УДК 534.113

DOI 10.17223/19988621/66/9

Ф.Ю. Кузнецов

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ СПОСОБ ЧАСТОТНОГО АНАЛИЗА ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Теоретически обоснован и экспериментально проверен электромагнитный способ, позволяющий определять собственные частоты поперечных колебаний стержня при различных граничных условиях. На его основе разработан метод электромагнитной вибродиагностики для неразрушающего контроля стержневых конструкций, а также метод экспериментального определения коэффициента внутреннего трения электропроводных материалов.

Ключевые слова: *стержень, поперечные колебания, магнитное поле, вибрации, вибродиагностика, внутреннее трение.*

Переход машиностроения к цифровым методам связан, в частности, с разработкой и внедрением теоретически обоснованных методов вибродиагностики различных конструкций при неразрушающем контроле. В связи с этим возникает проблема адекватного теоретического описания и создания экспериментального оборудования для исследований вибрационных процессов в различных конструкциях с учетом условий их закрепления [1–5]. Многие конструктивные элементы и детали, применяемые в машино- и приборостроении, имеют стержневую форму, поэтому актуальным является исследование поперечных вибраций стержневых конструкций. Обычно при вибродиагностике стержней используются магнитострикционные датчики [1], которые устанавливаются в определенных точках испытуемой конструкции. Они фиксируют характеристики колебаний только определенных точек, иногда этого недостаточно, чтобы сделать вывод о наличии или отсутствии дефекта конструкции. Кроме того, присоединение датчиков к конструкции изменяет ее инерционные и упругие свойства, что необходимо учитывать при расчете собственных частот. Возникает приоритетная идея бесконтактной вибродиагностики. Ее предлагается [2–5] решить за счет использования внешнего магнитного поля.

Цель настоящего исследования заключается в теоретическом обосновании и экспериментальной проверке электромагнитного метода частотного анализа стержневых систем. Этот метод также можно использовать для экспериментального определения коэффициента внутреннего трения конкретных стержневых конструкций. Основное внимание уделяется теоретическому описанию поперечных колебаний консольного электропроводного стержня во внешнем магнитном поле.

1. Поперечные колебания консольного электропроводного стержня в магнитном поле

В монографии [4] детально исследованы колебания двухопорного электропроводного стержня в магнитном поле. Амплитудные функции в этом случае являются синусоидальными, что облегчает математическую часть исследования. Установлено соответствие между частотами собственных поперечных колебаний стержня и частотами электрического сигнала, возникающего в цепи, замыкающей его концы. При этом обнаружены следующие особенности:

1) набор частот электрического сигнала зависит от ширины и расположения активного участка $\Delta z = z_2 - z_1$, на котором действует внешнее магнитное поле;

2) выделяется группа собственных частот колебаний стержня, которые не отражаются в электрическом сигнале, то есть электромагнитное воздействие обладает селективным свойством;

3) магнитная сила, действующая на стержень, увеличивает фактор затухания свободных колебаний, поэтому в каждом частном случае необходимо сравнивать по величине механическую и электромагнитную диссипацию.

Исследуем поперечные колебания консольного электропроводного стержня длиной l в плоскости Oxz в присутствии внешнего магнитного поля (рис. 1). Однородное и стационарное магнитное поле действует на участке $\Delta z = z_2 - z_1$, вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ направлен перпендикулярно плоскости колебаний стержня. Концы стержня замкнуты электрическим контуром, обладающим импедансом R .

Рис. 1. Консольный стержень в магнитном поле
Fig. 1. Cantilever beam in a magnetic field

В монографии [4] составлено дифференциальное уравнение поперечных колебаний электропроводного стержня, находящегося во внешнем магнитном поле. Запишем его для случая, когда импеданс внешней цепи значительно превышает сопротивление стержня:

$$EJ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta^* \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{B^2}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz = 0, \quad (1)$$

где $u(z, t)$ – динамическая функция смещений, зависящая от продольной координаты и времени; EJ – изгибная жесткость стержня; β – коэффициент внешнего демпфирования, зависящий от свойств окружающей среды; β^* – демпфирующий коэффициент, зависящий от свойств материала стержня; m_0 – погонная масса стержня; R – полное сопротивление электрической цепи. Последний член в уравнении (1) соответствует электромагнитной силе.

Интегродифференциальное уравнение в частных производных (1) обычно при помощи процедуры Фурье сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Представим динамическую функцию смещений в виде бесконечного ряда по собственным амплитудным функциям X_n :

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(z),$$

где q_r – обобщенные координаты системы, в качестве которых можно принять смещения точек максимального прогиба при каждой форме колебаний, $X_n(z)$ – безразмерные функции.

Используя процедуру Фурье применительно к интегродифференциальному уравнению (1), с учетом ортогональности собственных амплитудных функций, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{B^2 \gamma_r}{\chi_r m_0 R} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \gamma_n \quad (r=1, 2, \dots). \quad (2)$$

Здесь p_r – собственные циклические частоты и использованы обозначения

$$\chi_r = \int_0^l X_r^2 dz; \quad \gamma_r = \int_{z_1}^{z_2} X_r dz; \quad \gamma_n = \int_{z_1}^{z_2} X_n dz. \quad (3)$$

Правые части этих уравнений соответствуют электромагнитной силе. При условии

$$\gamma_r = \int_{z_1}^{z_2} X_r dz = 0 \quad (r=1, 2, \dots) \quad (4)$$

электромагнитное воздействие отсутствует, а следовательно, в замыкающей цепи не генерируется электрический сигнал. Условие (4) определяет группу колебательных мод, которые не подвергаются электромагнитному воздействию и не регистрируются анализатором, включенным в замыкающую цепь.

Собственные амплитудные функции консольного стержня выражаются в ортогональных функциях Крылова [6]:

$$X_r(z) = C_1 K_1(\alpha_r z) + C_2 K_2(\alpha_r z) + C_3 K_3(\alpha_r z) + C_4 K_4(\alpha_r z) \quad (r=1, 2, \dots), \quad (5)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – константы, подлежащие определению, α_r – волновые числа, которые связаны с собственными частотами p_r соотношениями

$$\alpha_r^4 = \frac{p_r^2 m_0}{EJ} \quad (r=1, 2, \dots). \quad (6)$$

Консольному стержню соответствуют граничные условия:

$$\begin{aligned} X_r(0) &= 0; & X_r'(0) &= 0; \\ X_r''(l) &= 0; & X_r'''(l) &= 0. \end{aligned}$$

С помощью условий на закрепленном конце стержня определяются первые две константы: $C_1 = 0, \quad C_2 = 0$.

Граничные условия на свободном конце приводят к системе уравнений:

$$\begin{aligned} X_r''(l) &= C_3 K_1(\lambda_r) + C_4 K_2(\lambda_r) = 0; \\ X_r'''(l) &= C_3 K_4(\lambda_r) + C_4 K_1(\lambda_r) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\lambda_r = \alpha_r l$. Из первого уравнения (7) получаем соотношение

$$C_3 = -C_4 \frac{K_2(\lambda_r)}{K_1(\lambda_r)}.$$

Масштабируем собственные амплитудные функции, приняв $C_4 = 1$. С учетом этого из второго уравнения (7) получаем уравнение частот:

$$K_1^2(\lambda_r) - K_2(\lambda_r) K_4(\lambda_r) = 0 \quad (r=1, 2, \dots), \quad (8)$$

которое можно представить в форме

$$\cos(\lambda_r) = -\frac{1}{ch(\lambda_r)} \quad (r=1, 2, \dots). \quad (9)$$

Первые корни уравнения (9) имеют значения [6]: $\lambda_1 = 1.875$; $\lambda_2 = 4.694$. Волновые числа соответственно равны: $\alpha_1 = 4.6875 \text{ м}^{-1}$; $\alpha_2 = 11.735 \text{ м}^{-1}$. Применяя формулу (6), можно определить собственные частоты p_1 и p_2 для стержня, который используется в эксперименте при $m_0 = 0.077 \text{ кг/м}$, $EJ = 4.45 \text{ Нм}^2$:

$$p_1 = 167.509 \text{ с}^{-1}, \quad p_2 = 1049.837 \text{ с}^{-1}.$$

Амплитудные функции с учетом значений констант принимают вид

$$X_r(\alpha_r z) = K_4(\alpha_r z) - \frac{K_2(\lambda_r)}{K_1(\lambda_r)} K_3(\alpha_r z) \quad (r=1, 2, \dots). \quad (10)$$

На рис. 2 изображены две первые амплитудные формы колебаний консольного стержня длиной $l = 0.4 \text{ м}$ с учетом выбранного масштаба. При $r=1$ электромагнитное воздействие проявляется при любом расположении активного участка, так как все точки линии изгиба смещаются в одной фазе. При $r=2$ выделяются участки стержня, смещающиеся в противофазе. Следовательно, можно выбрать такое расположение и такую ширину активного участка, при которых ток в стержне не индуцируется и электромагнитное воздействие отсутствует. Определим положение активного участка (магнитов), при котором электромагнитное воздействие на вторую моду отсутствует.

Рис. 2. Амплитудные функции X_1 и X_2

Fig. 2. Amplitude functions X_1 and X_2

Используя условие (4), составим уравнение частот изолированных колебаний:

$$K_1(\alpha_r z_2) - K_1(\alpha_r z_1) - \frac{K_2(\lambda_r)}{K_1(\lambda_r)} (K_4(\alpha_r z_2) - K_4(\alpha_r z_1)) = 0 \quad (r=1, 2, \dots). \quad (11)$$

Пусть магнитное поле создается плоскими магнитами шириной $\Delta z = z_2 - z_1 = 0.06 \text{ м}$. Условию отсутствия электромагнитного воздействия отвечает случай, при котором $\lambda_2 = 4.694$. На рис. 3 изображены два графических решения уравнения (11) при различных положениях активного участка: в первом случае $z_1 = 0.85l$, $z_2 = l$; во втором случае $z_1 = 0.7l$, $z_2 = 0.85l$. Второй случай соответствует поставленному условию, поскольку график пересекает ось абсцисс при значении близком к $\lambda_2 = 4.694$.

Рис. 3. Графические решения уравнения частот изолированных колебаний при различных местоположениях магнитов

Fig. 3. Graphical solutions to the equation of frequency of the isolated oscillations at different locations of magnets

Присутствие внешнего магнитного поля приводит к возникновению распределенной электромагнитной силы, которая действует на стержень. В случае собственных колебаний магнитная сила является демпфирующей, что приводит к изменению факторов затухания парциальных колебаний. Как показано выше, электромагнитное воздействие обладает избирательностью (селективностью) по отношению к колебательным модам. Очевидно, и факторы затухания различных парциальных колебаний стержня за счет электромагнитного воздействия изменяются в различной мере. Можно определить моды, факторы которых не изменяются при колебаниях стержня в магнитном поле.

Уравнения, входящие в систему (2), являются взаимосвязанными, поскольку их правые части содержат весь набор обобщенных скоростей. С помощью метода расщепления [4] систему уравнений (2) можно упростить. Оставим в первом уравнении только первый член суммы, стоящий в правой части, во втором – два и т.д. Получим систему уравнений, которые можно интегрировать последовательно, начиная с первого:

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_1 + \left(\beta + \beta^* p_1^2 + \frac{B^2 \gamma_1^2}{\chi_1 m_0 R} \right) \dot{q}_1 + p_1^2 q_1 &= 0; \\
 \ddot{q}_2 + \left(\beta + \beta^* p_2^2 + \frac{B^2 \gamma_2^2}{\chi_2 m_0 R} \right) \dot{q}_2 + p_2^2 q_2 &= -\frac{B^2 \gamma_1 \gamma_2}{\chi_2 m_0 R} \dot{q}_1; \\
 &\dots\dots\dots \\
 \ddot{q}_r + \left(\beta + \beta^* p_r^2 + \frac{B^2 \gamma_r^2}{\chi_r m_0 R} \right) \dot{q}_r + p_r^2 q_r &= -\frac{B^2 \gamma_r}{\chi_r m_0 R} (\gamma_1 \dot{q}_1 + \dots + \gamma_{r-1} \dot{q}_{r-1}).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Используя уравнения (12), определим факторы затухания $\tilde{h}_r$ и демпфированные частоты $\tilde{p}_r$ нескольких первых колебаний, используя формулы

$$\tilde{h}_r = \frac{1}{2} \left(\beta + \beta^* p_r^2 + \frac{B^2 \gamma_r^2}{\chi_r m_0 R} \right); \quad \tilde{p}_r = \sqrt{p_r^2 - \tilde{h}_r^2}. \tag{13}$$

Механическая диссипация определяется коэффициентами β и β^* . Значения этих коэффициентов можно оценить лишь приблизительно, используя табличные данные, например: $\beta = 3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, $\beta^* = 6 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Однако, следует понимать, что эти значения требуется уточнять для каждой конкретной экспериментальной установки. Обозначим коэффициент магнитной диссипации $\beta_r^{(m)} = B^2 \gamma_r^2 / (\chi_r m_0 R)$.

В таблице приведены расчеты факторов затухания и демпфированных частот при индукции магнитов $B = 1 \text{ Тл}$ и их расположении в соответствии с координатами $z_1 = 0.7l$, $z_2 = 0.85l$. Импеданс осциллографа $R = 10^6 \text{ Ом}$. Видно, что магнитная диссипация намного меньше механической и не влияет на демпфированные частоты колебаний. Этот факт можно отметить как достоинство электромагнитного способа измерения собственных частот: при больших значениях импеданса частотного анализатора электромагнитное воздействие практически не искажает собственные частоты стержня, то есть измеряемые значения совпадают с демпфируемыми частотами в отсутствие магнитного поля.

	$p_r, \text{ с}^{-1}$	$\tilde{h}_r, \text{ с}^{-1}$	$\beta_r^{(m)}, \text{ с}^{-1}$	$\tilde{p}_r, \text{ с}^{-1}$
$r = 1$	167.51	42.09	$7,8 \cdot 10^{-7}$	167.13
$r = 2$	1049.84	1653.24	$1,9 \cdot 10^{-8}$	Апериодич.затухание
$r = 3$	2939.87	12964.25	$7,0 \cdot 10^{-7}$	Апериодич.затухание

Заметим, что магнитная диссипация при $r = 2$ существенно меньше, чем $r = 1$ и $r = 3$. Это объясняется выбором положения активного участка, при котором электромагнитное воздействие на вторую моду практически исключается.

2. Экспериментальная проверка теоретических результатов

Проверка теоретических расчетов произведена на специально сконструированной установке (рис. 4, а). На массивной станине смонтирована стойка, на которой консольно закреплен алюминиевый стержень круглого сечения длиной 40 см и диаметром 6 мм. Внешнее однородное стационарное магнитное поле создается двумя плоскими постоянными магнитами, изготовленными из сплава неодим – бор. Такие магниты позволяют создать очень сильное магнитное поле. При близком расположении двух плоских магнитов, как указано на рис. 4, между ними создается магнитное поле с индукцией, близкой к 1 Тл. Вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости колебаний стержня, магнитное поле создано на участке $\Delta l = z_2 - z_1 = 0.06 \text{ м}$. Для регистрации электрических импульсов использовался электронный осциллограф OWON SDS7102V, соединённый с концами электропроводного стержня.

Цели эксперимента: 1) экспериментальная проверка метода электромагнитного частотного анализа при поперечных колебаниях консольного стержня; 2) получение экспериментальных данных для определения коэффициента внутреннего трения, возникающего в стержне.

В первой серии экспериментов стержень совершал собственные плоские колебания в поле двух магнитов, при этом магнитное поле действовало на участке $z_1 = 0.7l$, $z_2 = 0.85l$, который соответствует приведенным выше теоретическим расчетам.

Рис. 4. Схема экспериментальной установки (а); осциллограмма электрического сигнала (б)
Fig. 4. (a) Installation diagram of the experimental facility; (b) oscillogram of an electric signal

С помощью магнитного поля механические колебания стержня преобразовываются в электрический сигнал, считываемый осциллографом. На экране осциллографа отражается затухающая периодическая кривая (рис. 4, б). Измерив период колебаний, можно вычислить частоту. В результате серии опытов определено значение основной частоты колебаний стержня: $\nu_1 = (20 \pm 3)$ Гц. Соответственно циклическая демпфированная частота имеет значение $\tilde{\rho}_1 = (125.6 \pm 15) \text{ c}^{-1}$. Различие теоретического значения и результата эксперимента объясняется двумя причинами: 1) невысокой точностью измерений периода колебаний из-за «шумовых» помех; 2) неточностью принятых коэффициентов механической диссипации β и β^* .

Во второй серии экспериментов применен резонансный метод: с помощью генератора сигналов специальной формы Tabor WW2571A, включенного в электрическую цепь, подается электрический ток определенной частоты. Возникают вынужденные колебания стержня под действием электромагнитной силы. При совпадении частоты электрического сигнала с собственной частотой колебаний стержня, наступает резонанс и стержень вибрирует с максимальной амплитудой. Эксперимент проводился с постепенным увеличением частоты входного сигнала шагом 0.1 Гц. Максимальная амплитуда колебаний достигалась при частоте сигнала 23 Гц, а при дальнейшем повышении частоты входного сигнала, амплитуда колебаний стержня постепенно уменьшалась. Для проверки совершалось постепенное понижение задаваемой частоты и максимальная амплитуда колебаний замечена так же при частоте в 23 Гц. Следовательно, можно сделать вывод, что основная собственная частота колебаний стержня с достаточно высокой степенью точности $\nu_1 = (23 \pm 0.1)$ Гц. Соответственно циклическая демпфированная частота имеет значение $\tilde{\rho}_1 = (144.4 \pm 0.6) \text{ c}^{-1}$. Используя это значение, можно более точно оценить механическую диссипацию в данной экспериментальной установке:

$$\tilde{h}_1 = \sqrt{p_1^2 - \tilde{\rho}_1^2} = 84.8 \text{ c}^{-1}.$$

Основной причиной механической диссипации при поперечных колебаниях металлического стержня является внутреннее трение, поэтому коэффициент β^* можно достаточно точно определить из соотношения:

$$\beta^* \approx \frac{2\tilde{h}_1}{p_1^2} = 0,006 \text{ c}.$$

Таким образом, предложенный электромагнитный метод можно использовать для исследования явления внутреннего трения конкретных электропроводных материалов и сплавов.

Заключение

Полученные в настоящем исследовании результаты можно использовать для обоснования электромагнитного метода вибродиагностики. Его суть заключается в экспериментальном определении собственных частот поперечных колебаний детали, имеющей стержневую форму. Вначале определяется первая собственная частота эталонного образца, не имеющего дефектов. В ходе испытания деталей сравниваются их частоты с эталонной частотой. При наличии в детали трещин и других внутренних дефектов эти частоты заметно различаются. Достоинства этого метода: отсутствие разрушений образца, бесконтактный способ измерений, неизменяемость механических свойств образца в процессе испытаний.

Эту же экспериментальную установку можно использовать для изучения внутренних свойств электропроводных материалов, в частности для определения внутреннего трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петрухин В.В., Петрухин С.В. Основы вибродиагностики и средства измерения вибрации: учеб. пособие. М.: Инфра-Инженерия, 2010. 176 с.
2. Томилин А.К., Байзакова Г.А. Управление частотами колебаний упругих электромеханических систем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 3(19). С. 87–92.
3. Томилин А.К., Байзакова Г.А. Электромагнитный способ подстройки частоты виброметра // Изв. вузов. Физика. 2012. № 6/2. С. 244–247.
4. Томилин А.К. Колебания электромеханических систем с распределенными параметрами. Усть-Каменогорск, 2004. 286 с.
5. Tomilin A.K., Kurilskaya N.F. Vibrations of a conductive string in a nonstationary magnetic field under presence of two nonlinear factors // J. Applied and Industrial Mathematics. 2017. V. 11. No. 4. P. 600–604. DOI: 10.1134/S1990478917040184.
6. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
7. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. № 6. С. 83–89.
8. Ахтямов М.А., Каримов А.Р. Диагностирование местоположения трещины в стержне по собственным частотам продольных колебаний // Техническая акустика (электронный журнал). 2010. № 3.
9. Гладвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 608 с.
10. Лаврович Н.И. Собственные частоты колебаний стержней // Омский научный вестник. 2000. С. 106–108.

Статья поступила 26.03.2019 г.

Kuznetsov F.Yu. (2020) AN ELECTROMAGNETIC METHOD FOR FREQUENCY ANALYSIS OF TRANSVERSE VIBRATIONS OF A BEAM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 112–120

DOI 10.17223/19988621/66/9

Keywords: beam, transverse oscillations, magnetic field, vibrations, vibrodiagnostics, internal friction.

Vibration-based diagnostics of constructions is an obligatory technical procedure in mechanical engineering. In this regard, there is a problem of an adequate theoretical description of vibration processes in various structures with account for end fixity conditions, as well as the creation of experimental facilities for non-contact testing.

The paper presents a theoretical basis and experimental verification results for a method of electromagnetic frequency analysis of rod systems. The essence of the method is the experimental determination of natural oscillation frequencies and their comparison with reference values. The main attention is paid to a theoretical description of transverse vibrations of a cantilever conductive rod in an external magnetic field in order to determine reference frequencies of a defect-free sample.

The presence of the external magnetic field gives rise to the distributed electromagnetic force exerted on the rod. In the case of natural oscillations, the magnetic force is damping, which leads to a change in damping factors of partial oscillations. The electromagnetic effect is selective towards vibrational modes; hence, the damping factors of various partial oscillations of the rod vary to different degrees. This fact allows one to determine an optimal location of the area with acting magnetic field, as well as its width when measuring a given frequency of sample testing.

The proposed method has several advantages: indestructibility of the sample, non-contact measurements, invariability of mechanical properties of the sample during the tests.

Fedor Yu. KUZNETSOV (National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kuznetsov_f@mail.ru

REFERENCES

1. Petrukhin V.V., Petrukhin S.V. (2010) *Osnovy vibrodiagnostiki i sredstva izmereniya vibratsii: uchebnoe posobie*. [Fundamentals of vibration-based diagnostics and vibration measuring instruments: a textbook]. Moscow: Infra-Inzheneriya.
2. Tomilin A.K., Bayzakova G.A. (2012) Upravlenie chastotami kolebaniy uprugikh elektromekhanicheskikh sistem [Control over oscillation frequencies of resilient electromechanical systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(19). pp. 87–92.
3. Tomilin A.K., Bayzakova G.A. (2012) Elektromagnitnyy sposob podstroyki chastoty vibrometra [An electromagnetic method of vibrometer frequency adjusting]. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 6/2. pp. 244–247.
4. Tomilin A.K. (2004) *Kolebaniya elektromekhanicheskikh sistem s raspredelennymi parametrami* [Oscillations of electromechanical systems with distributed parameters]. Ust-Kamenogorsk.
5. Tomilin A.K., Kuril'skaya N.F. (2017) Vibrations of a conductive string in a nonstationary magnetic field under presence of two nonlinear factors. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 11(4). pp. 600–604. DOI: 10.1134/S1990478917040184.
6. Babakov I.M. (1968) *Teoriya kolebaniy* [Theory of oscillations]. Moscow: Nauka.
7. Il'garnov M.A., Khakimov A.G. (2009) Diagnosis of damage of a cantilever beam with a notch. *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 6. pp. 430–435.
8. Akhtyamov M.A., Karimov A.R. (2010) Diagnostirovanie mestopolozheniya treshchiny v sterzhne po sobstvennym chastotam prodol'nykh kolebaniy [Diagnosis of a crack location in a rod based on natural frequencies of longitudinal vibrations]. *Elektronnyy zhurnal «Tekhnicheskaya akustika» – Electronic Journal Technical Acoustics*. 3.
9. Gladwell G.M.L. (2008) *Obratnye zadachi teorii kolebaniy* [Inverse problems of the theory of oscillations]. Moscow – Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy
10. Lavrovich N.I. (2000) Sobstvennyye chastoty kolebaniy sterzhney [Natural frequencies of vibrations of rods]. *Omskiy nauchnyy vestnik – Omsk Scientific Bulletin*. pp. 106108.

Received: March 26, 2019