МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.6 MSC 35M10, 35M12
DOI 10.17223/19988621/65/1

А.А. Абдуллаев, Т.Г. Эргашев

ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ – ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Изучается задача Пуанкаре – Трикоми для вырождающегося эллиптико-гиперболического уравнения второго рода. Единственность решения поставленной задачи установлена с помощью метода интегралов энергии. В гиперболической и эллиптической частях смешанной области ищутся обобщенное и классическое решения соответствующих вспомогательных задач и выводятся функциональные соотношения между следами искомой функции и ее производной на линии вырождения. Исключив из этих двух функциональных соотношений одну из двух неизвестных функций, процесс решения поставленной задачи эквивалентным образом сводится к решению сингулярного интегрального уравнения относительно предельного значения искомой функции на линии изменения типа уравнения. При определенных ограничениях на заданные функции и параметры задачи Пуанкаре – Трикоми это сингулярное интегральное уравнение методом Карлемана удаётся привести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из альтернативы Фредгольма и теоремы единственности поставленной задачи.

Ключевые слова: *обобщенное решение, задача Пуанкаре – Трикоми, уравнение второго рода, интегральное уравнение, метод интегралов энергии, функция Грина.*

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \mu|y|^m u = 0 \quad (-1 < m < 0,\ -\infty < \mu < +\infty) \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^-$, где D^+ – область, ограниченная кривой σ при $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком $AB(y=0)$, а D^- – область, ограниченная отрезком AB и характеристиками

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0,\quad BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1).

Известно, что при исследовании краевых задач для уравнения (1) важную роль играют фундаментальные решения (в эллиптической части) и функция Римана (в гиперболической части) этого же уравнения.

При $y > 0$, т.е. в эллиптической части смешанной области с помощью известной замены переменных $x = x$, $y = \frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2}$ уравнение (1) переходит в уравнение Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом вида

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y} u_y + \lambda u = 0, \tag{2}$$

где β и λ – параметры, выражаемые через m и μ соответственно.

Фундаментальные решения уравнения (2) выписываются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию Горна H_3 (см., например, [1]). В недавней работе [2] найдены фундаментальные решения для более общего (многомерного) уравнения Гельмгольца с несколькими сингулярными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{n} \left(u_{x_i x_i} + \frac{2\alpha_i}{x_i} u_{x_i} \right) + \lambda u = 0, \tag{3}$$

где α_i и λ – действительные числа, причем $0 < 2\alpha_i < 1$, $i = 1, ..., n.$

Отметим, что для уравнения (3) в двумерном случае ($n = 2$) и при отсутствии спектрального параметра (λ=0) авторами [3–6] построена теория потенциала двойного слоя.

При $y < 0$, т.е. в гиперболической части смешанной области для уравнения (1) прямая параболического вырождения является особой характеристикой – огибающей обоих семейств характеристик. В зависимости от степени вырождения m предельные значения $\tau(x) \equiv u(x, -0)$, $\nu(x) \equiv u_y(x, -0)$ могут иметь особенности. Чтобы обеспечить необходимую гладкость решения $u(x, y)$ вне линии характеристического вырождения, необходимо требовать повышенную гладкость функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$. С целью ослабить это требование в [7] дано определение и изучены свойства так называемого класса R_2^{λ} обобщенных решений уравнения (1) в области D_2, который при λ=0 совпадает с классом R_2, введенным и изученным И.Л.Каролем [8]. Кроме того, на основе известной формулы классического решения задачи Коши для уравнения (1) в [7] получен явный и удобный для дальнейших исследований вид обобщенного решения этой же задачи в классе R_2^{λ} и исследованы обобщенные решения, для которых $\tau'(x)$, $\nu(x) \in C(a, b)$ вместо требуемого $C^2[a, b]$.

В работе [9] представлены исследования задачи Коши – Гурса и Гурса для уравнения (1) в классе обобщенных решений R_2^{λ} и приведен пример, показывающий важность введения понятия такого класса.

Известно, что с помощью замены переменных $x = x$, $y = \frac{1}{(m+2)^2} \operatorname{sgn} y \cdot |y|^{m+2}$ уравнение (1) можно представить в виде

$$u_{xx} + y u_{yy} + \left(\beta + \frac{1}{2} \right) u_y + \lambda u = 0$$

$$(-\frac{1}{2} < \beta < 0, \quad \lambda \text{ – комплексное число}). \tag{4}$$

В работе [10] в специальной области методом разделения переменных найдены собственные значения и построена система соответствующих собственных функций спектральной задачи Трикоми – Неймана для уравнения (4). К такому направлению исследований примыкает работа [11], в которой сформулированы краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром в области, состоящей из двух секторов круга и двух характеристических треугольников, доказана однозначная разрешимость поставленных задач.

При отсутствии спектрального параметра для уравнения (4) в [12] получены классические решения задачи Трикоми в ограниченной и неограниченной областях, а в [13] исследован класс R_2 обобщенных решений в конечной области гиперболичности при $2\beta<-1$ и $2\beta\neq-3,-5,...$. В работах [7, 14] авторам удалось построить специальные классы решений для уравнения (4) со спектральным параметром при $y<0$ и $\beta\in(-1/2,0)\cup(0,1/2)$.

В настоящей работе для уравнения смешанного типа второго рода

$$\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx}+u_{yy}=0 \quad (-1<m<0) \tag{5}$$

в области D исследуется краевая задача Пуанкаре – Трикоми.

При решении поставленной задачи в конечной области эллиптичности уравнения (5) важную роль играет одна вспомогательная задача, являющаяся естественным обобщением известных задач (задачи Дирихле [15] и смешанной задачи [16]), исследованных авторами лишь при положительных значениях m, т.е. для вырождающегося эллиптического уравнения первого рода. В работе [17] решение задачи Дирихле для многомерного сингулярного уравнения Гельмгольца в полусферической области найдено в явном виде.

Проведенный анализ состояния дел в этом направлении показывает, что несмотря на то, что в настоящее время известны фундаментальные решения для более общих сингулярных уравнений, краевые задачи с условием Пуанкаре – Трикоми для вырождающихся уравнений эллиптического и эллиптико-гиперболического типов второго рода изучены сравнительно мало. Отметим лишь работы [18, 19]. Монография [20] посвящена постановке и исследованию локальных и нелокальных краевых задач, в том числе, задаче Пуанкаре – Трикоми для уравнений смешанного типа с двумя линиями и различными порядками вырождения.

Прежде чем перейти к изложению основных результатов приведем некоторые известные факты из теории интегродифференциальных операторов дробного порядка и теории гипергеометрической функции Гаусса.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a,b). Интегралом дробного порядка $(-\alpha)$ $(\alpha<0)$ от функции $f(x)$ называется выражение вида

$$D_{ax}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^x(x-t)^{-(\alpha+1)}f(t)dt \quad (a\le x\le b)\,. \tag{6}$$

Функция $D_{ax}^{\alpha}f(x)$ существует для почти всех x и интегрируема; для $\alpha\le-1$ она непрерывна.

Если $\alpha>0$, $n<\alpha<n+1$ ($n-$ целое число), и существует $f^{(n+1)}(t)$, интегрируемая в (a,b), то производной порядка α от $f(x)$ называется выражение

$$D_{ax}^{\alpha}f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}+D_{ax}^{\alpha-(n+1)}f^{(n+1)}(x); \tag{7}$$

так как $\alpha-(n+1)<0$, то последнее слагаемое в (7) определяется из (6). Производная порядка α от $f(x)$ может быть записана еще в следующем виде:

$$D_{ax}^{\alpha} f(x)=\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} D_{ax}^{\alpha-(n+1)} f(x) \ (n<\alpha<n+1).$$

Это определение имеет смысл и для целых значений $\alpha=n$:

$$D_{ax}^{\alpha} f(x)=f^{(n)}(x).$$

Нетрудно видеть, что если $\alpha<0$ и $\beta<0$, то

$$D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{\beta} f(x)=D_{ax}^{\alpha+\beta} f(x).$$

Если

$$f(a)=f'(a)=...=f^{(n-1)}(a)=0, \tag{8}$$

то, применяя оператор $D_{ax}^{-\alpha}$ при $n<\alpha<n+1$ к функции $D_{ax}^{\alpha} f(x)$, определенной формулой (7), мы получим

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\alpha} f(x)=f(x).$$

Пусть $f(x)=D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x)$ при $n<\alpha<n+1$, тогда справедливо (8) и имеет место

$$D_{ax}^{\alpha} f(x)=D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x)=\varphi(x). \tag{9}$$

Гипергеометрическая функция Гаусса $F(a,b;c;z)$ определяется внутри круга $|z|<1$ как сумма гипергеометрического ряда [15]

$$F(a,b;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^m, \tag{10}$$

а при $|z|\geq 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда. В формуле (10) параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными, причем $c\neq 0,-1,...$. Здесь $(\kappa)_n$ обозначает символ Похгаммера:

$$(\kappa)_0=1,\ (\kappa)_n=\kappa(\kappa+1)\cdot...\cdot(\kappa+n-1),\ n=1,2,....$$

Если $\mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,b>0$, то имеет место формула Эйлера [16]

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt,\ \ |\arg(1-z)|<\pi. \tag{11}$$

Если a, b, $c-a$ или $c-b$ не являются неположительными целыми числами, то при $|z|<1$ справедлива формула автотрансформации [15]

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b} F(c-a,c-b;c;z)\,. \tag{12}$$

Для гипергеометрической функции Гаусса справедливы следующие оценки [15]:

$$F(a,b,c,z)\leq\begin{cases} C & \text{при}\ \ \mathrm{Re}(c-a-b)>0,\ \ 0\leq z\leq 1,\\ C(1-z)^{c-a-b} & \text{при}\ \ \mathrm{Re}(c-a-b)<0,\ \ 0<z<1,\\ C[1+\ln(1-z)] & \text{при}\ \ \mathrm{Re}(c-a-b)=0,\ \ 0<z<1,\end{cases} \tag{13}$$

где $C=const>0$.

Постановка задачи Пуанкаре – Трикоми и единственность решения задачи

Введем обозначения:

$$J=\{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\};\ \partial D=\vec{\sigma}\cup\overline{AB};\quad 2\beta=\frac{m}{m+2}.$$

Легко видеть, что $-1<2\beta<0$.

Задача Пуанкаре – Трикоми. Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{D})\cup C^1(D\cup\sigma\cup J)$, причем производные u_x и u_y могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы и -2β в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$ соответственно;

2) функция $u(x,y)\in C^2\left(\overline{D}^+\right)$ является регулярным решением уравнения (5) в области D^+, а в области D^- – обобщенным решением из класса R_2;

3) выполняется условие склеивания в виде

$$u_y(x,-0)=-u_y(x,+0)\,; \tag{14}$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\{\delta(s)A_s[u]+\rho(s)u\}\big|_\sigma=\varphi(s),\quad 0<s<l\,; \tag{15}$$

$$u(x,y)\big|_{AC}=\psi(x),\quad 0\le x\le\frac{1}{2}, \tag{16}$$

где $\delta(s)$, $\rho(s)$, $\varphi(s)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi(x)\in C^1[0,1/2]\cap C^2(0;1/2)$, а также выполняется условие согласования в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$: $\varphi(l)=\psi(0)=0$. Здесь и далее

$$A_s[u]=y^m\frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial y},\ \ \frac{dx}{ds}=-\cos(n,y),\quad \frac{dy}{ds}=\cos(n,x)\,,$$

n – внешняя нормаль к кривой σ; l – длина всей кривой σ; s – длина дуги кривой σ, отсчитываемая от точки $B(1,0)$.

Заметим, что в книге [21] подробно обсуждаются вопросы однозначной разрешимости некоторых частных случаев задачи Пуанкаре – Трикоми, т.е. задач Трикоми ($\delta(s)=0,\ \rho(s)\ne 0$) и Неймана – Трикоми ($\delta(s)\ne 0,\ \rho(s)=0$).

Будем предполагать, что кривая σ удовлетворяет следующим условиям:

1) функции $x(s)$ и $y(s)$, дающие параметрическое уравнение кривой σ, имеют непрерывные производные $x'(s)$ и $y'(s)$, необращающиеся одновременно в нуль, и имеют вторые производные, удовлетворяющие условию Гельдера порядка $\kappa(0<\kappa<1)$ в промежутке $0\le s\le l$;

2) в окрестностях конечных точек кривой σ выполняется неравенство

$$\left|\frac{dx}{ds}\right|\le C\,y^{m+1}(s), \tag{17}$$

причем $x(l)=y(0)=0,\ \ x(0)=1,\ y(l)=0,$ где C – постоянная.

Имеет место

Теорема 1. Если выполняются условия

$$\delta(s)\rho(s)\geq 0,\ 0\leq s\leq l;\ \lim_{y\to 0}(-y)^{\frac{m}{2}}u^2(1,y)=0,\ -1<m<0,$$

то решение задачи Пуанкаре – Трикоми в области D единственно.

Доказательство теоремы 1. Из формулы [18, 19]

$$\iint_{D_1}\left(y^m u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\int_0^1 u(x,+0)u_y(x,+0)dx+\int_\sigma \frac{\rho(s)}{\delta(s)}u^2 ds=0,$$

где u – решение уравнения (5), легко следует единственность решения задачи Пуанкаре – Трикоми.

Существование решения задачи Пуанкаре – Трикоми при $\delta(s)\neq 0$

Функциональные соотношения, связанные с функциями $\tau(x)$, $\nu^-(x)$ и $T(x)$. В полуплоскости $y<0$ уравнение (5) принимает вид

$$(-y)^m u_{xx}-u_{yy}=0. \tag{18}$$

В характеристических координатах

$$\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}},\quad \eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$$

уравнение (18) переходит в уравнение Эйлера – Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0, \tag{19}$$

область D^- преобразуется в треугольник Δ, ограниченный прямыми $\xi=0$, $\eta=1$ и $\eta=\xi$, а условие (16) принимает вид

$$u|_{\xi=0}=\psi(\eta/2),\ 0\leq\eta\leq 1, \tag{20}$$

где $\beta=\dfrac{m}{2(m+2)}$ и $-\dfrac{1}{2}<\beta<0$ при $-1<m<0$.

Решение задачи Коши для уравнения (19), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(\xi,\xi)=\tau(\xi),\ 0\leq\xi\leq 1; \tag{21}$$

$$[2(1-2\beta)]^{-2\beta}\lim_{\eta\to\xi}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\nu^-(\xi),\ 0<\xi<1 \tag{22}$$

известно [21]:

$$u(\xi,\eta)=\gamma_1(\eta-\xi)^{-1-2\beta}\int_\xi^\eta \tau(t)(\eta-t)^\beta(t-\xi)^\beta dt+$$

$$+\frac{\gamma_1}{2(1+2\beta)}(\eta-\xi)^{-1-2\beta}\int_\xi^\eta \tau'(t)\left[(\eta-t)^{1+\beta}(t-\xi)^\beta-(\eta-t)^\beta(t-\xi)^{1+\beta}\right]dt-$$

$$-\gamma_2\int_{\xi}^{\eta}\nu^-(t)(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}dt, \tag{23}$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)},\ \ \gamma_2=[2(1-2\beta)]^{-2\beta-1}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Если $\tau(x)\in C^3[0,1]$ и $\nu^-(x)\in C^2[0,1]$, то функция $u(\xi,\eta)$, определенная формулой (23), является классическим, дважды непрерывно дифференцируемым решением задачи Коши для уравнения (19) с начальными данными (21), (22) в области Δ.

Определение 1. Если функции $\tau'(x)$ и $\nu^-(x)$ непрерывны при $0<x<1$, то выражение вида (23) будем называть обобщенным решением уравнения (19) в области Δ.

Для того чтобы обобщенное решение обладало той или иной гладкостью, необходимо, чтобы функции $\tau(x)$ и $\nu^-(x)$ имели определенную гладкость.

Рассмотрим класс R_2 обобщенных решений уравнения (19).

Определение 2. Обобщенным решением класса R_2 уравнения (19) будем называть функцию $u(\xi,\eta)$ вида (23), где $\tau(x)$ представимо в виде

$$\tau(x)=\int_0^x(x-t)^{-2\beta}T(t)dt, \tag{24}$$

а $\nu^-(x)$ и $T(x)$ – непрерывные и интегрируемые в $(0,1)$ функции.

Из (24) нетрудно заключить, что $\tau(x)\in C[0,1]$ и существует $\tau'(x)\in C(0,1)$. Следовательно, обобщенное решение класса R_2 является обобщенным решением в смысле определения 1.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача Коши – Гурса. Найти обобщенное решение $u(\xi,\eta)\in R_2$ уравнения (19) в области Δ, удовлетворяющее условиям (20) и (22).

Подставив (24) в (23), после выполнения необходимых преобразований [21], получим

$$u(\xi,\eta)=\int_0^{\xi}(\eta-\zeta)^{-\beta}(\xi-\zeta)^{-\beta}T(\zeta)d\zeta+\int_{\xi}^{\eta}(\eta-\zeta)^{-\beta}(\zeta-\xi)^{-\beta}N(\zeta)d\zeta, \tag{25}$$

где
$$N(\zeta)=\frac{1}{2\cos\pi\beta}T(\zeta)-\gamma_2\nu^-(\zeta). \tag{26}$$

Используя явное интегральное представление (25), найдем функциональное соотношение между $\tau(x)$, $\nu^-(x)$ и заданным значением $\psi(\eta)$ решения $u(\xi,\eta)$ на характеристике AC $(\xi=0,\ 0\le\eta\le1)$. Пусть $u\in R_2$. При этом в силу его непрерывности в D^- должно быть $\psi(0)=0$.

Положив $\xi=0$ в выражении (25), получим

$$\psi(\eta)=\int_0^\eta N(\zeta)\xi^{-\beta}(\eta-\zeta)^{-\beta}d\zeta .$$

Разрешим его относительно $N(\zeta)$. Положим

$$\Phi(\zeta)=N(\zeta)\zeta^{-\beta} . \tag{27}$$

Тогда имеем

$$\int_0^\eta(\eta-\zeta)^{-\beta}\Phi(\zeta)d\zeta=\psi(\eta) . \tag{28}$$

Воспользовавшись определением (6) оператора дробного порядка $D_{0x}^{\alpha}f(x)$, запишем уравнение (28) в виде

$$D_{0\eta}^{\beta-1}\Phi(\eta)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\psi(\eta) . \tag{29}$$

Применим к обеим частям уравнения (29) оператор $D_{0\eta}^{1-\beta}$. Тогда в силу равенства (9) получим

$$\Phi(\eta)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}D_{0\eta}^{1-\beta}\psi(\eta). \tag{30}$$

Таким образом, решение уравнения (28), если оно существует, выражается формулой (30). Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функция (30) на самом деле является решением уравнения (28).

Сопоставляя теперь (26), (27) и (30), получим функциональное соотношение между $T(x)$ и $\nu^-(x)$, принесенное из области D^- на J :

$$T(\zeta)=\gamma_3\nu^-(\zeta)+\frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\zeta^{\beta}D_{0\zeta}^{1-\beta}\psi(\zeta) , \tag{31}$$

где $$\gamma_3=2\gamma_2\cos\pi\beta.$$

Подставляя (31) в (25), с учетом (26), получим обобщенное решение из класса $u\in R_2$ задачи Коши – Гурса для уравнения (19) с условиями (20) и (22) в явном виде

$$u(\xi,\eta)=\gamma_3\int_0^\xi(\eta-\zeta)^{-\beta}(\xi-\zeta)^{-\beta}\nu^-(\zeta)d\zeta+\frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^\eta(\eta-\zeta)^{-\beta}|\zeta-\xi|^{-\beta}\zeta^{\beta}D_{0\zeta}^{1\text{-}\beta}\psi(\zeta)d\zeta.$$

Отсюда непосредственно следует функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu^-(x)$, принесенное из области D^- на J :

$$\tau(x)=\gamma_3\int_0^x(x-t)^{-2\beta}\nu^-(t)dt+\Phi_1(x),$$

где $$\Phi_1(x)=\frac{2\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+2\beta)}D_{0x}^{2\beta\text{-}1}\left[x^{\beta}D_{0x}^{1-\beta}\psi(x)\right],\ 0\le x\le 1.$$

Функциональные соотношения, связанные с функциями $\tau(x)$, $\nu^+(x)$ и $T(x)$. В полуплоскости $y>0$ уравнение (5) принимает вид

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -1 < m < 0. \tag{32}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача PT.$^+$ Найти решение $u(x,y) \in C\left(\bar{D}^+\right) \cap C^1\left(D^+ \cup \sigma \cup J\right) \cap C^2\left(D^+\right)$ уравнения (32), удовлетворяющее краевым условиям (15) и

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{33}$$

где $\tau(x)$ – заданная непрерывная функция, причем $\tau(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\gamma_0 \ge 1-2\beta$ в интервале $(0,1)$ и представима в виде

$$\tau(x) = \int\limits_x^1 (t-x)^{-2\beta} T(t)dt\,, \tag{34}$$

где $T(x)$ – непрерывная и интегрируемая в $(0,1)$ функция.

Для дальнейшего удобства обозначим через D_0 нормальную область, ограниченную отрезком $\overline{AB}$ и нормальной кривой $\sigma_0 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = \frac{1}{4}$.

Решение задачи PT$^+$ с условиями (15) и (33) для уравнения (32) в области D^+ существует, единственно и представимо в виде [19]

$$u(x,y) = \int\limits_0^1 \tau(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta} G_2(\xi,0;x,y)d\xi + \int\limits_0^l \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} G_2(\xi,\eta;x,y)ds\,, \tag{35}$$

где $G_2(\xi,\eta;x,y)$ – функция Грина задачи PT$^+$ для уравнения (32), и она имеет вид

$$G_2(\xi,\eta;x,y) = G_{02}(\xi,\eta;x,y) + H_2(\xi,\eta;x,y)\,.$$

Здесь $G_{02}(\xi,\eta;x,y)$ – функция Грина задачи PT$^+$ для уравнения (32) в нормальной области D_0;

$$H_2(\xi,\eta;x,y) = G_2(\xi,\eta;x,y) - G_{02}(\xi,\eta;x,y) =$$

$$= \int\limits_0^l \lambda_2(s;\xi,\eta) \left\{ A_s\left[G_{02}(\xi(s),\eta(s);x,y)\right] + \frac{\rho(s)}{\delta(s)} G_{02}(\xi(s),\eta(s);x,y) \right\} ds\,, \tag{36}$$

где $\lambda_2(s;\xi,\eta)$ – решение интегрального уравнения

$$\lambda_2(s;\xi,\eta) + 2\int\limits_0^l \lambda_2(t;\xi,\eta) \{ A_s\left[q_2(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s))\right] +$$

$$+ \frac{\rho(s)}{\delta(s)} q_2(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s)) \Big\} dt = -2q_2(\xi(s),\eta(s);\xi,\eta),$$

$q_2(x,y,x_0,y_0)$ – фундаментальное решение уравнения (32):

$$q_2(x,y,x_0,y_0)=k_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2} r_1^{-2\beta}\left(1-\frac{r^2}{r_1^2}\right)^{1-2\beta} F\left(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;1-\frac{r^2}{r_1^2}\right), \quad (37)$$

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\}=(x-x_0)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}}\mp y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^2, \; k_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)},$$

$F(a,b,c;z)$ –гипергеометрическая функция Гаусса, определенная формулой (10).

Дифференцируя по y уравнение (35), затем устремляя y к нулю с учётом (36) и (37), получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu^+(x)$, принесенное из области D^+ на интервал J в виде

$$\nu^+(x)=k_2\int_0^1|t-x|^{2\beta-2}\tau(t)dt-k_2\int_0^1\frac{\tau(t)dt}{(t+x-2tx)^{2-2\beta}}+$$
$$+\int_0^1\tau(t)\frac{\partial^2 H_2(t,0;x,0)}{\partial\eta\partial y}dt+\int_0^l\chi(s)\frac{\partial q_2(t,\eta;x,0)}{\partial y}ds, \quad (38)$$

где $\chi(s)$ – есть решение интегрального уравнения

$$\chi(s)+2\int_0^l\chi(t)\left\{A_s\left[q_2(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s))\right]+\frac{\rho(s)}{\delta(s)}q_2(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s))\right\}dt=\frac{2\varphi(s)}{\delta(s)}.$$

После выполнения некоторых преобразований, с учетом (34), из (38) получим функциональное соотношение между $T(x)$ и $\nu^+(x)$, принесенное из области D^+ на интервал J:

$$\nu^+(x)=-\frac{k_2\pi tg\beta\pi}{1-2\beta}T(x)+\frac{k_2}{1-2\beta}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}T(t)\left[\frac{1}{x-t}-\frac{1}{x+t-2xt}\right]dt+$$
$$+\int_0^1T(t)dt\int_0^t\frac{\partial^2H_2(z,0;x,0)}{\partial\eta\partial y}(t-z)^{-2\beta}dz+\int_0^l\frac{\partial q_2(t,\eta;x,0)}{\partial y}\chi(s)ds, \quad (x,0)\in J. \quad (39)$$

Сведение задачи Пуанкаре – Трикоми к сингулярному интегральному уравнению

Теорема 2. Если кривая σ удовлетворяет условию (17), то при $-1<2\beta<0$ в области D решение задачи Пуанкаре – Трикоми существует.

Доказательство теоремы 2. Исключив $\nu(x)$ из соотношений (31), (39) и с учётом условия склеивания (14), имеем

$$\tilde{T}(x)-\gamma_4\int_0^1\left[\frac{1}{x-t}-\frac{1}{x+t-2xt}\right]\tilde{T}(t)dt-\int_0^1K(x,t)\tilde{T}(t)dt=F(x), \quad (40)$$

где
$$\gamma_4=\frac{\cos\beta\pi}{\pi(\sin\beta\pi-1)}, \; \tilde{T}(x)=x^{1-2\beta}T(x),$$

$$K(x,t)=\frac{\gamma_3}{\sin\beta\pi-1}\left(\frac{x}{t}\right)^{1-2\beta}\int_0^t (t-z)^{-2\beta}\cdot\frac{\partial^2 H_2(z,0;x,0)}{\partial\eta\partial y}dz, \qquad (41)$$

$$F(x)=\frac{2\cos\pi\beta}{(\sin\pi\beta-1)\cdot\Gamma(1-\beta)}x^{1-\beta}D_{0\eta}^{1-\beta}\psi(\eta)+\frac{\gamma_3\, x^{1-2\beta}}{(\sin\pi\beta-1)}\int_0^l\frac{\partial q_2(t,\eta;x,0)}{\partial y}\chi(s)ds. \qquad (42)$$

Исследуем ядро и правую часть сингулярного интегрального уравнения (40). Имеет место:

Лемма 1. Пусть $0<x<1,\quad 0<z<1$, тогда имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial^2 H_2(z,0;x,0)}{\partial\eta\partial y}\right|<C_1(x+z-2xz)^{2\beta-1}. \qquad (43)$$

где C_1 – постоянная, зависящая только от области D.

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству леммы 18.1 из книги [15]. В силу (43) из (41) имеем

$$|K(x,t)|\le C_1\frac{\gamma_3}{1-\sin\beta\pi}\left(\frac{x}{t}\right)^{1-2\beta}\left|\int_0^t (t-z)^{-2\beta}(x+z-2xz)^{2\beta-1}dz\right|. \qquad (44)$$

Неравенство (44) нетрудно привести к виду

$$|K(x,t)|\le C_1\frac{\gamma_3}{1-\sin\beta\pi}\left(\frac{x}{x+t-2xt}\right)^{1-2\beta}\int_0^1\sigma^{-2\beta}\left[1-\frac{(1-2x)t}{x+t-2xt}\sigma\right]^{2\beta-1}d\sigma\,. \qquad (45)$$

Производя замену переменных $z=t\,(1-\sigma)$ и воспользовавшись формулой Эйлера (11) для гипергеометрической функции Гаусса, из (45) получим

$$|K(x,t)|\le C_1\frac{\gamma_3}{1-\sin\beta\pi}\left(\frac{x}{x+t-2xt}\right)^{1-2\beta}F\left(1-2\beta,1-2\beta,2-2\beta;\frac{t(1-2x)}{x+t-2xt}\right). \qquad (46)$$

Последовательно применяя к гипергеометрической функции в (46) формулу автотрансформации (12) и оценки (13), получим оценку для ядра $K(x,t)$ в виде

$$|K(x,t)|\le C_1C_2\frac{\gamma_3}{1-\sin\beta\pi}\left(\frac{x}{x+t-2xt}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{x}{x+t-2xt}\right)^{2\beta}\le\frac{C_3x}{x+t-2xt}.$$

Теперь оценим правую часть уравнения (40). Дифференцируя фундаментальное решение (37) по y и переходя к пределу при $y\to 0$, получим

$$\frac{\partial q_2(\xi,\eta;t,0)}{\partial y}=k_2\eta\left[(\xi-t)^2+4(m+2)^{-2}\eta^{m+2}\right]^{\beta-1}. \qquad (47)$$

Подставляя (46) в (41), имеем

$$F(x)=\frac{2\cos\pi\beta}{(\sin\pi\beta-1)\cdot\Gamma(1-\beta)}x^{1-\beta}D_{0x}^{1-\beta}\psi(x)+$$

$$+\frac{\gamma_3\, x^{1-2\beta}}{(\sin\pi\beta-1)}\int_0^l\frac{\eta(s)\chi(s)}{\left[(\xi(s)-t)^2+4(m+2)^{-2}\eta^{m+2}(s)\right]^{1-\beta}}ds. \qquad (48)$$

В силу условий, наложенных на данные $\psi(x)$ и $\varphi(s)$, из (47) следует, что функция $F(x)$ в интервале (0,1) имеет производные любого порядка. Выясним поведение функции $F(x)$ и её производной при $x\to 0$ и $x\to 1$.

Рассмотрим выражение

$$F_1(x)=\int_0^l \frac{\eta(s)\chi(s)}{\left[\left(\xi(s)-t\right)^2+4(m+2)^{-2}\eta^{m+2}(s)\right]^{1-\beta}}ds. \tag{49}$$

Оценим функцию $F_1(x)$ в (48). В силу $\delta(s),\ \rho(s),\ \varphi(s)\in C[0,l]$, для достаточно малых $x>0$ справедливы неравенства

$$|F_1(x)|\le \int_{l-\varepsilon}^{l}|\chi(s)|\frac{\eta(\mathrm{s})}{\left[\left(\xi(\mathrm{s})-x\right)^2+4(m+2)^{-2}\eta^{m+2}(s)\right]^{1-\beta}}ds+\mathrm{O}(1)<$$

$$<C_4\int_{l-\varepsilon}^{l}\frac{\eta(\mathrm{s})}{\left[\left(\xi(\mathrm{s})-x\right)^2+4(m+2)^{-2}\eta^{m+2}(s)\right]^{1-\beta}}ds+\mathrm{O}(1).$$

Отсюда в силу (17) при достаточно малом $\varepsilon>0$ получаем

$$|F_1(x)|<C_5\int_{l-\varepsilon}^{l}\frac{\eta^{\frac{m}{2}}(s)\left|\frac{d\eta}{ds}\right|}{\left[x^2+4(m+2)^{-2}\eta^{m+2}(s)\right]^{\frac{1}{2}+\beta}}ds+\mathrm{O}(1)<C_6\int_0^{\delta}\frac{d\tilde{\eta}}{\left[x^2+\tilde{\eta}^2\right]^{\frac{1}{2}+\beta}}+\mathrm{O}(1). \tag{50}$$

Выполнив замену $\mu^2=\omega$ в (50) с учетом оценок (13) имеем

$$|F_1(x)|<\frac{\delta^2}{x^{2\beta+1}}\left|\frac{\Gamma(1,5)\Gamma(\beta)}{\Gamma(0,5+\beta)}\right|\left(\frac{\delta^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{\delta}{x^{2\beta+1}}\left|\frac{\Gamma(1,5)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(0,5)\Gamma(1-\beta)}\right|(x^2+\delta^2)^{-\beta}\times$$

$$\times x^{2\beta+1}F\left(\beta,\frac{1}{2},1+\beta;\frac{x^2}{x^2+\delta^2}\right)<\frac{\delta}{x^{2\beta}}\left|\frac{\Gamma(1,5)\Gamma(\beta)}{\Gamma(0,5+\beta)}\right|+\left|\frac{\delta\,\Gamma(1,5)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(0,5)\Gamma(1-\beta)}\right|(x^2+\delta^2)^{-\beta}<C_7\,x^{-2\beta},$$

или

$$|F_1(x)|<C_7x^{-2\beta}\ . \tag{51}$$

Если $1-x$ достаточно мало, то аналогично находим

$$|F_1(x)|<C_8(1-x)^{-2\beta}. \tag{52}$$

Проводя те же самые рассуждения, получим

$$|F_1'(x)|<C_9x^{-2\beta-1},\ |F_1'(x)|=C_{10}(1-x)^{-2\beta-1}\ . \tag{53}$$

В силу оценок (51) – (53) из (47) заключаем, что $F(x)\in C(\bar{J})\cap C^2(J)$ и производная $F'(x)$ обращается в бесконечность порядка меньше $2\beta+1$ при $x\to 1$, а при $x\to 0$ ограничена.

Производя замену переменных

$$\zeta=\frac{t^2}{1-2t+2t^2},\qquad z=\frac{x^2}{1-2x+2x^2},$$

приведем уравнение (40) к виду

$$\omega(z)+\gamma_4\int_0^1\frac{\omega(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\int_0^1\bar{K}(z,\zeta)\omega(\zeta)d\zeta=\tilde{F}(z), \tag{54}$$

где
$$\omega(z)=\left(1-2x+2x^2\right)\tilde{T}(x),\quad \tilde{F}(z)=(1-2x+2x^2)F(x),$$

$$\bar{K}(z,\zeta)=\frac{1-2t+2t^2}{2t(1-t)(1-2x+2x^2)}K(x,t)+\gamma_4\frac{(1-2x+2x^2)(1-2t+2t^2)}{(1-t)(t+x-2xt)},$$

$$x=\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}+\sqrt{1-z}},\qquad t=\frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}+\sqrt{1-\zeta}}.$$

Так как $1+\gamma_3^2\neq 0$, то уравнение (40) является уравнением нормального типа. Его индекс равен нулю в классе h_2 функций $\omega(z)\in H(0,1)$, ограниченных на отрезке $\bar{J}$ (см. [22]).

К уравнению (54) применим метод регуляризации Карлемана – Векуа [15] и получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи Пуанкаре – Трикоми. Следовательно, из равенств $\tilde{T}(x)=x^{1-2\beta}T(x)$ и $\omega(z)=\left(1-2x+2x^2\right)\tilde{T}(x)$, находим функцию $T(x)$, где функция $T(x)$ непрерывна и интегрируема в (0,1).

Подставляя решение $T(x)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода (54) в (34), найдем $\tau(x)$. Далее, зная функцию $\tau(x)$, решение задачи Пуанкаре – Трикоми для уравнения (5) в области D^+ восстановим как решение задачи PT^+ для уравнения (32) с условиями (15) и (33), а в области D^- воспользуемся обобщенным решением задачи Коши для уравнения (18), т.е., непосредственно подставляя решение $T(x)$ в (25), восстановим решение задачи Пуанкаре – Трикоми для уравнения (5) области D^-.

Таким образом, существование решения задачи Пуанкаре – Трикоми для уравнения (5) при $\delta(s)\neq 0$ доказано. Теорема 2 доказана.

Все формулы и процесс доказательства в настоящей работе требуют, чтобы $\delta(s)\neq 0$. В связи с этим следует отметить, что в случае $\delta(s)=0$ задача Пуанкаре – Трикоми для смешанного эллиптико-гиперболического типа второго рода становится видоизмененной задачей Трикоми для уравнения (5) и последняя изучена Ф.И. Франклем (см. например, в [21]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капилевич М.Б.* О конфлюэнтных гипергеометрических функциях Горна // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2. № 9. С. 1239–1254.
2. *Уринов А.К., Эргашев Т.Г.* Конфлюэнтные гипергеометрические функции многих переменных и их применение к нахождению фундаментальных решений обобщенного уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 45–56. DOI: 10.17223/19988621/55/5.
3. *Srivastava H.M., Hasanov A., Choi J.* Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Sohag J. Math. 2015. V. 2(1). P. 1–10. http://dx.doi.org/10.12785/sjm/020201.

4. *Berdyshev A.S, Hasanov A., Ergashev T.G.* Double-layer potentials for a generalized biaxially symmetric Helmholtz equation. II // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. V. 65(2). P. 316–332. https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1583219.
5. *Эргашев Т.Г.* Третий потенциал двойного слоя для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10. Вып. 4. С. 111–122. DOI: 10.13108 /2018-10-4-111.
6. *Эргашев Т.Г.* Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 45–56. DOI: 10.17223/19988621/50/4.
7. *Салахитдинов М.С., Эргашев Т.Г.* Интегральное представление обобщенного решения задачи Коши в классе R_{2k}^{λ} для одного уравнения гиперболического типа второго рода // Узбекский математический журнал. 1995. № 1. С. 67–75.
8. *Кароль И.Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 2. С. 197–200.
9. *Эргашев Т.Г.* Обобщенные решения одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. №46. С. 41–49. DOI: 10.17223/ 19988621/46/6.
10. *Сабитов К.Б., Бибакова С.Л.* Построение собственных функций задачи Трикоми – Неймана уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением и их применение // Математические заметки. 2003. Т. 74. № 1. С. 83–94. https://doi.org/10.1023/ A:1025019216707 .
11. *Тожибоев И.Т.* Краевые задачи в специальной области для уравнения смешанного типа // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 56. С. 17–28. DOI: 10.17223/19988621/56/2.
12. *Хайруллин Р.С.* Задача Трикоми для уравнения второго рода с сильным вырождением. Казань, 2015.
13. *Мамадалиев Н.К.* О представлении решения видоизменённой задачи Коши // Сибирский математический журнал. 2000. Т. 41. № 5. С. 1087–1097. https://doi.org/10.1007/ BF02674745.
14. *Долгополов В.М., Долгополов М.В., Родионова И.Н.* Построение специальных классов решений некоторых дифференциальных уравнений гиперболического типа // Доклады АН. 2009. Т. 429. № 5. С583–589. https://doi.org/10.1134/S1064562409060209.
15. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985.
16. *Смирнов М.М.* Смешанная краевая задача для уравнения $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ // Сибирский математический журнал. 1963. Т. 4. № 5. С. 1150–1161.
17. *Эргашев Т.Г., Сафарбаева Н.М.* Задача Дирихле для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 6. С. 55–67. DOI: 10.17223/ 19988621/62/5.
18. *Салахитдинов М.С., Абдуллаев А.А.* Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа второго рода // Докл. АН Республики Узбекистан. 2013. № 1. С. 3–5.
19. *Islomov B.I., Abdullayev A.A.* On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition // Journal Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2018. V. 9(3). P. 307–318. DOI: 10.17586/22208054201893307318.
20. *Салохитдинов М.С., Исломов Б.* Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Ташкент: Mumtoz so'z, 2009.
21. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
22. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Статья поступила 29.02.2020 г.

Abdullayev A.A., Ergashev T.G. (2020) POINCARE–TRICOMI PROBLEM FOR THE EQUATION OF A MIXED ELLIPTICO-HYPERBOLIC TYPE OF SECOND KIND. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 5–21

DOI 10.17223/19988621/65/1

Keywords: generalized solution, Poincaré–Tricomi problem, equation of the second kind, integral equation, energy integral method, Green's function.

It is known, that if the partial differential equation of the second order belongs to the elliptic type in one part of the domain and to the hyperbolic type in the other part, then such equation is called an equation of mixed type; both parts of the domain are separated by a transition line on which the equation either degenerates into parabolic or is not defined. Equations of mixed elliptic-hyperbolic type are divided into equations of the first and second kind. For equations of the first kind, the line of parabolic degeneracy is the return point of the family of characteristics of the corresponding hyperbolic equation. The equation whose degeneration line is simultaneously the envelope of a family of characteristics, i.e. is itself a characteristic, is an equation of the second kind. Therefore, equations of a mixed type of the second kind in all respects are relatively little studied. For example, the Poincaré–Tricomi problem and its various generalizations for equations of the first kind have long been studied. For equations of mixed type of the second kind, depending on the degree of degeneracy, the limiting values of the desired solution and its derivative on the line of change of the type of equation can have singularities. To ensure the necessary smoothness of the desired solution outside the line of characteristic degeneracy, one has to require increased smoothness of the given limit functions. In order to weaken this requirement, in the present paper we introduce a class of generalized solutions. In the hyperbolic part of the mixed domain, we seek a generalized solution; in the elliptic part, a regular solution. This paper is devoted to the study of the Poincaré–Tricomi problem for one equation of the mixed elliptic-hyperbolic type of the second kind. The conditions under which the problem has a unique solution are identified.

In the elliptic part of the mixed domain, a classical solution is sought and a similar second functional relationship brought from the ellipticity domain of the equation is derived. Then, after exclusion of one of the two unknown functions from these two functional relationships, the solution of the posed problem is reduced to solving a singular integral equation for the limit value of the sought function on the line separating the types of the equation. Under certain restrictions on the given functions and parameters of the Poincaré–Tricomi type problem, this singular integral equation can be reduced to a Fredholm integral equation of the second kind by the Carleman method. The unique solvability of this equation follows from the Fredholm alternative and uniqueness theorem for the posed problem.

AMS Mathematical Subject Classification: 35M10, 35M12

Akmaljon A. ABDULLAYEV (Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: akmal09.07.85@mail.ru

Tuhtasin G. ERGASHEV (V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: ertuhtasin@mail.ru

REFERENCES

1. Kapilevich M.B. (1966) O konflyuentnikh gipergeometricheskikh funksiyakh Gorna [Confluent hypergeometric Horn functions]. *Differentsial'nye Uravneniya – Differential Equations*. 2(9). pp. 1239–1254.
2. Urinov A.K., Ergashev T.G. (2018) Konflyuentnye gipergeometricheskie funksii mnogikh peremennykh i ikh primenenye k nakhozhdeniyu fundamental'nykh resheniy obobshchennogo uravneniya Gel'mgoltsa s singulyarnymi koeffitsientami [Confluent hypergeometric functions of many variables and their application to the finding of fundamental solutions of the generalized

Helmholtz equation with singular coefficients]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 45–56. DOI: 10.17223/19988621/55/5.

3. Srivastava H.M., Hasanov A., Choi J. (2015) Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Sohag J. Math*. 2(1). pp. 1–10. http://dx.doi.org/10.12785/sjm/020201.
4. Berdyshev A.S, Hasanov A., Ergashev T.G. (2020) Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. II. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 65(2). pp. 316–332. https://doi.org/10.1080/17476933. 2019.1583219.
5. Ergashev T.G. (2018) Third double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Ufa Mathematical Journal*. 10(4). pp. 111–121. DOI:10.13108 /2018-10-4-111.
6. Ergashev T.G. (2017) Chetvertyi potentsial dvoynogo sloya dlya obobshchennogo dvuosesimmetricheskogo uravneniya Gel’mgoltsa [The fourth double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 45–56. DOI: 10.17223/19988621/50/4.
7. Salakhitdinov M.S., Ergashev T.G. (1995) Integral’noe predstavlenie resheniya zadachi Koshi v klasse R_{2k}^{λ} dlya odnogo uravneniya giperbolicheskogo tipa vtorogo roda [Integral representation of a generalized solution of the Cauchy problem in the class R_{2k}^{λ} for a hyperbolic equation of the second kind]. *Uzbekskiy matematicheskiy zhurnal – Uzbek Mathematical Journal*. 1. pp. 67–75.
8. Karol I.L. (1953) Ob odnoy kraevoy zadache dlya uravneniya smeshannogo elliptiko-giperbolicheskogo tipa [A boundary value problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type]. *Doklady AN SSSR – Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. 88(2). pp. 197–200.
9. Ergashev T.G. (2017) Obobshchennye resheniya odnogo vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya vtorogo roda so spektral’nim parametrom [Generalized solutions of the degenerate hyperbolic equation of the second kind with a spectral parameter]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 41–49. DOI: 10.17223/19988621/46/6.
10. Sabitov K.B., Bibakova S.L. (2003) Construction of eigenfunctions of the Tricomi–Neumann problem for equations of mixed type with characteristic degeneration and their application. *Mathematical Notes*. 74(1). pp. 70–80. https://doi.org/10.1023/A:1025019216707.
11. Tojiboev I.T. (2018) Kraevye zadachi v spetsial’noy oblasti dlya uraneniy smeshannogo tipa [Boundary problems in a special domain for an equation of mixed type]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 56. pp. 17–28. DOI: 10.17223/19988621/56/2.
12. Khairullin R.S. (2015) *Zadacha Trikomi dlya uravneniya vtorogo roda s sil’nym vyrozhdenym* [The Tricomi problem for an equation of the second kind with strong degeneracy]. Kazan. Kazan University.
13. Mamadaliev N.K. (2000) On representation of a solution to a modified Cauchy problem. *Siberian Mathematical Journal*. 41(5). pp. 889–899. https://doi.org/10.1007/BF02674745.
14. Dolgopolov V.M., Dolgopolov M.V., Rodionova I.N. (2009) Construction of a special class of solutions for some differential equations of hyperbolic type. *Doklady Mathematics*. 80. pp. 860–866. https://doi.org/10.1134/S1064562409060209.
15. Smirnov M.M. (1985) *Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of the mixed type]. Moscow: Vysshaya shkola.
16. Smirnov M.M. (1963) Smeshannaya kraevaya zadacha dlya uravneniya $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ [Mixed problem for the equation $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$]. *Siberian Mathematical Journal*. 4(5). pp. 1150–1161.

17. Ergashev T.G., Safarbayeva N.M. (2019) Zadacha Dirikhle dlya mnogomernogo uravneniya Gel'mgoltsa s odnim singulyarnim koeffitsiyntom [Dirichlet problem for the multidimensional Helmholtz equation with one singular coefficient]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6. pp. 55–67. DOI: 10.17223/19988621/62/5.
18. Salakhitdinov M.S., Abdullayev A.A. (2013) Nelokal'naya kraevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa vtorogo roda [Nonlocal boundary value problem for a mixed type equation of the second kind]. *Doklady AN Respubliki Uzbekistan – Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*. 1. pp. 3–5.
19. Islomov B.I, Abdullayev A.A. (2018) On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition. *Journal Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*. 9(3). pp. 307–318. DOI: 10.17586/2220805420 1893307318.
20. Salokhitdinov M.S., Islomov B.I. (2009) *Uravneniya smeshannogo tipa s dvumya liniyami vyrozhdeniya* [The equations of the mixed type with two lines of degeneration]. Tashkent: Mumtoz so'z.
21. Smirnov M.M. (1970) *Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of the mixed type]. Moscow: Nauka.
22. Muskhelishvili N.I. (1968) *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow: Nauka.

Received: February 29, 2020