Е.А. Тимошенко

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МОДУЛЕЙ НАД CSP-КОЛЬЦАМИ¹

Исследуется тензорное произведение модулей над csp-кольцами. Получены критерии равенства такого произведения нулю. Полностью описаны чистые подмодули и плоские модули в категории модулей над csp-кольцом.

Ключевые слова: csp-кольцо, тензорное произведение, чистый подмодуль, плоский модуль.

1. Введение

Через $\mathbf{Z}$ и J_p мы обозначаем кольцо целых чисел и кольцо целых p -адических чисел соответственно; ■ – символ конца доказательства или его отсутствия.

Пусть L – некоторое бесконечное множество простых чисел. Для числа $p \in L$ зафиксируем кольцо R_p , которое совпадает либо с J_p , либо с некоторым кольцом вычетов $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ (для разных p число $k > 0$ может быть разным). Обозначим

$$K = \prod_{p \in L} R_p \text{ и } T = \bigoplus_{p \in L} R_p \subset K;$$

очевидно, что T – идеал кольца K .

Назовём csp-кольцом всякое содержащее T подкольцо R кольца K , такое, что факторкольцо $R_0 = R/T$ есть поле. Если L совпадает с множеством всех простых чисел и $R_p = J_p$ при всех p , а R_0 изоморфно полю рациональных чисел $\mathbf{Q}$, то соответствующее csp-кольцо (оно определено однозначно) называют *кольцом псевдорациональных чисел*. Это кольцо было независимо введено в работах Фомина [1] и Крылова, Пахомовой и Подберезиной [2] для исследования ряда важных классов смешанных абелевых групп. Позже Крылов предложил рассматривать csp-кольца (как обобщение кольца псевдорациональных чисел).

Зиновьев [3] дал описание инъективных модулей над csp-кольцами; в работах [4] и [5] автором были получены структурные теоремы для проективных модулей над такими кольцами. В настоящей статье полностью описаны чистые подмодули и плоские модули над произвольным csp-кольцом R .

Напомним основную терминологию, касающуюся чистых подмодулей.

Определение. Подмодуль B правого S -модуля A называется:

– *чистым* (говорят также «чистым в смысле Кона»), если для каждого левого S -модуля F индуцируемый естественным вложением модуля B в A гомоморфизм $B \otimes_S F \rightarrow A \otimes_S F$ является мономорфизмом;

– *$\cap$ -чистым*, если $B \cap Ax = Bx$ при всех $x \in S$.

Известно, что каждое прямое слагаемое модуля является чистым и $\cap$ -чистым подмодулем; для $\cap$ -чистой подгруппы (абелевой) группы используется и термин

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2020-1479/1).

«сервантная подгруппа». Из того, что кольца $\mathbf{Z}$ и J_p являются областями главных идеалов, можно вывести (см. [6]) следующее утверждение:

Теорема 1. а) Подгруппа абелевой группы чиста в том и только в том случае, когда она сервантна (т.е. $\cap$ -чиста).

б) Если A есть J_p -модуль, то его подмодуль B чист в том и только в том случае, когда $B \cap p^k A = p^k B$ для всех $k > 0$ (т.е. когда B является $\cap$ -чистым подмодулем). ■

Для $p \in L$ кольца R_p и их единичные элементы e_p естественным образом отождествляются с соответствующими идеалами и идемпотентами кольца R , в этом случае $R_p = Re_p$. Заметим, что кольцо R_p ($p \in L$) допускает ровно одну модульную структуру как над самим собой, так и над кольцом R ; поэтому в дальнейшем мы рассматриваем все R_p как R -модули, не оговаривая это дополнительно.

Если A – модуль над R , будем писать $A_0 = A/AT$ и $A_p = Ae_p$ для $p \in L$ (заметим, что это согласуется с обозначениями R_0 и R_p). Очевидно, A_p является R_p -модулем при любом $p \in L_0$, где $L_0 = L \cup \{0\}$. Для всякого R -модуля A можно рассматривать точную последовательность R -модулей

$$0 \longrightarrow AT \longrightarrow A \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0, \quad (1)$$

при этом справедливы равенства

$$AT = A \cdot \bigoplus_{p \in L} Re_p = \bigoplus_{p \in L} Ae_p = \bigoplus_{p \in L} A_p. \quad (2)$$

Утверждения следующей леммы устанавливаются непосредственно.

Лемма 2. Пусть A – модуль над кольцом R . Тогда:

- а) $A = A_p \oplus A(1 - e_p)$ для любого $p \in L$;
- б) для любых различных $p, q \in L_0$ выполнено $(A_p)_q = 0$;
- в) $(A_0)_0 \cong A_0$ и для любого $p \in L$ выполнено $(A_p)_p = A_p$;
- г) $A = 0$ в том и только в том случае, когда $A_p = 0$ для всех $p \in L_0$. ■

Напомним, что если дан кольцевой гомоморфизм $\varepsilon: S \rightarrow \Sigma$, то каждый правый (левый) Σ -модуль G можно рассматривать как правый (левый) S -модуль, полагая $gs = g\varepsilon(s)$ (соответственно $sg = \varepsilon(s)g$) при всех $g \in G$, $s \in S$. Отсюда вытекает, что для любых правого и левого модулей A и F над Σ мы можем задать канонический эпиморфизм $A \otimes_S F \rightarrow A \otimes_\Sigma F$, переводящий все элементы $a \otimes_S f$ в элементы $a \otimes_\Sigma f$ (здесь $a \in A$ и $f \in F$). Известно [7], что если гомоморфизм $S \rightarrow \Sigma$ сюръективен, то указанный канонический эпиморфизм будет изоморфизмом при любых A и F .

Замечание 3. Обе абелевых группы $A \otimes_S F$ и $A \otimes_\Sigma F$ по определению являются факторгруппами одной и той же свободной абелевой группы (свободным базисом которой служит множество $A \times F$). Таким образом, инъективность канонического эпиморфизма $A \otimes_S F \rightarrow A \otimes_\Sigma F$ эквивалентна равенству $A \otimes_S F = A \otimes_\Sigma F$.

2. Условия равенства тензорного произведения нулю

Замечание 4. Для произвольного $p \in L_0$ в силу существования гомоморфизма колец $R \rightarrow R_p$ всякий R_p -модуль естественным образом превращается в R -модуль. При этом ввиду сюръективности данного гомоморфизма тензорные произведения двух произвольных R_p -модулей над R и над R_p совпадают (см. замечание 3).

Предложение 5. Пусть A и F – модули над R , и пусть $\alpha_p: A_p \otimes_{R_p} F \rightarrow A \otimes_R F$, где $p \in L$, – гомоморфизм, индуцируемый естественным вложением модулей $A_p \rightarrow A$,

а гомоморфизм $\alpha_0: A \otimes_R F \rightarrow A_0 \otimes_R F$ индуцируется естественным эпиморфизмом $A \rightarrow A_0$. Тогда:

- а) α_p является мономорфизмом при всех $p \in L$;
- б) при всех $p \in L$ выполнено $(A \otimes_R F)_p = \text{Im } \alpha_p$;
- в) $\text{Ker } \alpha_0 = (A \otimes_R F)T$;
- г) при всех $p \in L_0$ выполнено $(A \otimes_R F)_p \cong A_p \otimes_R F \cong A_p \otimes_R F_p$.

Доказательство. Утверждение а) следует из того, что A_p – прямое слагаемое (и, значит, чистый подмодуль) модуля A , если $p \in L$.

б) Пусть $p \in L$. Для произвольных элементов $a \in A_p$ и $f \in F$ в R -модуле $A \otimes_R F$ выполнено $a \otimes_R f = ae_p \otimes_R f = (a \otimes_R f)e_p \in (A \otimes_R F)e_p$, откуда получаем, что модуль $\text{Im } \alpha_p$ содержится в модуле $(A \otimes_R F)e_p = (A \otimes_R F)_p$. Обратно, если $a \in A$ и $f \in F$, то $(a \otimes_R f)e_p = ae_p \otimes_R f \in \text{Im } \alpha_p$. Тем самым доказано, что $(A \otimes_R F)_p \subset \text{Im } \alpha_p$, а значит, справедливо равенство $(A \otimes_R F)_p = \text{Im } \alpha_p$.

в) Рассмотрим точную (см., например, [8]) последовательность

$$AT \otimes_R F \xrightarrow{\alpha} A \otimes_R F \xrightarrow{\alpha_0} A_0 \otimes_R F \longrightarrow 0, \quad (3)$$

индуцированную последовательностью (1). Ввиду (2) мы имеем

$$(A \otimes_R F)T = \bigoplus_{p \in L} (A \otimes_R F)_p = \bigoplus_{p \in L} \text{Im } \alpha_p = \text{Im } \alpha = \text{Ker } \alpha_0.$$

г) Из утверждений а) и б) следует, что $(A \otimes_R F)_p = \text{Im } \alpha_p \cong A_p \otimes_R F$. Поскольку последовательность (3) точна, то выполнено

$$(A \otimes_R F)_0 = (A \otimes_R F) / (A \otimes_R F)T = (A \otimes_R F) / \text{Ker } \alpha_0 \cong A_0 \otimes_R F.$$

Наконец, для любого $p \in L_0$ имеем $(A \otimes_R F)_p \cong ((A \otimes_R F)_p)_p \cong (A_p \otimes_R F)_p \cong A_p \otimes_R F_p$, что завершает доказательство предложения. ■

Учитывая лемму 2, приходим к такому результату.

Теорема 6. Для R -модулей A и F эквивалентны следующие условия:

- 1) $A \otimes_R F = 0$;
- 2) $A \otimes_R F_p = 0$ при всех $p \in L_0$;
- 3) $A_p \otimes_R F = 0$ при всех $p \in L_0$;
- 4) $A_p \otimes_R F_p = 0$ при всех $p \in L_0$. ■

Кроме того, из леммы 2 и предложения 5 следует, что для любых R -модулей A и F и любых различных $p, q \in L_0$ выполнено $A_q \otimes_R F_p \cong A_q \otimes_R (F_p)_q = A_q \otimes_R 0 = 0$.

С учётом замечания 4 и условия 4) теоремы 6 вопрос о равенстве $A \otimes_R F$ нулю сводится теперь к вопросу о том, при каких условиях равно нулю тензорное произведение в категории модулей над кольцом S , равным J_p , $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ или R_0 . Известен следующий факт (через $\mathbf{t}(G)$ обозначаем периодическую часть группы G):

Лемма 7. Для модулей U и V над кольцом $S = J_p$ справедливы утверждения:

- а) если $\mathbf{t}(U) = U = pU \neq 0$, то $U \otimes_S V = 0$ тогда и только тогда, когда выполнено $p(V/\mathbf{t}(V)) = V/\mathbf{t}(V)$;
- б) если $\mathbf{t}(U) = U \neq pU$, то $U \otimes_S V = 0$ тогда и только тогда, когда $pV = V$;
- в) если $\mathbf{t}(U) \neq U$ и $\mathbf{t}(V) \neq V$, то $U \otimes_S V \neq 0$. ■

Напомним, что в ситуации $S = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ категория S -модулей совпадает с категорией p^k -ограниченных абелевых групп; поскольку кольцевой гомоморфизм $J_p \rightarrow S$ сюръективен, то (см. замечание 3) тензорное произведение двух S -модулей будет одним и тем же над кольцом J_p и над кольцом S . С учётом леммы 7 и того факта, что для любого ненулевого S -модуля G выполнено $\mathbf{t}(G) = G \neq pG$, получаем такое утверждение: $U \otimes_S V = 0$ тогда и только тогда, когда $U = 0$ или $V = 0$. Ясно также,

что указанная эквивалентность остаётся верной и в том случае, когда S является полем. Приведённые рассуждения вместе с теоремой 6 и леммой 7 дают полный ответ на вопрос, когда для R -модулей A и F справедливо равенство $A \otimes_R F = 0$.

3. Плоские модули и чистые подмодули

Предложение 8. Пусть A, B, F – некоторые R -модули, причём B – подмодуль модуля A , и пусть гомоморфизмы $\beta_p: B_p \otimes_R F \rightarrow B \otimes_R F$, $\lambda_p: B_p \otimes_R F \rightarrow A_p \otimes_R F$, где $p \in L$, и гомоморфизм $\lambda: B \otimes_R F \rightarrow A \otimes_R F$ индуцированы соответственно естественными вложениями модулей $B_p \rightarrow B$, $B_p \rightarrow A_p$ и $B \rightarrow A$. Справедливы следующие утверждения:

$$\text{а) } \text{Ker } \lambda = \bigoplus_{p \in L} \beta_p (\text{Ker } \lambda_p);$$

б) λ является мономорфизмом в том и только в том случае, когда λ_p является мономорфизмом при всех $p \in L$.

Доказательство. а) Легко показать, что $B \cap AT = BT$, а значит, можно задать естественное вложение модуля $B_0 = B/BT$ в модуль $A_0 = A/AT$; это вложение обозначим через μ . Пусть $\lambda_0: B_0 \otimes_R F \rightarrow A_0 \otimes_R F$ есть гомоморфизм, индуцированный вложением μ , а $\alpha_0: A \otimes_R F \rightarrow A_0 \otimes_R F$ и $\beta_0: B \otimes_R F \rightarrow B_0 \otimes_R F$ – это гомоморфизмы, индуцированные естественными эпиморфизмами $A \rightarrow A_0$ и $B \rightarrow B_0$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_R F & \xrightarrow{\beta_0} & B_0 \otimes_R F \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \otimes_R F & \xrightarrow{\alpha_0} & A_0 \otimes_R F \end{array}$$

(вертикальные отображения – λ и λ_0) коммутативна, так как и гомоморфизм $\lambda_0\beta_0$, и гомоморфизм $\alpha_0\lambda$ переводят каждый элемент $b \otimes_R f$, где $b \in B$ и $f \in F$, в элемент $(b + AT) \otimes_R f$. Заметим, что $\mu(B_0)$ – подпространство R_0 -пространства A_0 , а значит, $\mu(B_0)$ служит для A_0 прямым слагаемым (и как R_0 -пространство, и как R -модуль). Следовательно, $\mu(B_0)$ – чистый подмодуль R -модуля A_0 , а λ_0 – мономорфизм.

Пусть $y \in \text{Ker } \lambda$, тогда ввиду предложения 5 имеем

$$y \in \text{Ker}(\alpha_0\lambda) = \text{Ker}(\lambda_0\beta_0) = \text{Ker } \beta_0 = (B \otimes_R F)T = \bigoplus_{p \in L} \text{Im } \beta_p.$$

Поэтому для подходящего конечного подмножества $X \subset L$ справедливо равенство

$$y = \sum_{p \in X} \beta_p(y_p), \text{ где } y_p \in B_p \otimes_R F.$$

Пусть $\alpha_p: A_p \otimes_R F \rightarrow A \otimes_R F$ – это гомоморфизм, индуцируемый естественным вложением $A_p \rightarrow A$. Зафиксируем $p \in X$ и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & B_p \otimes_R F & \xrightarrow{\beta_p} & B \otimes_R F \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_p \otimes_R F & \xrightarrow{\alpha_p} & A \otimes_R F \end{array}$$

(вертикальные отображения – λ_p и λ ; строки диаграммы являются точными ввиду предложения 5). Так как $y_p e_p = y_p$, то $y = \sum_{p \in X} \beta_p(y_p e_p) = \sum_{p \in X} \beta_p(y_p) e_p$; отсюда

$$0 = \lambda(y) e_p = \lambda(y e_p) = \lambda(\beta_p(y_p) e_p) = \lambda(\beta_p(y_p e_p)) = \lambda(\beta_p(y_p))$$

и, следовательно, $y_p \in \text{Ker}(\lambda\beta_p) = \text{Ker}(\alpha_p\lambda_p) = \text{Ker } \lambda_p$ (при любом $p \in X$).

Тем самым мы доказали, что справедливо включение

$$\text{Ker } \lambda \subset \sum_{p \in L} \beta_p(\text{Ker } \lambda_p). \quad (4)$$

Стоящая в правой части (4) сумма является прямой (поскольку прямой является сумма подмодулей $\text{Im } \beta_p \subset B \otimes_R F$ по всем p из L). Верно и обратное включение, так как $\beta_p(\text{Ker } \lambda_p) = \beta_p(\text{Ker}(\alpha_p \lambda_p)) = \beta_p(\text{Ker}(\lambda \beta_p)) \subset \text{Ker } \lambda$ для любого $p \in L$.

Утверждение б) сразу вытекает из а) в силу инъективности гомоморфизмов β_p при всех $p \in L$. ■

С учётом замечания 4 и условия 4) теоремы 9 вопрос об инъективности гомоморфизма $B \otimes_R F \rightarrow A \otimes_R F$, индуцированного естественным вложением модулей $B \rightarrow A$, сводится к аналогичному вопросу для R_p -модулей.

Теорема 9. Пусть A, B, F – некоторые R -модули, причём $B \subset A$. Эквивалентны следующие условия:

- 1) гомоморфизм $B \otimes_R F \rightarrow A \otimes_R F$ инъективен;
- 2) гомоморфизм $B_p \otimes_R F \rightarrow A_p \otimes_R F$ инъективен для всех $p \in L$;
- 3) гомоморфизм $B \otimes_R F_p \rightarrow A \otimes_R F_p$ инъективен для всех $p \in L$;
- 4) гомоморфизм $B_p \otimes_R F_p \rightarrow A_p \otimes_R F_p$ инъективен для всех $p \in L$.

Доказательство. Эквивалентность 1) и 2) уже установлена в предложении 8. Поскольку справедлива импликация 1) $\Rightarrow$ 2), то из инъективности гомоморфизма $B \otimes_R F_p \rightarrow A \otimes_R F_p$ для какого-то $p \in L$ немедленно следует, что инъективен также гомоморфизм $B_p \otimes_R F_p \rightarrow A_p \otimes_R F_p$ – а это даёт нам импликацию 3) $\Rightarrow$ 4).

4) $\Rightarrow$ 3). Допустим, что гомоморфизм $B_p \otimes_R F_p \rightarrow A_p \otimes_R F_p$, где $p \in L$, является инъективным. Для произвольного $q \in L \setminus \{p\}$ имеем $A_q \otimes_R F_p = B_q \otimes_R F_p = 0$. Таким образом, при всех $q \in L$ гомоморфизм $B_q \otimes_R F_p \rightarrow A_q \otimes_R F_p$ инъективен. Поскольку справедлива импликация 2) $\Rightarrow$ 1), получаем, что гомоморфизм $B \otimes_R F_p \rightarrow A \otimes_R F_p$ также инъективен.

Установим теперь эквивалентность условий 2) и 4). Зафиксируем $p \in L$; пусть $\alpha_p: A_p \otimes_R F_p \rightarrow A_p \otimes_R F$ и $\beta_p: B_p \otimes_R F_p \rightarrow B_p \otimes_R F$ – гомоморфизмы, индуцированные вложением $F_p \rightarrow F$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & B_p \otimes_R F_p & \xrightarrow{\beta_p} & B_p \otimes_R F \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_p \otimes_R F_p & \xrightarrow{\alpha_p} & A_p \otimes_R F \end{array}$$

(вертикальные отображения индуцируются вложением модулей $B_p \rightarrow A_p$). В силу предложения 5 строки диаграммы являются точными и, кроме того, выполняется $A_p \otimes_R F = (A_p \otimes_R F)e_p = (A_p \otimes_R F)_p = \text{Im } \alpha_p$, а значит, α_p – изоморфизм (аналогичное утверждение верно и для β_p). Отсюда ясно, что первое вертикальное отображение будет инъективным тогда и только тогда, когда инъективно второе вертикальное отображение. ■

Теорема 10 по сути обобщает данное в работе [9] описание плоских модулей над кольцом псевдорациональных чисел.

Теорема 10. Для R -модуля F эквивалентны следующие условия:

- 1) F – плоский R -модуль;
- 2) F_p – плоский R -модуль для всех $p \in L$;
- 3) F_p – плоский R_p -модуль для всех $p \in L$;
- 4) F_p является R_p -модулем без кручения для всех $p \in L$, таких, что выполнено $R_p = J_p$, и свободным R_p -модулем для всех $p \in L$, таких, что $R_p \neq J_p$.

Доказательство. Импликация $1) \Rightarrow 2)$ получается из того факта, что каждый модуль F_p , где $p \in L$, служит прямым слагаемым R -модуля F .

$2) \Rightarrow 3)$. Пусть F_p – плоский R -модуль; зафиксируем некоторый модуль A над кольцом R_p и подмодуль $B \subset A$. Гомоморфизм $B \otimes_R F_p \rightarrow A \otimes_R F_p$, индуцируемый естественным вложением $B \rightarrow A$, инъективен, откуда в силу замечания 4 следует, что F_p – плоский R_p -модуль.

$3) \Rightarrow 1)$. Пусть A – произвольный R -модуль и B – его подмодуль. Из условия 3) и замечания 4 вытекает, что индуцированный естественным вложением модулей $B_p \rightarrow A_p$ гомоморфизм $B_p \otimes_R F_p \rightarrow A_p \otimes_R F_p$ является мономорфизмом для всякого $p \in L$, а значит, ввиду теоремы 9 индуцируемый вложением $B \rightarrow A$ гомоморфизм $B \otimes_R F \rightarrow A \otimes_R F$ – тоже мономорфизм. Получаем, что F – плоский R -модуль.

Эквивалентность условий 3) и 4) следует из двух хорошо известных фактов:

- J_p -модуль G является плоским тогда и только тогда, когда $\mathbf{t}(G) = 0$;
- модуль над кольцом $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ является плоским тогда и только тогда, когда он свободен. ■

Теорема 11. Пусть B – подмодуль R -модуля A . Тогда эквивалентны условия:

- 1) B – чистый подмодуль R -модуля A ;
- 2) $B \cap AI = BI$ для любого идеала I кольца R ;
- 3) B есть $\cap$ -чистый подмодуль R -модуля A ;
- 4) B_p – чистый подмодуль R_p -модуля A_p при всех $p \in L$;
- 5) $B_p \cap A_p I = B_p I$ для любого $p \in L$ и любого идеала I кольца R_p ;
- 6) B_p есть $\cap$ -чистый подмодуль R_p -модуля A_p при всех $p \in L$.

Доказательство. Известно, что импликация $1) \Rightarrow 2)$ имеет место для модулей над произвольным кольцом R (см. [6]).

$2) \Rightarrow 3)$. Полагая $I = Rr$ для произвольного элемента $r \in R$, получаем требуемое равенство $B \cap Ar = Br$.

$3) \Rightarrow 6)$. Поскольку мы договорились отождествлять R_p с идеалом кольца R , то всякий элемент $x \in R_p$ можно считать принадлежащим R . Ввиду условия 3) имеем $B_p \cap A_p x \subset B \cap Ax = Bx = B(e_p x) = B_p x$; следовательно, $B_p \cap A_p x = B_p x$ (включение $B_p x \subset B_p \cap A_p x$ очевидно).

Импликации $4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 6)$ доказываются так же, как $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$.

$6) \Rightarrow 4)$. Из условия 6) вытекает, что B_p – сервантная подгруппа группы A_p для каждого $p \in L$. По теореме 1 получаем, что B_p – чистый подмодуль R_p -модуля A_p (как в случае $R_p = J_p$, так и в случае $R_p \neq J_p$).

$4) \Rightarrow 1)$. Пусть F – некоторый R -модуль. Из условия 4) и замечания 4 следует, что для каждого $p \in L$ гомоморфизм $B_p \otimes_R F_p \rightarrow A_p \otimes_R F_p$ будет мономорфизмом; применяя теорему 9, получаем, что гомоморфизм $B \otimes_R F \rightarrow A \otimes_R F$ тоже является мономорфизмом. Таким образом, B – чистый подмодуль R -модуля A . ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Fomin A.A. Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian Groups and Modules. Basel et al.: Birkhäuser, 1999. P. 87–100. DOI: 10.1007/978-3-0348-7591-2.
2. Крылов П.А., Пахомова Е.Г., Подберезина Е.И. Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С. 47–51.
3. Зиновьев Е.Г. Инъективные и делимые модули над csp-кольцами // Вестник ТГУ. 2007. № 299. С. 96–97.
4. Тимошенко Е.А. Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел // Журнал СФУ. Математика и физика. 2011. Т. 4. № 4. С. 541–550.

5. Тимошенко Е.А. Проективные модули над csp-кольцами // Журнал СФУ. Математика и физика. 2012. Т. 5. № 4. С. 581–585.
6. Lam T.Y. Lectures on modules and rings. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1999. DOI: 10.1007/978-1-4612-0525-8.
7. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир, 1977.
8. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: Иностр. лит., 1960.
9. Царев А.В. Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел // Мат. заметки. 2006. Т. 80. № 3. С. 437–448. DOI: 10.4213/mzm2830.

Статья поступила 07.05.2020 г.

Timoshenko E.A. (2020) TENSOR PRODUCT OF MODULES OVER CSP-RINGS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 56–63

DOI 10.17223/19988621/66/4

Keywords: csp-ring, tensor product, pure submodule, flat module.

Let us fix an infinite set L of primes. For every $p \in L$, let R_p be either the ring J_p of p -adic integers or the residue class ring $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ (the number $k > 0$ may depend on p). Define

$$K = \prod_{p \in L} R_p \text{ and } T = \bigoplus_{p \in L} R_p \subset K;$$

it is clear that T is an ideal of the ring K . By a *csp-ring* we mean any subring R of the ring K such that $T \subset R$ and the quotient ring R/T is a field.

For any $p \in L$ the ring R_p and its identity e_p can be identified with the corresponding ideal and idempotent of R (then $R_p = Re_p$). If A is an R -module, then we write $A_0 = A/AT$ and $A_p = Ae_p$ for $p \in L$ (in particular, $R_0 = R/T$). It is obvious that A_p is an R_p -module for any $p \in L \cup \{0\}$.

Theorem 6. Let A and F be R -modules. The following conditions are equivalent:

- 1) $A \otimes_R F = 0$;
- 2) $A \otimes_R F_p = 0$ for all $p \in L \cup \{0\}$;
- 3) $A_p \otimes_R F = 0$ for all $p \in L \cup \{0\}$;
- 4) $A_p \otimes_R F_p = 0$ for all $p \in L \cup \{0\}$.

If S coincides with J_p , with $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ or with a field, then the criteria under which $U \otimes_S V = 0$ are well-known. Thus Theorem 6 gives a full answer to the question of when $A \otimes_R F = 0$.

The last two theorems provide a complete description of flat modules and pure submodules in the category of modules over an arbitrary csp-ring R .

Theorem 10. Let F be an R -module. The following conditions are equivalent:

- 1) F is a flat R -module;
- 2) F_p is a flat R -module for all $p \in L$;
- 3) F_p is a flat R_p -module for all $p \in L$;
- 4) F_p is a free R_p -module for all $p \in L$ with $R_p \neq J_p$, and is a torsion-free R_p -module for all $p \in L$ such that $R_p = J_p$.

Definition. We say that a submodule B of a right S -module A is

– *pure* if for every left S -module F the homomorphism $B \otimes_S F \rightarrow A \otimes_S F$ induced by the inclusion map $B \rightarrow A$ is a monomorphism;

– $\cap$ -*pure* if $B \cap Ax = Bx$ for every $x \in S$.

Theorem 11. For a submodule B of an R -module A , the following are equivalent:

- 1) B is a pure submodule of the R -module A ;
- 2) $B \cap AI = BI$ for every ideal I of R ;
- 3) B is a $\cap$ -pure submodule of the R -module A ;
- 4) B_p is a pure submodule of the R_p -module A_p for every $p \in L$;
- 5) $B_p \cap A_p I = B_p I$ for every $p \in L$ and every ideal I of R_p ;
- 6) B_p is a $\cap$ -pure submodule of the R_p -module A_p for every $p \in L$.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 16D40

Financial support. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2020-1479/1).

Egor A. TIMOSHENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Fomin A.A. (1999) Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers. *Abelian Groups and Modules*. Basel et al.: Birkhäuser. pp. 87–100. DOI: 10.1007/978-3-0348-7591-2.
2. Krylov P.A., Pakhomova E.G., Podberezina E.I. (2000) Ob odnom klasse smeshannykh abelevykh grupp [On one class of mixed abelian groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 47–51.
3. Zinoviev E.G. (2007) In'ektivnye i delimye moduli nad csp-kol'tsami [Injective and divisible modules over csp-rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 299. pp. 96–97.
4. Timoshenko E.A. (2011) Proyektivnye moduli nad kol'tsom psevdoratsional'nykh chisel [Projective modules over the ring of pseudorational numbers]. *Zhurnal Sibirskogo Federal'nogo Universiteta. Matematika i Fizika – Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 4(4). pp. 541–550.
5. Timoshenko E.A. (2012) Proyektivnye moduli nad csp-kol'tsami [Projective modules over csp-rings]. *Zhurnal Sibirskogo Federal'nogo Universiteta. Matematika i Fizika – Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 5(4). pp. 581–585.
6. Lam T.Y. (1999) *Lectures on Modules and Rings*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer. DOI: 10.1007/978-1-4612-0525-8.
7. Faith C. (1973) *Algebra*. Vol. 1. Berlin; Heidelberg; New York: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-80634-6.
8. Cartan H., Eilenberg S. (1956) *Homological algebra*. Princeton: Princeton University Press.
9. Tsarev A.V. (2006) Projective and generating modules over the ring of pseudorational numbers. *Math. Notes*. 80(3). pp. 417–427. DOI: 10.1007/s11006-006-0155-y.

Received: May 7, 2020