

УДК 51: 101.8

DOI: 10.17223/1998863X/56/4

В.М. Резников

ФИЛОСОФСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСКУССИЙ В КОНТЕКСТЕ КРИТИКИ УСЛОВИЙ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ ПО КОЛМОГОРОВУ

В статье обосновано предположение, что ученые недооценивают философские концепции, так как последние неявно используются в исследованиях. На примерах полемик о применимости математики – частотной интерпретации Мизеса и условий Колмогорова – показано, что их критика была вызвана различными представлениями о природе вероятности, а не формальным несовершенством. Показано, что в рамках частотной интерпретации требование Колмогорова не является зависимым.

Ключевые слова: неявные философские предпосылки; частотная интерпретация; субъективистская интерпретация; теорема Бернулли; независимость; устойчивость частот.

Хотя современные научные исследования интенсивно используют концепции причинности, онтологии и др., представители науки недооценивают роли философских предпосылок в современной науке. Так, в известной дискуссии ученых, где обсуждался вопрос о влиянии философии на создание научных теорий, ими отмечалась значимость философии от античности до Канта [1]. Однако никто из диспутантов не высказался о значимости современных философских исследований для развития науки, более того, некоторые из них отрицали какое-либо положительное влияние этих исследований на науку. Почему ученые скептически относятся к положительному влиянию современных философов на науку? Так, известный математик Шейфер высказывался о несомненном положительном воздействии истории и философии науки на развитие знания в математике, но при этом подчеркивал, что современные философы не оказывают какого-либо влияния на науку своего времени. По мнению Шейфера, философы в различных областях знания, в частности специалисты в философии математики, занимаются исследованиями классической науки, при этом проблемы актуальной науки остаются вне внимания философов. Его критика связана с тем, что в области философии стохастической математики было написано несколько десятков монографий, однако во всех них, за исключением двух, исследовались проблемы классической теории вероятностей, но в большей степени анализировались вопросы влияния культуры на развитие теории вероятностей, а не само научное знание. В двух других книгах рассматривались проблемы, относящиеся к началу современной теории вероятностей, однако не исследовались актуальные проблемы современной стохастической математики [2, 3]. В целом критика Шейфера оказывается справедливой, так, для того чтобы заниматься методологическими проблемами, актуальными для какого-либо раздела науки, нужно одновременно быть сильным специалистом как в этой области науки, так и в философии. Быть профессионалом одновременно в двух областях знания

достаточно сложно, но не невозможно. Так, истории науки известны такого рода ситуации, причем относящиеся именно к теории вероятностей.

Во-первых, в качестве примера участия философов в современных исследованиях, в частности в актуальной дискуссии в области математики, можно привести обсуждение частотной интерпретации теории вероятностей Мизеса [4]. Прежде чем рассматривать основания для критики Мизеса философами, приведем кратко основные постулаты его концепции.

1) Теоретическая вероятность в первом постулате Мизеса определяется на основе бесконечной сходящейся последовательности частот.

2) Согласно второму постулату любая некоторым разумным образом выбранная подпоследовательность частот сходится к одному и тому же пределу, что и вся последовательность.

В жесткой критике интерпретации Мизеса приняли участие многие исследователи, прежде всего математики, но не только, так, определение вероятности у Мизеса критиковали философы: Рейхенбах, Поппер. Например, Рейхенбах отвергал второй постулат Мизеса, так как он описывает независимые последовательности данных, что ограничивает применение теории вероятностей, Поппер, наоборот, считал, что для приложений имеет значение второй постулат [5, 6].

Во-вторых, некоторые современные философы одновременно успешно занимались научной деятельностью, например, известный специалист в философии науки Суппес серьезно занимался наукой. Известны его работы, относящиеся к байесовизму в теории вероятностей, интерпретации теории вероятностей – пропенсити, применению теории вероятностей в психологии и физике [7]. И так, не всегда философские исследования оказываются неактуальными. Кроме того, критика Шейфера не является справедливой по следующим основаниям. Во-первых, сам Шейфер, критик современной философии науки, в своей работе, посвященной созданию обобщенной интерпретации теории вероятностей, использовал понятие причинного отношения [8]. И это неслучайно, так как в науке, в частности медицине, всегда были популярны идеи причинных связей и механизмов, а в биологии популярны классификации на основе причинных отношений, кроме того, в последнее время причинные отношения используются при построении экспертных систем. Во-вторых, не только понятие причинного отношения применяется в науке, например, в науке часто используется идея онтологии.

Почему философские концепции недооцениваются в науке? Частично это связано с тем, что сложно точно определить влияние философских идей на науку, так как они часто используются неявно. Например, философские концепции использовались неявно в известных математических баталиях, связанных с определением роли вероятностных интерпретаций в науке, в частности в математике. В дискуссиях, относящихся к применению математики, часто критикуются формальные и технические несовершенства в работах оппонентов, однако при этом основания критики напрямую не указываются. В качестве примера такой критики приведем частотную интерпретацию Мизеса. Так, в известной критике частотной интерпретации Мизеса оппоненты указывали формальные недоработки, однако за пределами критики оказывались принципиальные различия в методологических позициях диспутантов. В чем заключалось несходство методологических позиций Мизеса и его оп-

понентов? Во-первых, Мизес был одним из основателей прикладной математики, и он рассматривал теорию вероятностей в качестве естественнонаучной дисциплины. Оппонентами Мизеса являлись чистые математики, для которых теория вероятностей входит в состав чистой математики. Во-вторых, Мизес был последовательным сторонником частотной интерпретации. Критиками Мизеса являлись представители двух интерпретаций: субъективистской и пропенсити. Сначала приведем некоторые положения и особенности концепции Мизеса, критикуемые с позиций чистой математики.

1) Первый постулат критикуется, так как в нем смешаны эмпирические и теоретические термины, что не принято в чистой математике. Однако в теории Мизеса это определение является операциональным, так как обеспечивает определение теоретической вероятности на основе частот, определяемых экспериментальным путем.

2) Второй постулат получил жесткую критику, так как выбор подпоследовательностей у Мизеса не был описан конструктивно, а лишь продемонстрирован на примерах. Неалгоритмическое описание выбора вызвано тем, что Мизес был сторонником интуиизма, в котором допустимы не полностью определимые объекты.

3) Теория Мизеса критикуется, так как первоначально не была полностью аксиоматизируемой, однако неаксиматизируемость в контексте приложений не является недостатком.

4) Согласно оппонентам, некоторые законы теории вероятностей, в частности закон повторного логарифма, не выполняются в концепции Мизеса. Действительно, в работе Вилля было показано, что в концепции Мизеса для коллективов с бесконечными последовательностями невыразим закон повторного логарифма [9]. Однако в реальных ситуациях исследователю доступны последовательности лишь конечной мощности, для которых справедлив этот закон. Теперь рассмотрим некоторые положения концепции Мизеса, критикуемые сторонниками концепций субъективизма. Субъективисты критиковали концепцию, так как она неприложима для определения сингулярных вероятностей, однако для Мизеса теория вероятностей – это наука о массовых явлениях, и она предназначена для определения частотных характеристик событий, а не для вероятностей единичных событий. Отметим, что взвешенный разбор оснований критики Мизеса был предложен Ламбангеном, он показывает, что теория Мизеса под напором мощной критики устояла, и практически все критические замечания были вызваны различными взглядами на природу вероятности [10]. Критика Мизеса и аргументы в пользу его теории в достаточной степени представлены в литературе [11]. В то же время критические замечания, относящиеся к одному из требований Колмогорова – применения теории вероятностей, в известной литературе не представлены.

Требование Колмогорова имеет следующий вид: «Можно практически быть уверенным, что если комплекс условий S будет повторен большое число раз n и если при этом через m обозначено число случаев, при которых событие A наступило, то отношение m/n будет мало отличаться от $P(A)$ » [12. С. 13].

Почему исследование условия Колмогорова представляет интерес? Во-первых, требование Колмогорова имеет историческую значимость, так как было предложено в его книге, в которой была сформулирована аксиоматика

теории вероятностей. Во-вторых, выполнимость этого условия означает корректное определение теоретической вероятности на основе частот, что обеспечивает обоснованное применение теоремы Бернулли. В-третьих, оно значимо в контексте примера математической баталии, где критика связана не с математическим несовершенством некоторых утверждений, а с различными взглядами оппонентов на природу вероятности.

Основной тезис настоящей статьи состоит в обосновании того, что условие Колмогорова не является заключением теоремы Бернулли в рамках частотной интерпретации. Прежде чем рассматривать частотные аспекты этой теоремы, имеет смысл напомнить теорему.

Теорема Бернулли. Проводится n независимых испытаний события A , и m экспериментов оказались успешными. Известно, что теоретическая вероятность появления события A в каждом эксперименте равняется $p(A)$, а m/n – это частота события A , ε – это точность вычислений. Тогда при бесконечном числе экспериментов выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|m/n - p(A)| < \varepsilon) = 1. \quad (1)$$

Частотная интерпретация связана с эмпирической традицией. В рамках этой традиции имеет место эмпирическое доминирование, т.е. первичными являются эмпирические частоты, а теоретические вероятности являются представителями эмпирических величин, при этом теоретические величины существуют, если эмпирические величины обладают некоторыми специальными свойствами. Так, в теореме Бернулли считается, что вероятность успеха в каждом эксперименте является постоянной величиной, естественно считать, что вероятность будет постоянной величиной, если наблюдаемые частоты являются маловариабельными, устойчивыми. В простейшем случае частоты устойчивы, если их значения принадлежат интервалу, величина которого меньше погрешности измерений. В этом случае в качестве вероятности можем взять любое значение из этого интервала, и при этом будет выполняться требование Колмогорова. Таким образом, получена геометрическая интерпретация требований Колмогорова. Другое соображение в пользу геометрической близости вероятности и частот основано на определении вероятности у Мизеса. У Мизеса вероятность определяется посредством бесконечной последовательности сходящихся частот, причем рассматривается сходимость не по вероятности, а принятая в математическом анализе, которая допускает естественную геометрическую интерпретацию [4]. Мы получили, что в частотном подходе условие Колмогорова является следствием устойчивости частот, а устойчивость – это онтологическая характеристика мира опыта, и она оказывается предпосылкой применения теоремы, а не заключением ее.

Почему Борель, Леви, Фреше и др. критиковали Колмогорова? Не вызывает сомнения, потому что они были субъективистами или представителями пропенсити, а Колмогоров позиционировал себя как последователя Мизеса. На каком основании оппоненты Колмогорова считали, что его неформально заданное требование представляет собой заключение теоремы Бернулли? Трудно дать точный, однозначный ответ на этот вопрос. Во-первых, таким образом понимаемое условие Колмогорова оказывается в математическом поле. Во-вторых, теорема Бернулли имеет особое значение для субъективизма.

стов, так как, по их мнению, апелляция к теореме объективирует субъективно назначенные вероятности.

Мы полагаем, что если Колмогоров являлся последовательным представителем частотной интерпретации, тогда критика оппонентов бьет мимо цели и соответственно не нужны никакие дополнительные соображения, объясняющие, почему Колмогоров использовал «зависимое» требование. Однако сложно считать Колмогорова последовательным представителем частотной интерпретации. Он интересовался частотной интерпретацией, однако критиковал ее асимптотический характер, а также неформальное описание правил, на основе которых выбираются представители исходной последовательности для формирования подпоследовательности, на основе которой определяются частотные характеристики. Почему, несмотря на критику интерпретации Мизеса, Колмогоров относил себя к сторонникам частотной интерпретации? Многие исследователи полагают, что выбор эмпирической интерпретации был основан на прагматических основаниях. Во-первых, Колмогоров был лидером отечественной математики, поэтому сложно было позиционировать себя представителем субъективистской интерпретации, так как в этом случае необходимо было разъяснять, что субъективизм в философии и субъективистская интерпретация теории вероятностей это не одно и то же. Во-вторых, для Колмогорова было удобно считаться представителем частотной интерпретации, так как известный математик Хинчин в ряде публикаций показал совместимость частотной интерпретации Мизеса с марксистской философией [13].

В работах Шейфера и Вовка не оспаривается критика субъективистов, опирающаяся на то, что условие Колмогорова оказывается заключением теоремы Бернулли, а так как нет оснований считать Колмогорова адептом частотной интерпретации, поэтому их соображения, объясняющие использование зависимого условия, представляют интерес. Они привели несколько соображений, объясняющих использование Колмогоровым зависимого требования, и одно, свидетельствующее об его возможном просчете. Шейфер и Вовк полагали, что об ошибке Колмогорова свидетельствует то обстоятельство, что Колмогоров не ответил на критику [14]. Однако трудно согласиться с их аргументацией. Мы полагаем, что Колмогоров не ответил оппонентам по двум обстоятельствам. Во-первых, из прагматических соображений, основанных на том, что плодотворная дискуссия возможна, если оппоненты придерживаются в определенной степени совпадающих точек зрения. Однако субъективисты, эмпирики и представители интерпретации пропенсити занимают несовпадающие позиции о роли вероятности в науке, поэтому конструктивный диалог между ними практически невозможен. Во-вторых, по нашему мнению, отказ от дискуссии Колмогорова основан на соображениях политкорректности. Так, известно, что у Колмогорова возникли творческие профессиональные отношения с французскими математиками, поэтому не было особого смысла вступать с ними в полемику, тем более их критика по существу была направлена на Мизеса, а не на Колмогорова. История признания колмогоровской аксиоматики показывает, что ее автор был прав, не вступив в полемику с французскими коллегами. В 1939 г. в Женеве участники международной математической конференции жестко критиковали теорию вероятностей Мизеса и пришли к решению о признании аксиоматической

теории вероятностей Колмогорова. В своем письме к Колмогорову об этом сообщил Фреше, один из критиков Колмогорова, при этом он подчеркнул, что имеет значение то, что в работе Колмогорова было не только дано изложение теории вероятностей на основе предложенной им аксиоматики, но и предложены требования к применению теории вероятностей [15. Р. 1].

Теперь обратимся к аргументам Шейфера и Вовка, объясняющим использование 'зависимого' условия. Во-первых, условия Колмогорова к применению теории вероятностей были сформулированы в его книге сразу после описания аксиом, поэтому теорема Бернулли еще не была получена, и тогда требование Колмогорова не является заключением теоремы. Данное соображение не является серьезным, и нет смысла его комментировать. Во-вторых, зависимое условие Колмогорова имеет самостоятельное значение, так как определяет предпочтения Колмогорова в контексте приложений теории вероятностей. Это бесспорно сильный аргумент, но ему стоит придать в большей мере объективистский характер, например, сославшись на то, что частотная интерпретация имеет значение для приложений теории вероятностей. Кроме того, эту интерпретацию высоко оценивают математики-прикладники [16, 17]. В-третьих, корректное применение теоремы Бернулли предполагает верификацию независимости результатов наблюдений, полученных при проведении очередных экспериментов, при этом предполагается проверка независимости, учитывающая как текущие результаты исследований, так и все ранее проведенные испытания. Верификация независимости данных требует проведения большого объема вычислений, кроме того, по мнению Шейфера и Вовка, непрерывная проверка независимости ухудшает качество используемой модели. Как мы уже отмечали, применение теоремы Бернулли в частотной интерпретации кроме верификации независимости предполагает еще и определение теоретической вероятности успеха для проводимых испытаний. Таким образом, Шейфер и Вовк демонстрируют, что применение теоремы Бернулли в частотной интерпретации делает необходимым проведение большого объема вычислений. Однако может ли аргумент о необходимости проведения большой вычислительной работы служить объяснением для использования Колмогоровым зависимого условия? Выбор зависимого условия не является рациональным, поэтому трудно предположить, что Колмогоров использовал зависимое условие, на том основании, что его выводимость предполагает проведение большого объема вычислений. По нашему мнению, требование Колмогорова, во-первых, свидетельствует о приверженности частотной интерпретации, во-вторых, в частотной интерпретации оно не является зависимым. В-третьих, в субъективистской интерпретации вероятность успеха в теореме Бернулли считается известной априори, однако в эмпирической традиции, которой следует частотная интерпретация, отрицается априорное знание теоретических вероятностей, поэтому вывод условия Колмогорова в субъективистской интерпретации не является легитимным в частотном подходе.

Заключение

1) Требование Колмогорова нами было проанализировано на основе исследования условий корректного применения теоремы Бернулли в частотной интерпретации. В науке часто используются методы и теоремы теории веро-

ятностей и математической статистики на основе частотного подхода, в то же время практически неизвестны методологические исследования, посвященные применению аппарата стохастической математики в рамках этого подхода. По нашему мнению, перспективными представляются развернутые исследования, посвященные содержательному и формальному анализу условий применения стохастической математики в частотном контексте.

2) В настоящее время не существует универсальной интерпретации теории вероятностей. Так как ни одна интерпретация не является универсальной, поэтому является актуальной проблема синтеза основных вероятностных интерпретаций, по крайней мере, частично она решена Шейфером [8], критика этого подхода, так как в нем используется описание причинного отношения необщего характера, дана в работах Картрайт [18]. Представляются перспективными исследования, посвященные анализу критических замечаний Картрайт, и модификации концепции Шейфера на основе учета критических положений.

Литература

1. *Jorge J.* Can philosophy help to innovate and develop scientific theory? URL: https://www.researchgate.net/post/Can_philosophy_help_to_innovate_and_develop_scientific_theory (дата обращения: 08.11.2018).
2. *Hacking I.* Logic of statistical inference. Cambridge : Cambridge University Press, 1965. 226 p.
3. *Plato J.* Creating modern probability. Cambridge : Cambridge University Press, 1994. 323 p.
4. *Mises R.* Mathematical theory of probability and statistics. New York : Academic Press, 1964. 694 p.
5. *Reichenbach H.* The theory of probability. California : University of California Press, 1949. 492 p.
6. *Ponnep K.* Логика научного исследования. М. : Республика, 2004. 448 p.
7. *Suppes P.* Representation and invariance of scientific structures. Stanford : CSLI, 2002. 536 p.
8. *Shafer G.* The unity and diversity of probability // Acting Under Uncertainty: Multidisciplinary Conceptions / ed. by Von G. Fustenberg. Boston : Kluwer, 1990. P. 435–462.
9. *Ville J.* Etude critique de la notion de collectif. Paris : Gauthier-Villars, 1939. 144 p.
10. *Lambalgen M.* Randomness and foundations of probability: von Mises' axiomatization of random sequences. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/853a/5cdd7c2e443f898dca230d31ac4556970d76.pdf> (дата обращения: 15.05.2018).
11. *Gillies D.* Philosophical theories of probability. London: Routledge, 2003. 223 p.
12. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. М. : Наука, 1974. 120 с.
13. *Хинчин А.Я.* Частотная теория Р. Мизеса и современные идеи теории вероятностей // Вопросы философии. 1961. № 1. С. 91–102.
14. *Shafer G., Vovk V.* Probability and Finance It's Only a Game! New York : A Wiley-Interscience Publication, 2001. 414 p.
15. *Shafer G., Vovk V.* The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe // Statistical Science. 2006. Vol. 21, № 1. P. 70–98.
16. *Алимов Ю.И.* Альтернатива методу математической статистики. М. : Знание, 1980. 64 с.
17. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей. М. : Академия, 2008. 360 с.
18. *Cartwright N.* The Dappled World, a study of the boundaries of science. Cambridge : Cambridge University Press, 1999. 247 p.

Vladimir M. Reznikov, Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russian Federation).

E-mail: mathphil1976@gmail.com

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science. 2020. 56. pp. 33–41.

DOI: 10.17223/1998863X/56/4

THE PHILOSOPHICAL PREMISES OF MATHEMATICAL DISCUSSIONS IN THE CONTEXT OF THE CRITIQUE OF KOLMOGOROV'S CONDITIONS FOR USING MATHEMATICS

Keywords: implicit philosophical premises; frequency interpretation; subjectivist interpretation; Bernoulli's theorem; stability of frequencies.

The article examines the implicit philosophical premises in mathematical battles. It focuses on the critique of Kolmogorov's conditions, which are minimally represented in the known literature. The conditions are significant in the frequency interpretation, in the illustration of the thesis on the underestimation of philosophical ideas, and in the historical context. The main methodological question that guided the study is whether we can agree with subjectivists that Kolmogorov's requirement of the proximity of probability and frequency is described by the conclusion of Bernoulli's theorem. To answer this question, the requirements were formulated for using the theorem within the frequency approach, in which the theoretical probability of success of the tests, used in Bernoulli's theorem, is unknown and is constant by hypothesis. Using the fact and making no pretense to the generality of reasoning, the author assumed that, like in many real processes, the frequency characteristics of events occurring with constant probability turn out to be stable. In the simplest case, frequencies are stable if their values belong to an interval whose length is less than the measurement error. Here, any value from the interval is suitable as probability, and the requirement is satisfied. Thus, describing the conditions for the application of the theorem within the frequency approach, the author obtained a geometric interpretation of the requirement. The requirement turns out to be a consequence of the stability of frequencies; stability is an ontological characteristic of the world of experience, and it is a prerequisite for the application of the theorem, not its conclusion. If Kolmogorov can be viewed as a consistent representative of the frequency approach, then his requirement does not depend on the theorem. However, as the author has shown, he declared himself a follower of Mises for pragmatic reasons. Therefore, it can be assumed that his requirement is described by the conclusion of the theorem. Nevertheless, within the frequency approach, the bases for the application of the theorem in the subjectivist interpretation are rejected; therefore, Kolmogorov's condition does not depend on the theorem.

References

1. Jorge, J. (n.d.) *Can philosophy help to innovate and develop scientific theory?* [Online] Available from: https://www.researchgate.net/post/Can_philosophy_help_to_innovate_and_develop_scientific_theory.pdf (Accessed: 8th November 2018)
2. Hacking, I. (1965) *Logic of statistical inference*. Cambridge: Cambridge University Press.
3. Plato, J. (1994) *Creating modern probability*. Cambridge: Cambridge University Press.
4. Mises, R. (1964) *Mathematical Theory of Probability and Statistics*. New York: Academic Press.
5. Reichenbach, H. (1949) *The Theory of Probability*. California: University of California Press.
6. Popper, K. (2004) *Logika nauchnogo issledovaniya* [The Logic of Scientific Discovery]. Moscow: Respublika.
7. Suppes, P. (2002) *Representation and Invariance of Scientific Structures*. Stanford: CSLI.
8. Shafer, G. (1990) The unity and diversity of probability. In: Von Fustenberg, G. (ed.) *Acting Under Uncertainty: Multidisciplinary Conceptions*. Boston: Kluwer. pp. 435–462.
9. Ville, J. (1939) *Etude critique de la notion de collectif*. Paris: Gauthier-Villars.
10. Lambalgen, M. (n.d.) *Randomness and foundations of probability: von Mises' axiomatization of random sequences*. [Online] Available from: <https://pdfs.semanticscholar.org/853a/5cdd7c2e443f898dca230d31ac4556970d76.pdf>. (Accessed 15th May 2018).
11. Gillies, D. (2003) *Philosophical Theories of Probability*. London: Routledge.
12. Kolmogorov, A.N. (1974) *Osnovnye ponyatiya teorii veroyatnostey* [Foundations of the Theory of Probability]. Moscow: Nauka.
13. Khinchin, A.Ya. (1961) Chastotnaya teoriya R. Misesa i sovremennyye idei teorii veroyatnostey [Frequency theory of Mises and contemporaries ideas of probability theory]. *Voprosy filosofii*. 1. pp. 91–102.
14. Shafer, G. & Vovk, V. (2001) *Probability and Finance: It's Only a Game!* New York: A Wiley-Interscience Publication.

15. Shafer, G. & Vovk, V. (2006) The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe. *Statistical Science*. 21(1). pp. 70–98. DOI 10.1214/088342305000000467.
16. Alimov, Yu.I. (1980) *Al'ternativa metodu matematicheskoy statistiki* [Alternative of method of mathematical statistics]. Moscow: Znanie.
17. Tutubalin, V.N. (2008) *Teoriya veroyatnostey* [Theory of Probability]. Moscow: Akademiya.
18. Cartwright, N. (1999) *The Dappled World, a Study of the Boundaries of Science*. Cambridge: Cambridge University Press.