

УДК 539.3

DOI: 10.17223/19988605/51/7

Б.А. Худаяров, О.Р. Кучаров**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРАЦИИ ТРУБОПРОВОДА
НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ БАЛКИ ТИМОШЕНКО**

Численно исследован колебательный процесс вязкоупругого трубопровода, лежащего на упругом основании, описываемом моделью Винклера. На основе теории балки Тимошенко разработана математическая модель вибрации вязкоупругого трубопровода, транспортирующего жидкость. Для описания процессов деформирования вязкоупругих материалов использована интегральная модель Больцмана–Вольтерра. Решение интегродифференциальных уравнений определяется численным методом, основанным на исключении особенности в ядре релаксации интегрального оператора.

Ключевые слова: математическая модель; вычислительный алгоритм; вязкоупругость; трубопровод; теория Тимошенко.

В настоящее время нефть, газ и нефтепродукты являются основой топливно-энергетического комплекса, а трубопроводы имеют большое значение для его эффективного функционирования. Трубопроводы для транспортировки различных жидкостей – один из основных факторов экономического развития энергетических отраслей многих стран мира. Безопасная эксплуатация трубопроводов – это ключ к бесперебойному обеспечению энергоресурсами и нормальной работе всех отраслей промышленности.

Сильная вибрация трубопровода подвергает его конструкцию усталостному повреждению, вызывая ослабление и разрыв соединительных частей. Чрезмерная вибрация может повлиять на эффективность транспортировки нефтепродуктов и даже привести к серьезным авариям, что влечет значительные экономические потери, а также риск загрязнения окружающей среды.

Анализ изгибных вибрационных свойств трубопровода, содержащего проточную жидкость, имеет большое практическое значение при проектировании трубопроводов. Действительно, скорость потока жидкости внутри трубы оказывает существенное влияние на ее динамические свойства.

В работе [1] представлен метод конечных элементов для нелинейного анализа колебаний труб Тимошенко, транспортирующих жидкость. В ней обсуждены предельный цикл и связанная с ним амплитуда вибрации для проблемы вибрации, вызванной потоком. Проведен анализ для оценки влияния скорости потока и соотношения масс жидкости / трубы на амплитуду колебаний предельного цикла. Динамика и устойчивость коротких труб, транспортирующих жидкость, рассмотрена с помощью теории балки Тимошенко для трубы [2]. Численные результаты сравнены с экспериментальными данными. Показано, что уточненная теория балки Тимошенко необходима для адекватного описания динамического поведения чрезвычайно коротких трубок.

Тенденция развития исследований динамики трубопроводов идет по пути усложнения математических моделей, описывающих колебательные процессы трубопроводов с протекающей жидкостью. Математическому моделированию колебания упругих трубопроводов посвящено большое количество теоретических исследований [3–8]. Однако моделирование задач колебаний трубопроводов на базе теории балки Тимошенко с учетом вязкоупругих свойств материала конструкций рассматривается в сравнительно небольшом количестве работ. Последнее объясняется специфическими аналитическими трудностями исследования вязкоупругих трубопроводов типа стержня.

В работе [9] разработана математическая модель вязкоупругих труб, транспортирующих жидкость. При рассмотрении упругих систем внутреннее трение материала учитывается с помощью мо-

дели Кельвина–Фойгта. Безразмерное уравнение поперечного движения и связанные с ним классические и неклассические граничные условия получены с использованием вариационного подхода.

Анализ устойчивости композитной тонкостенной консольной трубы, транспортирующей жидкость, рассматривается в работе [10]. Основные уравнения системы получены по принципу Гамильтона. С применением модели Галеркина выполняется анализ собственных значений, при этом анализируются критическая скорость жидкости и, следовательно, устойчивость системы.

В настоящее время задача колебательных процессов вязкоупругих трубопроводов, лежащих на грунтовом основании, представляет большой теоретический и прикладной интерес. На сегодняшний день разработано множество подходов для решения подобных задач, но ни один из них не способен адекватно отразить реальную картину взаимодействия между трубопроводом и подстилающим грунтом. В основном эти подходы описывают отдельные стадии процессов, происходящих в трубопроводе. Поэтому несомненный научный и практический интерес вызывает построение математических моделей, позволяющих исследовать динамические процессы вязкоупругих трубопроводов с жидкостью.

Из приведенного обзора можно сделать вывод, что разработка динамических моделей процессов колебаний трубопроводов из композиционных материалов с протекающей жидкостью, учитывающих основания Винклера, представляет собой достаточно сложную и актуальную исследовательскую задачу. В данной статье исследуется изгибная вибрация вязкоупругого трубопровода, транспортирующего жидкость и лежащего на упругом основании, что является обычной практической проблемой.

Целью данной работы является создание математической модели, численного алгоритма и компьютерной программы для решения линейных задач о колебаниях вязкоупругих трубопроводов на основе теории Тимошенко.

1. Постановка задачи

Рассмотрим вязкоупругий трубопровод длиной L , лежащий на упругом основании, описываемом моделью Винклера (рис. 1). По трубопроводу передается поток несжимаемой жидкости, имеющий осевую скорость V . Предполагается, что поперечные сечения остаются плоскими, но не перпендикулярными деформированной оси трубы.

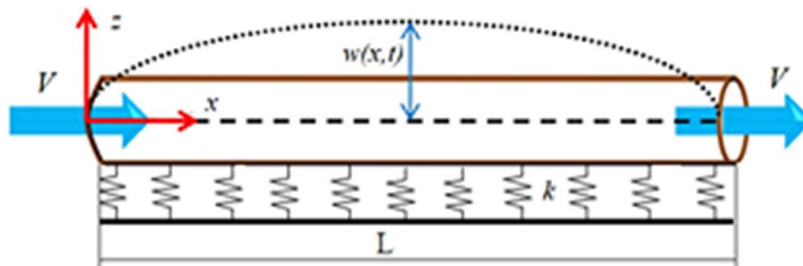


Рис. 1. Геометрия трубопровода

Fig. 1. The geometry of the pipeline

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось x проходила через центры тяжести сечений трубы, а начало оси совместим с левым концом трубы. Перемещения точек оси трубопровода по оси z представляют неизвестную функцию прогибов $w(x, t)$. Перемещения произвольной точки нормали с координатой (до деформации) z по теории Тимошенко будут равны [11–13]

$$u^{\bar{z}}(x, z, t) = u(x, t) + z\psi(x, t), \quad w^{\bar{z}}(x, z, t) = w(x, t).$$

Здесь $u(x, t)$ – перемещения в направлении оси x , $\psi(x, t)$ – угол поворота отрезка нормали к срединной поверхности (рис. 2); z – расстояние от точки поперечного сечения стержня до нейтральной оси.

Интегральную модель Больцмана–Вольтерра, которая характеризует закон зависимости напряжения σ от деформации ϵ в одномерном случае определяется из уравнения [14]

$$\sigma = E(1 - R^*)\epsilon = E \left\{ \epsilon - \int_0^t R(t - \tau)\epsilon(\tau) d\tau \right\}, \quad (1)$$

здесь E – модуль упругости материала; $R(t - \tau)$ – ядро релаксации; t – время наблюдения; τ – время, предшествующее моменту наблюдения.

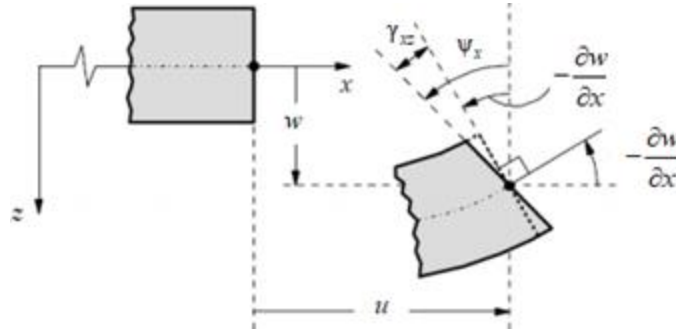


Рис. 2. Деформация элемента балки по гипотезе типа Тимошенко
Fig. 2. Deformation of the beam by the Timoshenko type hypothesis

Геометрическую зависимость зададим уравнением [12]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \psi. \quad (2)$$

Усилие, изгибающий момент и сдвигающие усилие

$$N_{xx} = \int_{A_p} \sigma_{xx} dA, \quad M_{xx} = \int_{A_p} z \sigma_{xx} dA, \quad Q_x = K_s \int_{A_p} \sigma_{xz} dA, \quad (3)$$

где K_s – поправочный коэффициент на сдвиг; A_p – площадь поперечного сечения трубы.

Подставляя (1) и (2) в (3), получим

$$N_{xx} = E_p A_p (1 - R^*) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad M_{xx} = E_p I_p (1 - R^*) \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad Q_x = G_p A_p K_s (1 - R^*) \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right], \quad (4)$$

где $I_p = \int_{A_p} z^2 dA$; E_p – модуль упругости материала трубы; G_p – модуль сдвига.

Пользуясь принципом Гамильтона–Остроградского, после некоторых преобразований получим уравнения движения трубопровода, основанные на теории Тимошенко [11–13]. С учетом вязкоупругих свойств материала конструкции и наличия упругого основания они имеют вид:

$$(m_p + m_f) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E_p A_p (1 - R^*) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (5a)$$

$$(m_p + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2m_f V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + m_f V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w = G_p A_p K_s (1 - R^*) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (5b)$$

$$(\rho_p I_p + \rho_f I_f) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = E_p I_p (1 - R^*) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - G_p A_p K_s (1 - R^*) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right). \quad (5c)$$

Здесь m_p , m_f – соответственно масса трубы и жидкости, отнесенные к единице длины; $I_f = \int_{A_f} z^2 dA$;

A_f – площадь, ограничивающая объем потока жидкости; k_w – жесткость основания Винклера; ρ_f , ρ_p – плотности жидкости и материала трубы соответственно.

Очевидно, что уравнение (5a) может полностью отсоединиться от (5b) и (5c), поэтому осевая деформация рассматривается независимо от проблемы поперечной деформации. Поперечная деформация трубопровода будет рассмотрена в этой работе.

$$(m_p + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2m_f V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + m_f V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w = G_p A_p K_s (1 - R^*) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (6)$$

$$(\rho_p I_p + \rho_f I_f) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = E_p I_p (1 - R^*) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - G_p A_p K_s (1 - R^*) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right).$$

2. Метод решения

Приближенное решение системы уравнений движения (6) будем искать в виде:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N w_n(t) \theta_n(x), \quad \psi(x, t) = \sum_{n=1}^N \psi_n(t) \chi_n(x), \quad (7)$$

где $w_n(t)$, $\psi_n(t)$ – неизвестные функции времени. Координатные функции $\theta_n(x)$, $\chi_n(x)$ должны быть подобраны так, чтобы каждый член суммы (7) удовлетворял граничным условиям.

Граничные условия имеют вид:

$$u|_{x=0} = 0, v|_{x=0} = 0, w|_{x=0} = 0, M_{xx}|_{x=0} = 0, \quad (8)$$

В этом случае в разложении метода Бубнова–Галеркина (7) аппроксимирующее координатные функции выбираем в виде:

$$\theta_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}; \quad \chi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Подставляя (7) в систему (5) и применяя метод Бубнова–Галеркина, получим систему интегродифференциальных уравнений (ИДУ). Введя в ИДУ следующие безразмерные величины:

$$x \leftrightarrow \frac{x}{L}, \quad w \leftrightarrow \frac{w}{L}, \quad V \leftrightarrow VL \sqrt{\frac{m_p}{EI_p}}, \quad t \leftrightarrow \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{E_p I_p}{m_p + m_f}}, \quad (9)$$

и сохраняя при этом прежние обозначения, запишем

$$\begin{aligned} \ddot{w}_k + 2V \sqrt{m_{fp} \beta_{fp}} \sum_{n=1}^N \gamma_{nk} \dot{w}_n + \frac{G_p}{E_p} \gamma_1 K_s k^2 \pi^2 (1 - R^*) w_k - \frac{G_p}{E_p} \frac{\gamma_1 K_s}{2} \sum_{n=1}^N (1 - R^*) \gamma_{nk} \psi_n - m_{fp} V^2 k^2 \pi^2 w_k + k_w w_k &= 0, \\ \ddot{\psi}_k + (1 - R^*) \frac{k^2 \pi^2}{\rho_{fp}} \psi_k + \gamma_1 \frac{G_p}{E_p} \frac{K_s}{\rho_{fp}} (1 - R^*) \left(\sum_{n=1}^N \gamma_{nk} w_n + \psi_k \right) &= 0, \\ w_k(0) = w_{0k}; \quad \dot{w}_k(0) = \dot{w}_{0k}; \quad \psi_k(0) = \psi_{0k}; \quad \dot{\psi}_k(0) = \dot{\psi}_{0k}; \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\beta_{fp} = \frac{m_f}{m_p + m_f}$, $m_{fp} = \frac{m_f}{m_p}$, $\rho_{fp} = \frac{\rho_p I_p + \rho_f I_f}{(m_p + m_f) L^2}$, $\gamma_1 = \frac{A_p L^2}{I_p}$, γ_{nk} – безразмерные коэффициен-

ты, связанные с координатными функциями и их производными; точки над переменной означают взятие производной по времени соответствующего порядка.

Интегрирование системы (10) проводилось численным методом, основанном на использовании квадратурных формул [15–18]. На основе этого метода описан алгоритм численного решения системы (10).

Проинтегрировав полученную систему (10) два раза по t и заменив интегралы квадратурными формулами трапеций, полагая $t = t_i$, $t_i = i \Delta t$, $i = 1, 2, \dots$ (Δt – шаг интегрирования), для вычисления $u_{in} = u_{in}(t_i)$, $\phi_{in} = \phi_{in}(t_i)$, $w_{in} = w_{in}(t_i)$, получим следующие формулы при ядре Колтунова–Ржаницына ($R(t) = A t^{\alpha-1} e^{-\beta t}$, $A > 0$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned} w_{pk} + 2V \sqrt{m_{fp} \beta_{fp}} \sum_{n=1}^N B_p \gamma_{nk} w_{pn} = w_{0p} + \dot{w}_{0p} t_p - \sum_{r=0}^{p-1} B_r \left\{ 2V \sqrt{m_{fp} \beta_{fp}} \sum_{n=1}^N \gamma_{nk} w_{rn} - m_{fp} V^2 k^2 \pi^2 w_{rk} + k_w w_{rk} + \right. \\ \left. + \frac{G_p}{E_p} \gamma_1 K_s k^2 \pi^2 \left(w_{rk} - \frac{A}{2} \sum_{s=0}^r C_s e^{-\beta t_s} w_{r-s,k} \right) - \frac{G_p}{E_p} \frac{\gamma_1 K_s}{2} \sum_{n=1}^N \gamma_{nk} \left(\psi_{r,n} - \frac{A}{2} \sum_{s=0}^r C_s e^{-\beta t_s} \psi_{r-s,n} \right) \right\}, \\ \psi_{pk} = \psi_{0p} + t_p \dot{\psi}_{0p} - \sum_{r=0}^{p-1} B_r (t_p - t_r) \left\{ \frac{k^2 \pi^2}{\rho_{fp}} \left(\psi_{rk} - \frac{A}{2} \sum_{s=0}^r C_s e^{-\beta t_s} \psi_{r-s,k} \right) + \right. \\ \left. + \gamma_1 \frac{G_p}{E_p} \frac{K_s}{\rho_{fp}} \left[\left(\phi_{rk} - \frac{A}{2} \sum_{s=0}^r C_s e^{-\beta t_s} \psi_{r-s,k} \right) + \sum_{n=1}^N \gamma_{nk} \left(w_{rn} - \frac{A}{2} \sum_{s=0}^r C_s e^{-\beta t_s} w_{r-s,n} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$p = 1, 2, 3, \dots; k = 1, 2, \dots, N$.

Здесь B_r, C_s – коэффициенты квадратурной формулы трапеций [19–20].

Результаты вычислений отражаются графиками, приведенными на рис. 3–4.

3. Обсуждение результатов

Исследовано влияние свойств материала на колебания для вязкоупругих трубопроводов, лежащих на упругом основании, при скорости потока выше критической. На рис. 3 представлена зависимость перемещений w от времени срединной точки упругого ($A = 0$; см. рис. 3, *a*) и вязкоупругих трубопроводов ($A = 0,005$; см. рис. 3, *b*; $A = 0,05$; см. рис. 3, *c*; $A = 0,1$; см. рис. 3, *d*). Из графиков видно, что решение упругих и вязкоупругих задач существенно отличается. В упругом случае происходят периодические колебания, и амплитуда колебаний уже с момента $t = 10,5$ резко возрастает. Подобные вибрации являются нежелательными, так как приводят к зарождению и развитию усталостных трещин. С поступательным увеличением параметра вязкости в начальный период времени происходит затухание с дальнейшим переходом периодических колебаний, однако этот процесс недолго по времени, и процесс периодических вибраций заменятся нежелательными вибрациями. Из графиков видно, что критическое время, за которое возникают колебания с быстро возрастающими амплитудами, зависит от параметра вязкости. Чем больше значение параметра вязкости, тем раньше начинается нежелательный процесс колебаний. При расчете были использованы следующие значения геометрических и физических параметров: $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$; $\gamma_1 = 410$; $m_{fp} = 0,01$; $k_w = 100$; $k_s = 0,35$; $\rho_{fp} = 0,05$; $\beta_{fp} = 0,005$; $V = 2$.

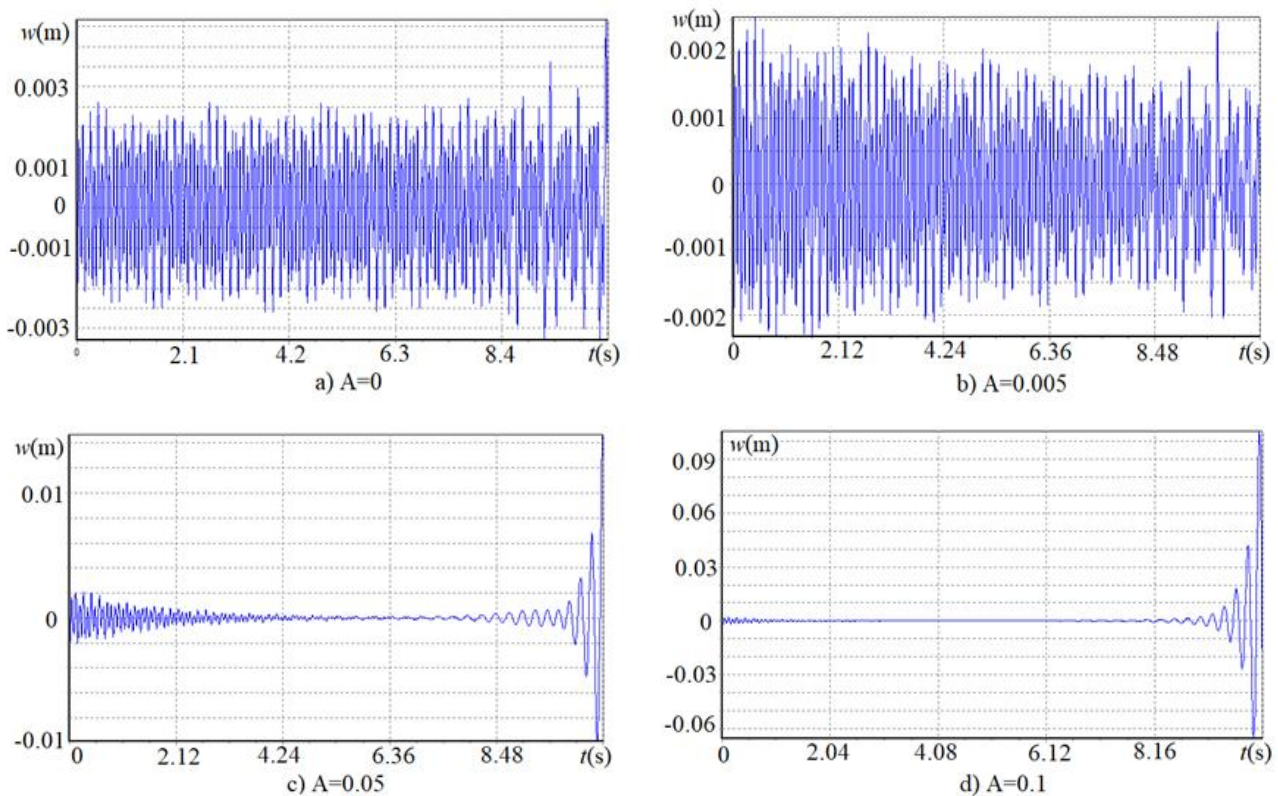


Рис. 3. Зависимости прогиба трубопровода от времени t для различных значений параметра вязкости:

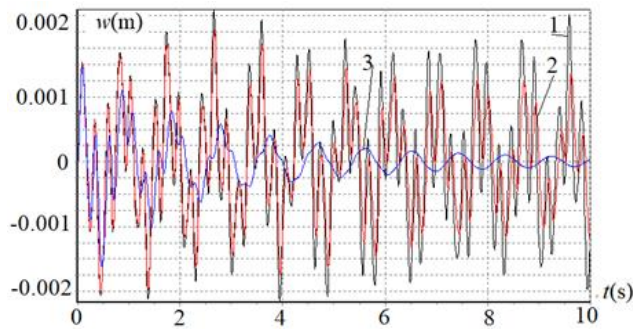
$A = 0$ (*a*); $A = 0,005$ (*b*); $A = 0,05$ (*c*); $A = 0,1$ (*d*)

Fig. 3. Displacement-time dependences at $A = 0$ (*a*); $A = 0,005$ (*b*); $A = 0,05$ (*c*); $A = 0,1$ (*d*)

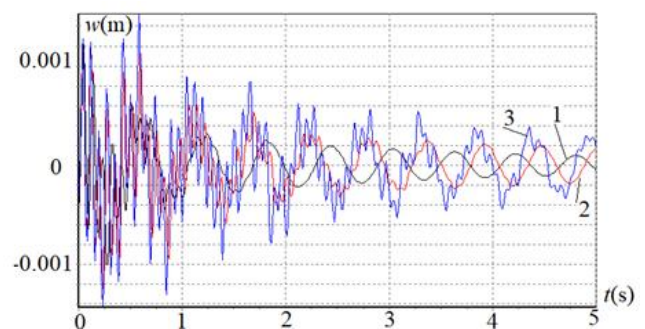
Таким образом, на основании полученных результатов (см. рис. 3 *b, c, d*) можно заключить, что учет вязкоупругого свойства материала трубопровода приводит к снижению значения критической скорости жидкости и вызывает при $V > V_{cr}$ увеличение частоты колебаний, имеющих быстро возрастающую амплитуду.

На рис. 4, *a* приведены зависимости прогиба w от времени t для различных значений параметра вязкости A при скорости потока меньше критической. Из этого рисунка также видно, что с увеличением параметра A амплитуда и частота колебаний трубопровода уменьшается.

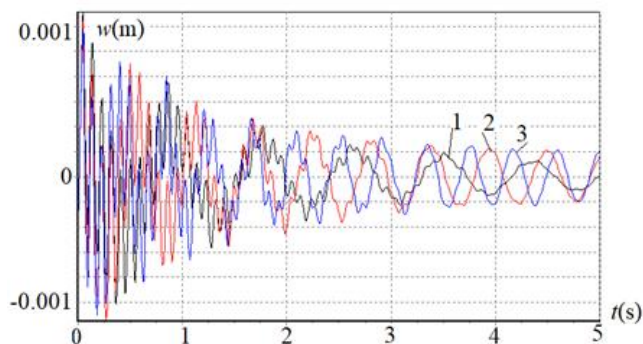
На рис. 4, *b* приведены зависимости прогиба w от времени t для вязкоупругого трубопровода при различных параметрах сингулярности α : 0,1 (кривая 1); 0,25 (кривая 2); 0,5 (кривая 3). Влияние параметра сингулярности α в этом случае достаточно заметно и состоит в увеличении амплитуды и частоты колебаний. Следовательно, учет этого влияния при проектировании тонкостенных конструкций имеет важное значение, так как чем меньше параметр сингулярности материала конструкции, тем интенсивнее протекают диссипативные процессы в этих конструкциях.



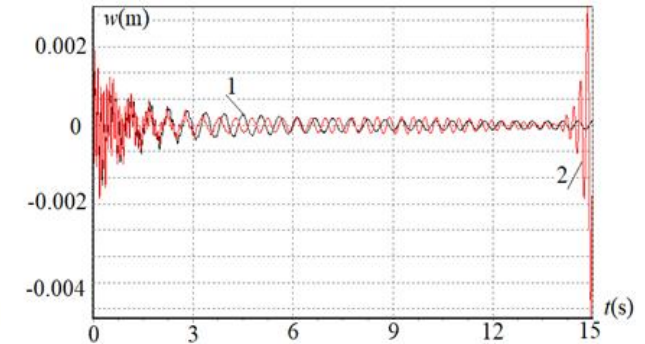
a) $A = 0$ (1); $A = 0,01$ (2); $A = 0,1$ (3);
 $k_s = 0,35$; $\rho_{fp} = 0,05$; $\beta_{fp} = 0,005$; $V = 2$



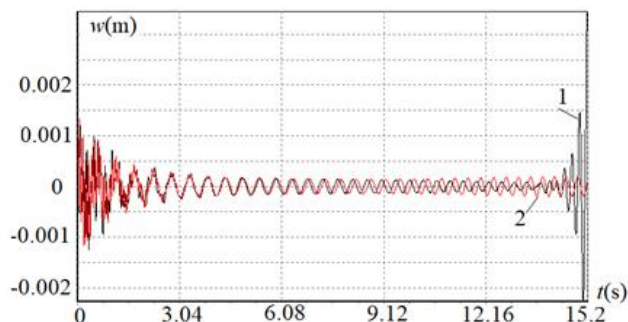
b) $\alpha = 0,1$ (1); $\alpha = 0,25$ (2); $\alpha = 0,5$ (3); $A = 0,1$; $\beta = 0,05$;
 $\gamma_1 = 400$; $m_{fp} = 0,01$; $k_s = 0,35$; $\rho_{fp} = 0,05$; $\beta_{fp} = 0,005$; $V = 2$



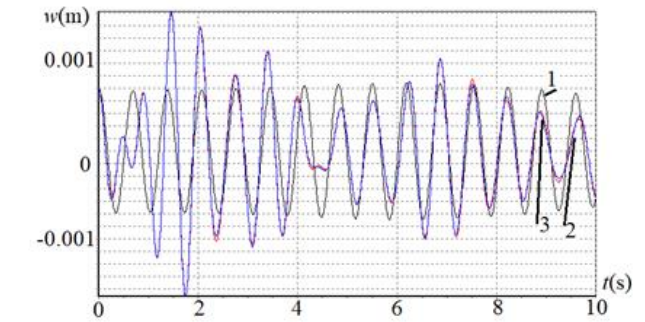
c) $k_w = 0$ (1); $k_w = 100$ (2); $k_w = 250$ (3); $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$;
 $\beta = 0,05$; $\gamma_1 = 300$; $m_{fp} = 0,1$; $k_s = 0,35$; $\beta_{fp} = 0,005$; $V = 0,4$



d) $\beta_{fp} = 0,001$ (1); $\beta_{fp} = 0,007$ (2); $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$;
 $\gamma_1 = 300$; $m_{fp} = 0,01$; $\rho_{fp} = 0,05$; $\beta_{fp} = 0,005$; $V = 1$



e) $\gamma_1 = 200$ (1); $\gamma_1 = 300$ (2); $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$;
 $m_{fp} = 0,1$; $k_w = 100$; $k_s = 0,35$; $\rho_{fp} = 0,05$; $\beta_{fp} = 0,005$; $V = 0,8$



f) $N = 2$ (1); $N = 5$ (2); $N = 6$ (3); $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$;
 $m_{fp} = 0,1$; $\gamma_1 = 20$; $k_w = 80$; $\rho_{fp} = 0,001$; $\beta_{fp} = 0,001$; $V = 0,02$

Рис. 4. Зависимости прогиба трубопровода от времени t для различных совокупностей значений параметров модели

Fig. 4. Displacement-time dependences for different sets of model parameter values

Влияние параметра оснований Винклера k_w на колебательный процесс показано на рис. 4, *c*. При неучете оснований ($k_w=0$) амплитуда колебаний медленно затухает. При наличии оснований и увеличении значения параметра k_w это приводит к увеличению частоты колебаний. В качестве исход-

ных данных при вычислениях были приняты следующие: $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$; $\gamma_1 = 300$; $m_{fp} = 0,1$; $k_s = 0,35$; $\rho_{fp} = 0,05$; $\beta_{fp} = 0,005$; $V = 0,4$.

На рис. 4, *d* показано влияние параметра β_{fp} на колебательный процесс трубопровода. При $\beta_{fp} = 0,001$ амплитуда колебаний со временем затухает (кривая 1). Увеличение значения параметра β_{fp} до 0,007 приводит резкому изменению колебаний. С ростом параметра β_{fp} уменьшаются масса трубы и, соответственно, ее относительная жесткость. Амплитуда колебаний уже с момента $t > 14$ резко возрастает. Подобные вибрации являются нежелательными, так как приводят к зарождению и развитию усталостных трещин.

На рис. 4, *e* приводятся графики движения трубопровода по времени. Номера кривых на графиках соответствуют следующим значениям параметра γ_1 : 200 (кривая 1); 300 (кривая 2). Приведенные результаты свидетельствуют о том, что для второго значения параметра γ_1 имеет место периодический характер. Для значения параметра $\gamma_1 = 200$ даже при малых прогибах движение трубопровода носит нерегулярный характер. Особенно с момента $t > 14,5$, когда трубопровод испытывает высокочастотные колебания с большой амплитудой, быстро возрастающими с течением времени.

Изучена сходимость метода Бубнова–Галеркина (рис. 4, *f*). Приведенные здесь результаты показывают, что при вычислениях значений критических скоростей потока в (11) необходимо удерживать по крайней мере пять первых гармоник ($N = 5$). Расчеты показали, что дальнейшее увеличение количества членов не оказывает существенного влияния на амплитуду колебаний вязкоупругой трубы. Все приведенные результаты получены с учетом пяти членов ряда (пяти первых гармоник).

Заключение

В работе исследован колебательный процесс вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих жидкость. Разработана математическая модель линейной вибрации вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих жидкость, на основе теории Тимошенко. Разработан вычислительный алгоритм, основанный на исключении особенностей интегро-дифференциальных уравнений со слабосингулярными ядрами. На основе разработанного вычислительного алгоритма создана прикладная компьютерная программа, которая позволяет проводить численные исследования вибрации трубопровода. При моделировании линейных задач исследован ряд новых динамических эффектов:

- установлено, что учет вязкоупругих свойств материала трубопровода приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний;
- показано, что увеличение параметра оснований приводит к увеличению частоты колебаний трубопровода;
- выявлено, что уменьшение массы трубы к единице ее длины приводит к увеличению амплитуды и частоты колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yih-Hwang Lin, Yau-Kun Tsai. Nonlinear vibrations of Timoshenko pipes conveying fluid // International Journal of Solids and Structures. 1997. V. 34, No 23. P. 2945–2956.
2. Païdoussis M.P., Luu T.P., Laithier B.E. Dynamics of finite-length tubular beams conveying fluid // Journal of Sound and Vibration. 1986. V. 106, No. 2. P. 311–331.
3. Xia Tan, Xiao-Ye Mao, Hu Ding, Li-Qun Chen. Vibration around non-trivial equilibrium of a supercritical Timoshenko pipe conveying fluid // Journal of Sound and Vibration. 2018. No. 428. P. 104–118.
4. Jijun Gu, Tianqi Ma, Menglan Duan. Effect of aspect ratio on the dynamic response of a fluid-conveying pipe using the Timoshenko beam model // Ocean Engineering. 2016. No. 114. P. 185–191. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2016.01.021
5. Yih Hwang Lin, Chih Liang Chu. Active modal control of Timoshenko pipes conveying fluid // Journal of the Chinese Institute of Engineers. 2001. V. 24 (1). P. 65–74. DOI: 10.1080/02533839.2001.9670607
6. Sällström J.H., Kesson B. Fluid-conveying damped Rayleigh–Timoshenko beams in transverse vibration analyzed by use of an exact finite element. Part I: Theory // Journal of Fluids and Structures. 1990. No. 4 (6). P. 561–572.
7. Tkachenko O. Construction of Mathematical Model of Complex Pipeline with Variable Geometry // Underground urbanization as a Prerequisite for Sustainable Development : 15th International scientific conference // Proc. Engineering. 2016. V. 165. P. 1261–1274.

8. Zhi-Yuan Liu, Lin Wang, Xi-Ping Sun. Nonlinear Forced Vibration of Cantilevered Pipes Conveying Fluid // *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2018. V. 31, No. 1. P. 32–50.
9. Nematollahi M.S., Mohammadi H., Taghvaei S. Fluttering and divergence instability of functionally graded viscoelastic nanotubes conveying fluid based on nonlocal strain gradient theory // *Chaos: an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. V. 29, No. 3. DOI: 10.1063/1.5057738
10. Bahaadini R., Dashtbayazi M.R., Hosseini M., Khalili-Parizi Z. Stability analysis of composite thin-walled pipes conveying fluid // *Ocean Engineering*. 2018. V. 160. P. 311–323.
11. Reddy J.N., Wang C.M. Dynamics of Fluid-Conveying Beams: Governing Equations and Finite Element Models : CORE Report No. 2004-03. Centre for Offshore Research and Engineering (CORE), The National University of Singapore, 2004. 22 p.
12. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. : Наука, 1972.
13. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Saltykova O.A., Krysko V.A. Chaotic vibrations in flexible multi-layered Bernoulli–Euler and Timoshenko type beams // *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2008. V. 5. P. 319–363.
14. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация : учеб. пособие для втузов. М. : Высшая школа, 1976. 277 с.
15. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости : справ. пособие. Ташкент : Мехнат, 1987. 269 с.
16. Badalov F.B., Eshmatov Kh., Yusupov M. One Method of Solution of System of Integro-differential Problems of Viscoelasticity // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1987. V. 51. P. 867–871.
17. Badalov F.B., Abduraimov A., Khudayarov B.A. Effect of the Hereditary Kernel on the Solution of Linear and Nonlinear Dynamic Problems of Hereditary Deformable Systems // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2007. No. 36. P. 328–335.
18. Badalov F.B., Abduraimov A., Khudayarov B.A. Numerical Investigation of the Influence of Rheological Parameters on the Character of Vibrations in Heredity-deformable Systems // *Computational technologies*. 2007. No. 12. P. 17–26.
19. Khudayarov B.A., Turaev F.Zh. Mathematical Simulation of Nonlinear Oscillations of Viscoelastic Pipelines Conveying Fluid // *Applied Mathematical Modelling*. 2019. V. 66. P. 662–679.
20. Khudayarov B.A., Turaev F.Zh. Nonlinear supersonic flutter for the viscoelastic orthotropic cylindrical shells in supersonic flow // *Aerospace Science and Technology*. 2019. Vol. 84. P. 120–130.

Поступила в редакцию 11 мая 2019 г.

Khudayarov B.A., Kucharov O.R. (2020) MODELING OF VIBRATION OF A PIPELINE ON THE THEORY OF TIMOSHENKO. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 51. pp. 63–71

DOI: 10.17223/19988605/51/7

In this paper the oscillatory process of a viscoelastic pipeline is investigated numerically according to the theory of Timoshenko lying on an elastic foundation, described by the Winkler model. To describe the deformation processes of viscoelastic materials, the Boltzmann-Volterra integral model with weakly singular nuclei was used:

$$\sigma = E(1 - R^*)\varepsilon = E \left\{ \varepsilon - \int_0^t R(t - \tau)\varepsilon(\tau)d\tau \right\},$$

here E is the modulus of elasticity of the material; $R(t - \tau)$ is the relaxation kernel; t is the observation time; τ is the time preceding the moment of observation.

A mathematical model of pipelines conveying fluid flow has been developed with account for viscosity properties of structure material and the base of the pipeline:

$$(m_p + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2m_f V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + m_f V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w = G_p A_p K_s (1 - R^*) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right),$$

$$(\rho_p I_p + \rho_f I_f) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = E_p I_p (1 - R^*) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - G_p A_p K_s (1 - R^*) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right).$$

Here m_p, m_f are the masses of the pipe and fluid, respectively, referred to the unit of length; $I_f = \int_{A_f} z^2 dA$; A_f is the area limiting the volume of fluid flow; ρ_f, ρ_p are the densities of the fluid and the pipe material, respectively.

When modeling problems, a number of new dynamic effects were investigated: it was found that an account of viscoelastic properties of the pipeline material led to a decrease in the amplitude and frequency of vibrations; it was shown that an increase in the base parameter led to an increase in the vibration frequency of the pipeline; it was found that a decrease in the pipe mass per unit length led to an increase in the amplitude and frequency of vibrations.

Keywords: mathematical model; viscoelasticity; pipeline; computational algorithm; Timoshenko theory.

KHUDAYAROV Bakhtiyar Alimovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan).

E-mail: bakht-flpo@yandex.ru

KUCHAROV Olimzhon Ruzimurotovich (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies, Tashkent, Uzbekistan).

E-mail: k.r.olimjon@mail.ru

REFERENCES

1. Yih-Hwang Lin & Yau-Kun Tsai. (1997) Nonlinear vibrations of Timoshenko pipes conveying fluid. *International Journal of Solids and Structures*. 34(23). pp. 2945–2956. DOI: 10.1016/S0020-7683(96)00217-X
2. Païdoussis, M.P., Luu, T.P. & Laithier, B.E. (1986) Dynamics of finite-length tubular beams conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*. 106(2). pp. 311–331. DOI: 10.1016/0022-460X(86)90321-4
3. Xia Tan, Xiao-Ye Mao, Hu Ding & Li-Qun Chen. (2018) Vibration around non-trivial equilibrium of a supercritical Timoshenko pipe conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*. 428. pp. 104–118. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.04.041
4. Jijun Gu, Tianqi Ma & Menglan Duan. (2018) Effect of aspect ratio on the dynamic response of a fluid-conveying pipe using the Timoshenko beam model. *Ocean Engineering*. 114. pp. 185–191. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2016.01.021
5. Yih Hwang Lin & Chih Liang Chu. (2001) Active modal control of Timoshenko pipes conveying fluid. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*. 24(1). pp. 65–74. DOI: 10.1080/02533839.2001.9670607
6. Sällström, J.H. & Kesson, B. (1990) Fluid-conveying damped Rayleigh-Timoshenko beams in transverse vibration analyzed by use of an exact finite element part I: Theory. *Journal of Fluids and Structures*. 4(6). pp. 561–572. DOI: 10.1016/0889-9746(90)90202-G
7. Tkachenko, O. (2016) Construction of Mathematical Model of Complex Pipeline with Variable Geometry. *Procedia Engineering*. 165. pp. 1261–1274. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.11.849
8. Zhi-Yuan Liu, Lin Wang & Xi-Ping Sun. (2018) Nonlinear Forced Vibration of Cantilevered Pipes Conveying Fluid. *Acta Mechanica Sinica*. 31(1). pp. 32–50. DOI: 10.1007/s10338-018-0011-0
9. Nematollahi, M.S., Mohammadi, H. & Taghvaei, S. (2019) Fluttering and divergence instability of functionally graded viscoelastic nanotubes conveying fluid based on nonlocal strain gradient theory. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 29(3). DOI: 10.1063/1.5057738
10. Bahaadini, R., Dashtbayazi, M.R., Hosseini, M. & Khalili-Parizi, Z. (2018) Stability analysis of composite thin-walled pipes conveying fluid. *Ocean Engineering*. 160. pp. 311–323. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2018.04.061
11. Reddy, J.N. & Wang, C.M. (2004) *Dynamics of Fluid-Conveying Beam: Governing Equations and Finite Element Models*. Singapore: Centre for Offshore Research and Engineering (CORE), The National University of Singapore.
12. Volmir, A.S. (1972) *Nelineynaya dinamika platinok i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka.
13. Awrejcewicz, J., Krysko, A.V., Zhigalov, M.V., Saltykova, O.A. & Krysko, V.A. (2008) Chaotic vibrations in flexible multi-layered Bernoulli-Euler and Timoshenko type beams. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 5. pp. 319–363.
14. Koltunov, M.A. (1976) *Polzuchest' i relaksatsiya* [Creeping and relaxation]. Moscow: Vysshaya shkola.
15. Badalov, F.B. (1987) *Metody resheniya integral'nykh i integro-differentsial'nykh uravneniy nasledstvennoy teorii vyazkouprugosti* [Methods for Solving Integral and Integro-differential Equations of the Hereditary Theory of Viscoelasticity]. Tashkent: Mekhnat.
16. Badalov, F.B., Eshmatov, Kh. & Yusupov, M. (1987) One Method of Solution of System of Integro – differential Problems of Viscoelasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 51(1). pp. 867–871.
17. Badalov, F.B., Abduraimov, A. & Khudayarov, B.A. (2007) Effect of the Hereditary Kernel on the Solution of Linear and Nonlinear Dynamic Problems of Hereditary Deformable Systems. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 36. pp. 328–335. DOI: 10.3103/S1052618807040048
18. Badalov, F.B., Abduraimov, A. & Khudayarov, B.A. (2007) Numerical Investigation of the Influence of Rheological Parameters on the Character of Vibrations in Hereditary-deformable Systems. *Computational Technologies*. 12. pp. 17–26.
19. Khudayarov, B.A. & Turaev, F.Zh. (2019) Mathematical Simulation of Nonlinear Oscillations of Viscoelastic Pipelines Conveying Fluid. *Applied Mathematical Modelling*. 66. pp. 662–679. DOI: 10.1016/j.apm.2018.10.008
20. Khudayarov, B.A. & Turaev, F.Zh. (2019) Nonlinear supersonic flutter for the viscoelastic orthotropic cylindrical shells in supersonic flow. *Aerospace Science and Technology*. 84. pp. 120–130. DOI: 10.1016/j.ast.2018.08.044