

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/65/7

М.А. Кальмова, О.В. Ратманова

## АНАЛИЗ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С БАЛКОЙ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА

Рассматривается задача о влиянии движущегося диска на продольные колебания балки, соответствующей модели Кельвина. Построено интегродифференциальное уравнение движения диска, в котором активная движущая сила и импульсы являются силовыми факторами. Применяя метод разделения переменных и рассматривая материальные параметры балки, решения образованной системы интегродифференциальных уравнений были найдены при помощи интегрального преобразования Лапласа. На основании численного моделирования установлено, что имеет место автоколебательный режим движения балки.

**Ключевые слова:** модель Кельвина, продольные колебания, интегральное преобразование Лапласа, интегродифференциальные уравнения

Современная техника и технология предъявляют высокие требования к реологической модели твёрдого тела. Необходимо, чтобы модель реально отражала поведение тела при статическом и динамическом нагружениях. В связи с этим в практику расчёта конструкций и технологических процессов всё чаще внедряются математические модели, такие, как модель Максвелла, физическая модель вязкопластичного тела, модель Фойгта, Бернулли, которые учитывают свойства конструкционных материалов. Во многом этому способствует бурное развитие вычислительной техники и вычислительной математики, которые позволяют доводить решение сложных нелинейных динамических задач до конечного численного результата [1–8].

### Постановка задачи

Проведем анализ влияния силового взаимодействия движущегося однородного диска по балке, наделенной реологическими свойствами в соответствие с моделью Кельвина [9–13].

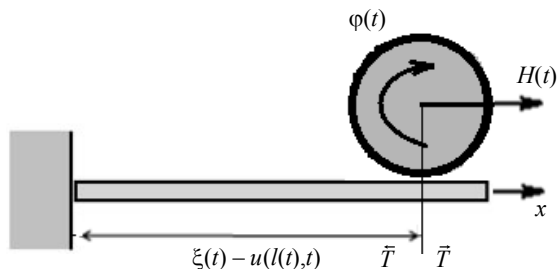


Рис. 1. Система однородного диска и балки  
Fig. 1. Uniform disk and beam system

Напряженно-деформируемое состояние балки в интегральном релаксационном виде выражается равенством

$$\sigma(x, t) = E_1 \left[ \varepsilon(x, t) - \int_0^t \mathfrak{R}(t - \tau) \varepsilon(x, \tau) d\tau \right], \quad (1)$$

где  $\mathfrak{R}(t - \tau)$  – ядро релаксации силы;  $E_1$  – длительный модуль упругости на растяжение;  $\varepsilon(x, t)$  – относительное удлинение;  $H(t)$  – активная сила.

Интегродифференциальное уравнение запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \left[ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^t \mathfrak{R}(t - \tau) \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} d\tau \right] + \frac{H}{F} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kr). \quad (2)$$

Здесь  $\delta$  – функция Дирака, а также зададимся начальными и граничными условиями, описывающими продольные колебания консольной балки в случае жесткого закрепления левого конца балки:

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = f_2(x). \quad (4)$$

Решение интегродифференциального уравнения (2) с начальными и граничными условиями найдем в виде суммы двух функций  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ .

Функция  $v(x, t)$  удовлетворяет однородному уравнению, соответствующему уравнению (2) и заданным граничным и начальным условиям, а функция  $w(x, t)$  должна удовлетворять неоднородному уравнению (2).

Найдем решение однородного уравнения.

Применяя метод Фурье к соответствующему уравнению (2) приходим к следующим выражениям:

$$X'' + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0; \quad (5)$$

$$\ddot{T} + \omega^2 \left( T - \int_0^t \mathfrak{R}(t - \tau) T(\tau) d\tau \right) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (5) имеет решение

$$X = C \sin \frac{\omega}{c} x + D \cos \frac{\omega}{c} x.$$

Учитывая специфику закрепления концов балки, находим

$$D = 0, \quad C \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = 0.$$

Частотное уравнение принимает вид

$$\cos \frac{\omega l}{c} = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\frac{\omega l}{c} = (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Для решения интегродифференциального уравнения (6) применим интегральное преобразование Лапласа

$$\begin{aligned} T(s) \div T(t), L\{T(t)\} = T(s), L\{\dot{T}(t)\} = s^2 T(s) - [sT(0) + \dot{T}(0)], \\ L\left\{\left(\int_0^t \Re(t-\tau)T(\tau)d\tau\right)\right\} = T(s)\bar{T}(s). \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая, что

$$\bar{T}(s) = \frac{E_1 - E_2}{nE_1} \frac{1}{\frac{1}{n} + s},$$

найдем изображающую функцию

$$T(s) = \frac{[sT(0) + \dot{T}(0)] \left(\frac{1}{n} + s\right)}{s^3 + \frac{1}{n}s^2 + \omega^2 s + \frac{E_2}{E_1} \frac{\omega^2}{n}}. \quad (9)$$

Здесь  $T(0)$  – начальная координата,  $\dot{T}(0)$  – начальная скорость. Для численного анализа принято  $\dot{T}(0) = 3s, T(0) = 0$ . Для нахождения оригинала используем вторую теорему разложения, предварительно, определив корни знаменателя  $p_1, p_2, p_3$  выражения:

$$p_1 = -0,015, \quad p_2 = -0,00249 - 9,9i, \quad p_3 = -0,00249 + 9,9i.$$

$$\begin{aligned} e^{p_2 t} &= e^{-0,00249t} (\cos 9,99t - i \sin 9,99t), \\ e^{p_3 t} &= e^{-0,00249t} (\cos 9,99t + i \sin 9,99t). \end{aligned} \quad (10)$$

Общим решением однородного уравнения (6) будет функция

$$T(t) = \frac{u_1}{\dot{v}_1} e^{p_1 t} + \frac{u_2}{\dot{v}_2} e^{p_2 t} + \frac{u_3}{\dot{v}_3} e^{p_3 t}. \quad (11)$$

Окончательное решение однородного уравнения, соответствующее уравнению, определяющему свободные колебания балки (2), представим в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \quad (12)$$

Найдем решение функции  $w(x, t)$ .

Функцию будем разыскивать в виде ряда по собственным функциям  $\sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}$  однородной задачи

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \quad (13)$$

Заменяя функцию  $w(x, t)$  рядом (13), запишем уравнение (2) в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\gamma}_k(t) + \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{2l^2} \left[ \gamma_k(t) - \int_0^t \Re(t-\tau) \gamma_k(\tau) d\tau \right] \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} = G(x, t), \quad (14)$$

где 
$$G(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}; \quad (15)$$

$$q_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l G(x, t) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx. \quad (16)$$

Приравнявая в разложениях (15) и (16) коэффициенты при собственных функциях, получим уравнение для функции  $\gamma_k(t)$  с нулевыми начальными условиями  $\gamma_k(0) = 0, \dot{\gamma}_k(0) = 0$ :

$$\ddot{\gamma}_k(t) + \Omega^2 \left[ \gamma_k(t) - \int_0^t \Re(t-\tau) \gamma_k(\tau) d\tau \right] = q_k(t). \quad (17)$$

Решение интегродифференциального уравнения (16) будем находить с применением преобразования Лапласа. Составим изображающее уравнение:

$$s^2 \gamma(s) + \Omega^2 \gamma(s) [1 - \bar{\Re}(s)] = (1 - e^{-s\tau})^{-1}, \quad (18)$$

где 
$$\bar{\Re}(s) = \frac{E_1 - E_2}{nE_1} \frac{1}{\frac{1}{n} + s}.$$

Лапласова трансформанта уравнения (18) принимает вид

$$\gamma(s) = \frac{E_1 H \left( \frac{1}{n} + s \right)}{(s^3 + \frac{1}{n} s^2 + \Omega^2 s + \frac{E_2}{E_1} \frac{\Omega^2}{n}) (1 - e^{-s\tau})} \quad (19)$$

Начальную функцию найдем, применяя вторую теорему разложения:

$$\gamma_k(t) = \frac{H \sin(t, \Omega)}{\Omega} (E_1 - E_2) \Omega^2 \left( \frac{e^{-\frac{t}{n}}}{E_1 (1 + n^2 \Omega^2)} + \frac{-n \Omega \cos(t, \Omega) + \sin(t, \Omega)}{E_1 (1 + n^2 \Omega^2)} \right) - \sum_{k=1}^{10} \frac{2\tau}{\tau^2 - k^2 \tau_1^2} \cos \left( k \frac{\tau_1}{\tau} \Omega t \right). \quad (20)$$

### Заключение

Проведя численный анализ, можно считать, что имеет место автоколебательный режим движения балки, источником которого являются периодические импульсы, порождаемые дельта-функцией и воспринимаемые вязкоупругим материалом балки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последствия и релаксации // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 18–21.
2. Бадалов Ф.Б. Динамические гасители колебаний наследственно-деформируемых систем. Ташкент: ТашГАИ, 2003. 81 с.
3. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика негोलомных систем. М., 1967. 483 с.
4. Вильке В.Г. Теория качения твердого колеса по деформируемому рельсу // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1997. № 1. С. 48–55.
5. Chirkunov Yu. A. Nonlinear longitudinal vibrations of a viscoelastic rod in the kelvin model. Novosibirsk: Publishing House of NSTU, 2015. V. 79. No. 5.
6. Miftakhova A.R. Contact Problems for Rolling with Slip for Viscoelastic Solids // Journal of Friction and Wear. 2018. V. 39. No. 1. P. 55–61.
7. Bogomolov V., Raznitsyn I. On equivalence of kelvin and maxwell multielement models // Avtomobil'nyy transport (Kharkov). 2015. V. 37. С. 175–181.
8. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
9. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1972. 327 с.
10. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 276 с.
11. Ишлинский А.Ю. Об уравнениях пространственного деформирования не вполне упругих и вязкопластических тел // Изв. АН СССР. ОТН. 1945. № 3. С. 24–35.
12. Kalmova M., Pavlov G. Analyzing the influence of the disk motion on longitudinal oscillations of a beam with rheological properties. XXVII R-S-P Seminar 2018, Theoretical Foundation of Civil Engineering. MATEC Web of Conferences 196, 01004 (2018).
13. Ржаницын А.П. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.: Гостехиздат, 1949. 248 с.

Статья поступила 30.04.2019 г.

Kalmova M.A., Ratmanova O.V. (2020) ANALYSIS OF INTERACTION BETWEEN SOLIDS OF REVOLUTION AND A BEAM CORRESPONDING TO THE KELVIN MODEL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 65. pp. 92–97

DOI 10.17223/19988621/65/7

Keywords: Kelvin model, longitudinal oscillations, Laplace integral transform, integro-differential equations.

Various formulations of the problem of a disk rolling on a plane have been studied by different researchers. In this paper, the effect of longitudinal oscillations of a beam, caused by the circular motion of a solid disk along the beam, on the mode of the disk motion is analyzed. Two versions of properties of a beam material are considered: an elastic beam and a viscoelastic beam corresponding to the Kelvin rheological model with relaxation and creep properties. The Fourier method is used as a method of separation of variables in the problem solving. When testing the beam and assuming its hereditary deformation, the rheological response force is introduced, which depends on longitudinal strains and their rate. The obtained result is presented as functions of time, which are adaptable for numerical integration. It is shown that beam oscillations arise from the disk motion and can be considered as self-oscillations.

Mariya A. KALMOVA (Samara State Technical University, Samara, Russian Federation). E-mail: kalmova@inbox.ru

Olesya V. RATMANOVA (Samara State Technical University, Samara, Russian Federation). E-mail: olesya654@yandex.ru

## REFERENCES

1. Ishlinskiy A.Yu. (1940) Prodl'nye kolebaniya sterzhnya pri nalichii lineynogo zakona posledstviya i relaksatsii [Longitudinal vibrations of a rod in the presence of the linear law of consequences and relaxation]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 4(1). pp. 18–21.
2. Badalov F.B. (2003) *Dinamicheskie gasiteli kolebaniy nasledstvenno-deformiruemyykh sistem* [Dynamic dampers of vibrations of hereditary-deformable systems]. Tashkent: TashGAI.
3. Neymark Yu.I., Fufaev N.A. (1967) *Dinamika negolonomnykh sistem* [Dynamics of non-holonomic systems]. Moscow: Nauka.
4. Wilke V.G. (1997) Teoriya kacheniya tverdogo kolesa po deformiruемому rel'su [Theory of rigid wheel rolling along a deformable rail]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*. 1. p. 48–55.
5. Chirkunov Yu.A. (2015) Non-linear longitudinal oscillations of a viscoelastic rod in Kelvin's model. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 79(5). pp. 506–513. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2016.03.012.
6. Miftakhova A.R. (2018) Contact problems for rolling with slip for viscoelastic solids. *Journal of Friction and Wear*. 39(1). pp. 55–61. DOI: 10.3103/S1068366618010105.
7. Bogomolov V., Raznitsyn I. (2015) On equivalence of Kelvin and Maxwell multielement models. *Avtomobil'nyy transport (Kharkov)*. 37. pp. 175–181.
8. Rabotnov Yu.N. (1977) *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow: Nauka.
9. Moskvitin V.V. (1972) *Soprotivlenie vyazkouprugikh materialov* [Resistance of viscoelastic materials]. Moscow: Nauka.
10. Koltunov M.A. (1976) *Polzuchest' i relaksatsiya* [Creep and relaxation]. Moscow: Vysshaya shkola.
11. Ishlinsky A.Yu. (1945) Ob uravneniyakh prostranstvennogo deformirovaniya ne vpolne uprugikh i vyazkoplasticheskikh tel [On equations of spatial deforming of not quite elastic and viscoplastic bodies]. *Izvestiya AN SSR*. 3. pp. 24–35.
12. Kalmova M., Pavlov G. (2018) Analyzing the influence of the disk motion on longitudinal oscillations of a beam with rheological properties. *MATEC Web of Conferences*. 196(4). 01004. DOI: 10.1051/mateconf/201819601004.
13. Rzhantsyn A.R. (1949) *Nekotorye voprosy mekhaniki sistem, deformiruyushchikhsya vo vremeni* [Some issues of mechanics of the systems deforming with time]. Moscow: Gostekhizdat.

Received: April 30, 2019