. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A. & Kuliyeva, Kh.N. (2015) Numerical analysis of the queuing system with feedback. *Cybernetics and System Analysis*. 51(2). pp. 566–573. DOI: 10.1007/s10559-015-9747-4