

УДК 532.542, 532.135

DOI 10.17223/19988621/67/8

Е.И. Борзенко, Д.Н. Гарбузов

ИССЛЕДОВАНИЕ УЧАСТКА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ¹

Рассматривается течение степенной жидкости в круглой трубе, на входе которой задан однородный профиль скорости. Сформулирована математическая постановка и разработан численный алгоритм решения, основанный на методе контрольного объема и корректирующей процедуре SIMPLE. Проведены параметрические исследования задачи в диапазоне изменения числа Рейнольдса Re от 0.1 до 80 и степени нелинейности n от 0.2 до 1.5. Проиллюстрировано разделение области течения на зону гидродинамической стабилизации потока в окрестности входной границы и зону одномерного течения. Построены зависимости размеров зоны стабилизации в зависимости от Re и n . Продемонстрировано согласование численных результатов с данными других исследований.

Ключевые слова: *степенная жидкость, труба, участок гидродинамической стабилизации, метод контрольного объема, параметрические исследования.*

Участок гидродинамической стабилизации ламинарного потока вязкой жидкости в плоском канале или круглой трубе, на котором происходит полное развитие профиля скорости от однородного до установившегося, исследуется достаточно давно. Так, в 1922 году в [1] была впервые проанализирована зона установления потока ньютоновской жидкости в круглой трубе. В настоящее время данные о длине зоны стабилизации представляют интерес для конструкторов и инженеров, разрабатывающих технологическое оборудования для переработки жидких материалов, в особенности проявляющих неньютоновские свойства. Сложность экспериментального измерения длины делает численное моделирование надежной альтернативой. Обзор экспериментальных и численных исследований для случая ньютоновской и псевдопластичных сред представлен в [2, 3]. Однако несмотря на обширность исследований данного течения существуют противоречия в данных по значениям длины участка стабилизации [3].

Зона установления течения степенной жидкости в плоских каналах подробно исследована в работе [4]. Представлена аппроксимация длины участка установления L_0 в зависимости от значений числа Рейнольдса Re и степени нелинейности n , учитывающая немонотонность ее поведения в области малых значений n и конечное значение длины для ползущего течения. В работах [2, 5, 6] были приведены результаты исследования развития потока псевдопластичной жидкости. Продемонстрировано, что при умеренных значениях числа Рейнольдса длина зоны гидродинамической стабилизации является функцией степени нелинейности, в то время как при больших значениях Re рассматриваемая зависимость некорректна. Кроме того, получена зависимость длины зоны установления течения неньюто-

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00412).

новской жидкости в трубе от степени нелинейности. В работах [7, 8] исследуются течения бингамовского пластика.

В настоящей работе проведено математическое моделирование ламинарного течения несжимаемой степенной жидкости в осесимметричной трубе в интервале изменения степени нелинейности, захватывающем и псевдопластичный и дилатантный диапазоны, с целью определения длины зоны гидродинамической стабилизации потока. При этом использованы различные методики определения длины зоны и проведен их сравнительный анализ.

Постановка задачи

Рассматривается ламинарное установившееся течение степенной несжимаемой жидкости в круглой осесимметричной трубе радиусом R . Используется цилиндрическая система координат. Область течения ограничена твердыми стенками (Γ_2), входным (Γ_3) и выходным (Γ_4) сечениями (рис. 1). Во входном сечении (Γ_3) задается однородный профиль скорости. В сечении Γ_4 задается нулевая радиальная компонента скорости и выполняется мягкое граничное условие, которое предполагает нулевую производную аксиальной скорости по z . В силу симметрии потока относительно оси трубы искомые функции не будут зависеть от угловой координаты. На границе Γ_1 выполняется условие симметрии потока, на Γ_2 – условие прилипания. Продольный размер трубы выбирается достаточным, чтобы исключить влияние входной границы на характер течения в выходном сечении.

Математическая постановка включает уравнения движения и неразрывности, которые в безразмерных переменных в векторном виде записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \text{Re}(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\eta \mathbf{E}), \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Реологическое поведение среды описывается законом Оствальда – де Вааля, в соответствии с которым эффективная вязкость определяется формулой

$$\eta = A n^{-1}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{U} – вектор скорости с проекциями (U, V) на оси цилиндрической системы координат (r, z) , p – давление, $A = \sqrt{2e_{ij}e_{ji}}$ – интенсивность тензора скоростей

деформаций E , где $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right)$, $\text{Re} = \frac{\rho U_0^{2-n} R^n}{k}$ – число Рейнольдса, ρ –

плотность жидкости, k – консистенция среды, n – коэффициент нелинейности. В качестве безразмерных масштабов длины, скорости и давления используются

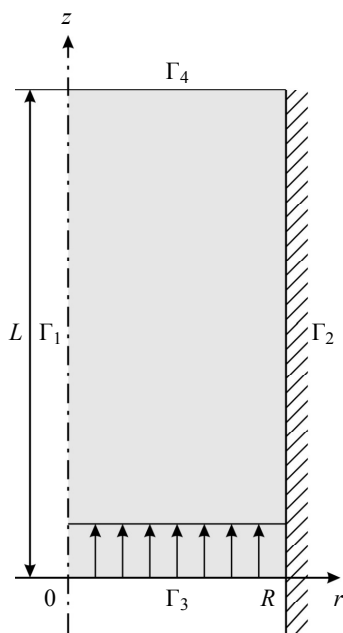


Рис. 1. Область течения и система координат
Fig. 1. Flow region and a system of axes

величины: R , U_0 – значение скорости во входном сечении и комплекс $k \left(\frac{U_0}{R} \right)^n$.

Перечисленные граничные условия, дополняющие систему уравнений (1), (2), запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \frac{\partial V}{\partial r} &= 0, \quad U = 0; \\ \Gamma_2 : V &= 0, \quad U = 0; \\ \Gamma_3 : V &= 1, \quad U = 0; \\ \Gamma_4 : \frac{\partial V}{\partial z} &= 0, \quad U = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, решение задачи сводится к отысканию полей скорости и давления, удовлетворяющих системе уравнений (1), (2) с граничными условиями (3). Зона, в которой происходит перестроение течения, называется зоной гидродинамической стабилизации потока, размеры которой определяются параметрами задачи и видом граничных условий. При этом в выходном сечении реализуется течение, описываемое в рамках одномерной задачи об установившемся движении степенной жидкости в трубе под действием перепада давления, обеспечивающим единичный расход [9].

Метод решения

Сформулированная задача решается численно с помощью метода контрольных объемов и корректирующей процедуры SIMPLE [10], при этом дискретизация уравнения движения проводится с использованием противопоточной схемы. Для нахождения стационарных полей скорости и давления применяется метод установления [11], который предполагает добавление в уравнения движения производной скорости по времени, при этом расчеты ведутся до установления стационарного режима. Данная методика успешно применялась для решения задачи о напорном течении жидкости в канале сложной конфигурации [12]

В табл. 1 приведены значения аксиальной скорости на оси V_1 в выходном сечении и относительной погрешности $\varepsilon = \frac{V_{\text{теор}} - V_1}{V_{\text{теор}}} \cdot 100\%$, где $V_{\text{теор}} = \frac{3n+1}{n+1}$, вы-

численные на последовательности сеток. Представленные результаты демонстрируют аппроксимационную сходимость численной методики.

Т а б л и ц а 1

Аппроксимационная сходимость при $Re = 20$; $n = 0.75$

Шаг сетки	V_1	ε , %
1/10	1.836971	1.086185
1/20	1.849712	0.400185
1/40	1.852771	0.235415
1/80	1.852774	0.235415

В табл. 2 представлены значения длины участка гидродинамической стабилизации L_0 на последовательности сеток, вычисленные в соответствии с методиками различных авторов. Величина длины L_{01} определяется как расстояние от входа в трубу до сечения, в котором значение касательного напряжения на стенке отличается от напряжения стабилизированного течения не более чем на 1% [13]. Выражение для стабилизированного касательного напряжения на стенке определяется формулой

$$\tau_{\text{ст}} = \left(\frac{dV}{dr} \Big|_{\text{ст}} \right)^n = \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n$$

и следует из аналитического решения задачи об установившемся течении степенной жидкости в круглой трубе. Длина участка установления L_{02} определяется как расстояние от входного сечения до сечения, в котором аксиальная скорость при $r = 0$ будет составлять 0.99 от $V_{\text{теор}}$ [2]. Величина L_{03} определяется исходя из того, что в стабилизированном потоке жидкости радиальная составляющая скорости близка к нулю и не превосходит значение 0.01.

Таблица 2

Аппроксимационная сходимость L_0 при $Re = 10$; $n = 0.75$

Шаг сетки	L_{01}	L_{02}	L_{03}
1/10	2.5479	6.6063	2.2825
1/20	2.8152	3.6912	2.2879
1/40	2.9710	3.4873	2.2859
1/80	3.0167	3.4819	2.2839

Аппроксимационная сходимость расчета длины зоны наблюдается для любого способа расчета, однако вычисленные значения отличаются друг от друга, что может являться причиной различий при сравнении результатов различных авторов, отмеченные в работе [3]. Все дальнейшие расчеты выполнены на сетке с шагом 1/40 с использованием второй методики определения длины участка гидродинамической стабилизации потока.

Результаты расчетов

В результате численного эксперимента показано, что в области течения можно выделить два характерных участка: участок двумерного распределения кинематических характеристик в окрестности входа и участок одномерного распределения в остальной части области течения (рис. 2). В зоне одномерного распределения характеристики потока соответствуют полностью развитому течению в трубе с единичным расходом. В зоне двумерного распределения происходит перестроение однородного профиля в полностью развитый. В литературе ее называют зоной гидродинамической стабилизации потока. Размеры последней определяются параметрами жидкости и потока. При проведении параметрических расчетов величина длины канала выбиралась достаточной для того, чтобы в выходном сечении поток соответствовал одномерному установившемуся течению рассматриваемой жидкости с единичным расходом. Видно, что на входе в окрестности стенки образуется пик давления.

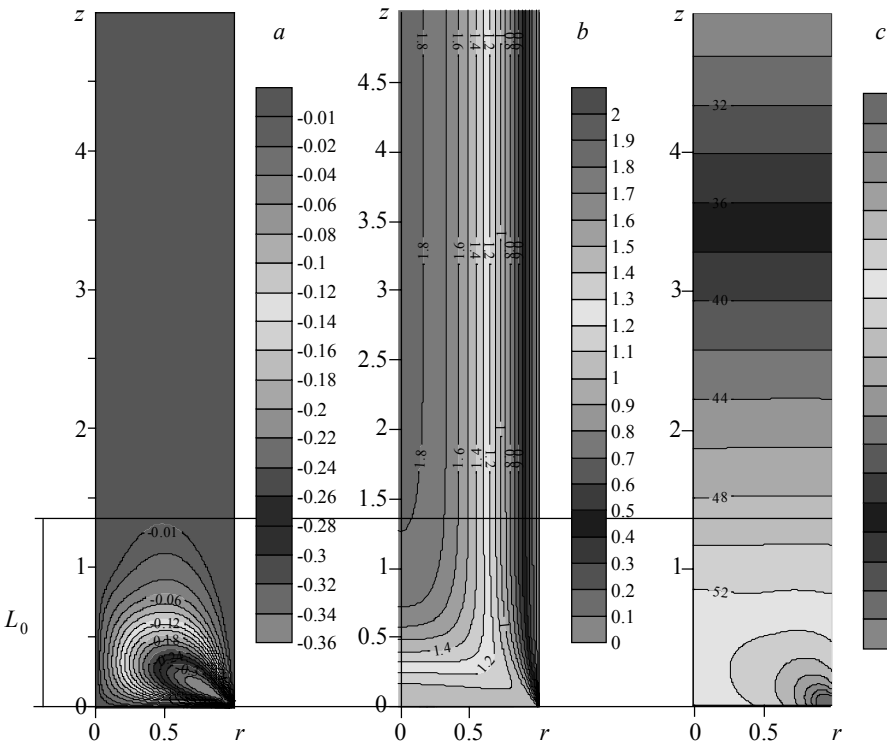


Рис. 2. Поля распределения U (a), V (b) и P (c) при $Re = 0.1$, $n = 0.7$
Fig. 2. Distributions of (a) U , (b) V , and (c) P at $Re = 0.1$, $n = 0.7$

На рис. 3 продемонстрированы распределения компоненты скорости V в поперечных сечениях с ростом аксиальной координаты для значений $n = 0.2$ и 1.5 . Видно, что изначально однородный профиль скорости постепенно перестраивается. Наряду с торможением потока на стенке, где реализуется условие прилипания, вблизи оси симметрии трубы скорость увеличивается. В конечном итоге профиль скорости соответствует полностью развитому, определяемому по следующей формуле [9]:

$$V = \frac{3n+1}{n+1} \left(1 - r^{\frac{n+1}{n}} \right).$$

Скорость V , соответствующая развитому профилю, обозначена на рис. 3 точками. Отметим, что с уменьшением степени нелинейности профиль скорости в зоне одномерного течения больше соответствует изначально однородному, заданному во входном сечении, профилю.

Сравнение распределений скорости V вдоль оси трубы и в выходном сечении с результатами [14] при разных значениях коэффициента нелинейности представлено на рис. 4. Сплошная линия – результаты настоящей работы, пунктирная – результаты [14]. Наблюдается хорошее качественное и количественное совпадение результатов для всех значений n . Видно, что с уменьшением значения n происходит уменьшение максимальной скорости на выходе.

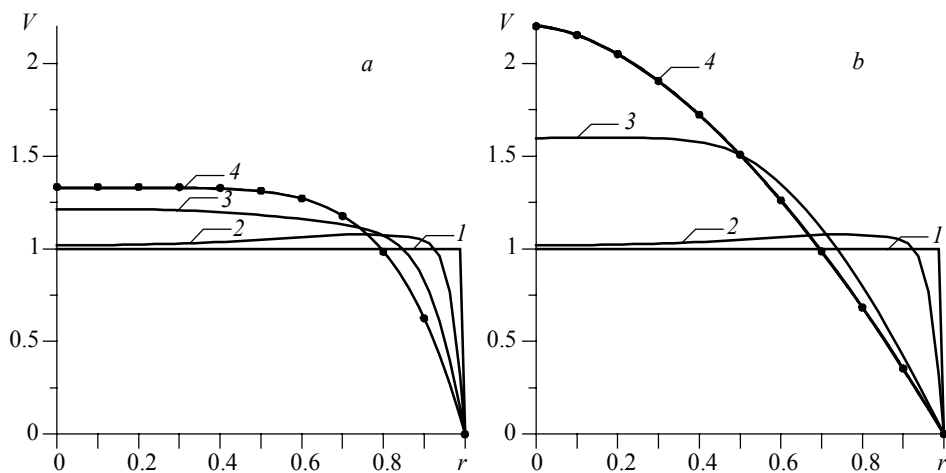


Рис. 3. Развитие профиля аксиальной скорости при $Re = 10$:

$a - n = 0.2, z = 0$ (1), 0.25 (2), 0.875 (3), 15 (4); $(b) n = 1.5; z = 0$ (1), 0.25 (2), 0.625 (3), 10 (4)

Fig. 3. Development of the axial velocity profile at $Re = 10$:

(a) $n = 0.2, z = (1) 0, (2) 0.25, (3) 0.875, \text{ and } (4) 15$; (b) $n = 1.5; z = (1) 0, (2) 0.25, (3) 0.625, \text{ and } (4) 10$

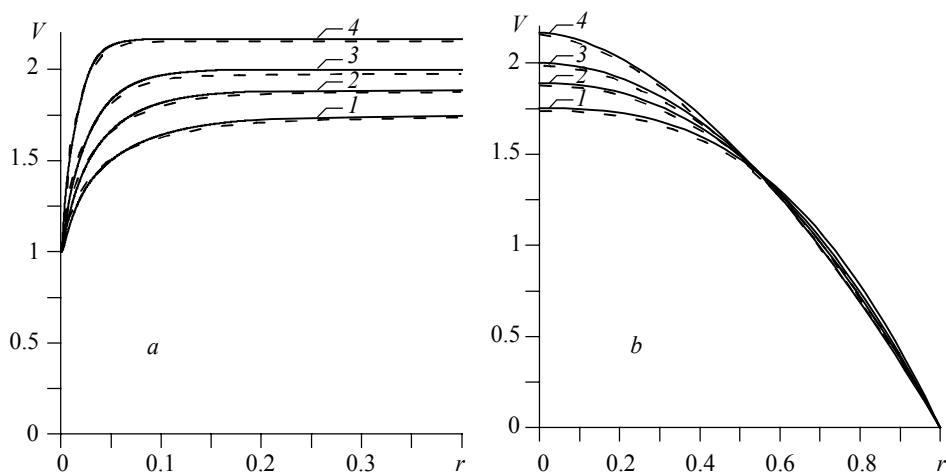


Рис. 4. Распределение аксиальной скорости на границе Γ_1 (a) и Γ_2 (b):

$Re = 100/2^n, n = 0.6$ (1), 0.8 (2), 1 (3), 1.4 (4)

Fig. 4. Axial velocity distribution at the boundary (a) Γ_1 and (b) Γ_2 :

$Re = 100/2^n, n = (1) 0.6, (2) 0.8, (3) 1, (4) 1.4$

На рис. 5 показаны результаты параметрических расчетов зависимости длины зоны гидродинамической стабилизации L_0 от степени нелинейности n при разных значениях числа Re . Как видно из графика, длина участка стабилизации растет при уменьшении n до некоторого значения, после чего начинает уменьшаться с дальнейшим уменьшением n . Такое поведение можно объяснить следующим. С одной стороны, уменьшение степени нелинейности приводит к уменьшению эффективной вязкости в окрестности стенки и, как следствие, большей длине зоны

гидродинамической стабилизации. С другой стороны, с уменьшением n полностью развитый профиль больше соответствует однородному, который задан во входном сечении, что должно приводить к меньшим размерам зоны стабилизации. По-видимому, при $n > 0.3$ доминирует первый эффект, а при $n < 0.3$ – второй.

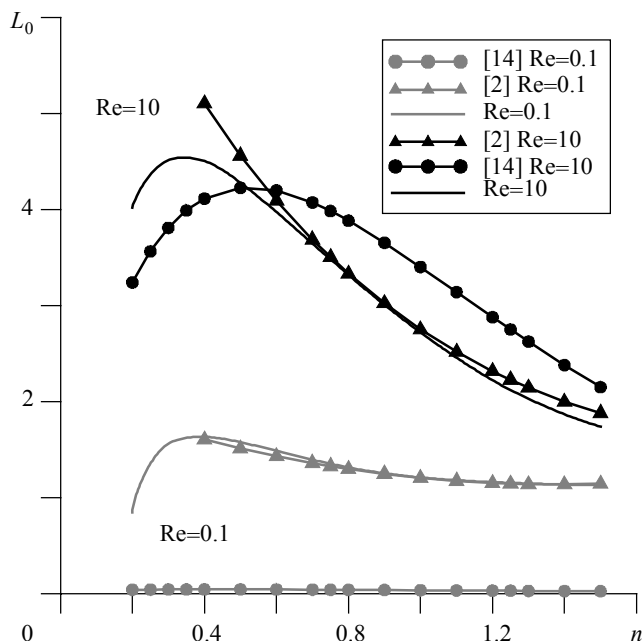


Рис. 5. Зависимости длины участка гидродинамической стабилизации L_0 от коэффициента нелинейности n при $Re = 0.01$ и 10

Fig. 5. Development length L_0 as a function of the power-law index n at $Re = 0.01$ and 10

Из рис. 5 видно, что длина участка гидродинамической стабилизации при увеличении значения числа Рейнольдса увеличивается. Представлено сравнение полученной зависимости длины участка гидродинамической стабилизации от n с работой [2]:

$$L_{02} = 2 \left[\left(0.246n^2 - 0.675n + 1.03 \right)^{1.6} + \left(0.4536 \left(\frac{2n}{6n+2} \right)^n Re \right)^{1.6} \right]^{1/1.6}.$$

Наблюдается качественное совпадение. Стоит отметить, что зависимость, описываемая формулой из работы [2], является корректной в области $0.4 < n < 1.5$, что хорошо видно из рис. 5, и не описывает немонотонность кривой. Зависимость для безразмерной длины участка установления в [15], описывается аппроксимационной формулой

$$L_{02} = 0.346 \left[\frac{3n+1}{n+1} \right]^2 \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n Re.$$

Последняя хорошо работает в области $Re > 10$ и является некорректной при малых значениях Re , не описывая конечную длину в области ползущего течения.

Рис. 6, *b* демонстрирует зависимость участка гидродинамической стабилизации от значения числа Рейнольдса в области малых Re ($0 < Re < 1$). Видно, что в области ползущего течения наблюдается слабая зависимость L_0 от Re . Из рис. 6, *a* видно, что общая картина зависимости длины зоны установления от значения числа Рейнольдса отличается от таковой для малых значений Re . Исходя из результатов, полученных при $1 < Re < 80$, можно сделать вывод, что L_0 линейно зависит от Re . Наблюдается качественное и количественное соответствие с результатами, представленными в работах [2]. Стоит отметить, что количественное совпадение с [15] имеется только в области линейной зависимости L_0 от Re .

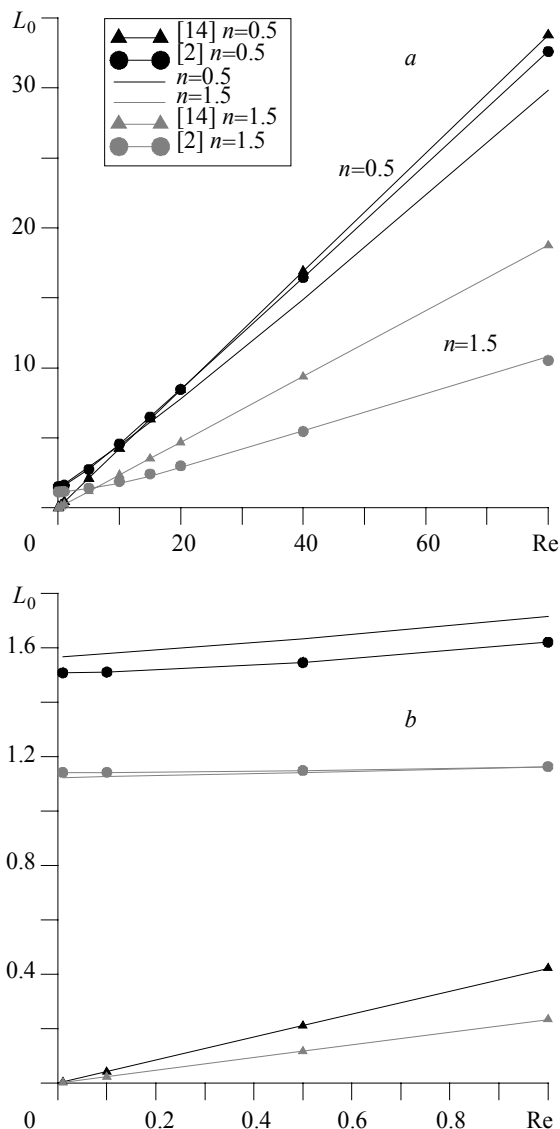


Рис. 6. Изменение L_{02} с увеличением Re
Fig. 6. Variation of L_{02} with increasing Re

Заключение

В результате проведенных исследований установлена немонотонная зависимость длины зоны гидродинамической стабилизации потока от степени нелинейности. Показано, что результаты расчетов длины зоны гидродинамической стабилизации могут значительно отличаться друг от друга в зависимости от выбранной методики её определения. С уменьшением n до некоторого значения размеры зоны увеличиваются, а после начинают уменьшаться. Показано, что зависимость L_0 от числа Рейнольдса Re в диапазоне от 1 до 80 достаточно хорошо аппроксимируется линейной зависимостью. В области малых Re размеры зоны практически не изменяются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schiller L. Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung // ZAMM – Zeitschrift für Angew. Math. und Mech. 1922. V. 2 Iss. 6. P. 478–478. DOI: 10.1002/zamm.19220020615.
2. Poole R.J., Ridley B.S. Development-length requirements for fully developed laminar pipe flow of inelastic non-Newtonian liquids // J. Fluids Eng. Trans. ASME. 2007. V. 129 Iss. 10. P. 1281–1287. DOI: 10.1115/1.2776969.
3. Durst F. et al. The development lengths of laminar pipe and channel flows // J. Fluids Eng. Trans. ASME. 2005. V. 127 Iss. 6. P. 1154–1160. DOI: 10.1115/1.2063088.
4. Fernandes C. et al. Development length in planar channel flows of inelastic non-Newtonian fluids // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2018. V. 255. P. 13–18. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2018.02.011.
5. Chebbi R. Laminar flow of power-law fluids in the entrance region of a pipe // Chem. Eng. Sci. 2002. V. 57. Iss. 21. P. 4435–4443. DOI: 10.1016/S0009-2509(02)00422-0.
6. Capobianchi M., McGah P. Developing Region Solution for High Reynolds Number Laminar Flows of Pseudoplastic and Dilatant Fluids in Circular Ducts // J. Fluids Eng. 2017. V. 139 Iss. 4. DOI: 10.1115/1.4035242.
7. Ookawara S. et al. Unified Entry Length Correlation for Newtonian, Power Law and Bingham Fluids in Laminar Pipe Flow at Low Reynolds Number // J. Chem. Eng. JAPAN. 2000. V. 33 Iss. 4. P. 675–678. DOI: 10.1252/jcej.33.675.
8. Poole R.J., Chhabra R.P. Development Length Requirements for Fully Developed Laminar Pipe Flow of Yield Stress Fluids // J. Fluids Eng. 2010. V. 132 Iss. 3. DOI: 10.1115/1.4001079.
9. Bird R.B., Dai G.C., Yarusso B.J. The Rheology and Flow of Viscoplastic Materials // Rev. Chem. Eng. 1983. V. 1. Iss. 1. P. 1–70. DOI: 10.1515/revce-1983-0102.
10. Патнкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и механики жидкости. М.: Энергоиздат, 1988. 526 с.
11. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы: введение в теорию. М.: Наука, 1973. 400 с.
12. Борзенко Е.И., Дьякова О.А. Исследование течения вязкой жидкости в Т-образном канале с условиями прилипания – скольжение на твердой стенке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 42(4). С. 58–69. DOI: 10.17223/19988621/42/6.
13. Янков В.И. и др. Переработка волокнообразующих полимеров. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 264 с.
14. Chen-I Hung, Yeong-Yan Perng. Flow of non-Newtonian fluid in the entrance region of a tube with porous walls // Int. J. Heat Fluid Flow. 1991. V. 12 Iss. 3. P. 263–268. DOI: 10.1016/0142-727X(91)90061-Y.
15. Matras Z., Nowak Z. Laminar entry length problem for power law fluids // Acta Mech. 1983. V. 48 Iss. 1–2. P. 81–90. DOI: 10.1007/BF01178498.

Статья поступила 27.05.2020 г.

Borzenko E.I., Garbuzov D.N. (2020) INVESTIGATION OF A HYDRODYNAMIC ENTRANCE REGION FOR A POWER-LAW FLUID FLOW IN A ROUND PIPE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 67. pp. 78–88

DOI 10.17223/19988621/67/8

Keywords: power-law fluid, pipe, hydrodynamic entrance region, finite volume method, parametric studies.

The paper presents a study of the Ostwald – de Waele fluid flow in a round pipe with a uniform velocity profile specified at the inlet section. Mathematical formulation of the problem is presented using dimensionless variables. A numerical algorithm is developed on the basis of the finite volume method and SIMPLE procedure. Parametric studies of the flow are carried out for the Reynolds number varying from 0.1 to 80 and the power-law index varying from 0.2 to 1.5. It is shown that the flow can be distinguished into a developing flow zone in the inlet boundary vicinity and a fully developed flow zone in the rest part of the flow region. Dependency diagrams are plotted for the development length depending on the power-law index and Reynolds number. The first diagram is found to be non-monotonic. The development length is shown to be almost linearly dependent on the Reynolds number in the range from 1 to 80. In the region of low Reynolds numbers, the length remains almost uniform. The agreement of the obtained numerical results with data from other studies is shown.

Financial support. The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-08-00412).

Evgeniy I. BORZENKO (Candidate of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

Dmitriy N. GARBUZOV (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dmitrij.garbuzov.98@mail.ru

REFERENCES

1. Schiller L. (1922) Untersuchungen über laminare und turbulente strömung. *ZAMM Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2(6). pp. 478–478. DOI: 10.1002/zamm.19220020615.
2. Poole R.J., Ridley B.S. (2007) Development-length requirements for fully developed laminar pipe flow of inelastic non-Newtonian liquids. *Journal of Fluids Engineering*. 129(10). pp. 1281–1287. DOI: 10.1115/1.2776969.
3. Durst F., Ray S., Ünsal B., Bayoumi O.A. (2005) The development lengths of laminar pipe and channel flows. *Journal of Fluids Engineering*. 127(6). pp. 1154–1160. DOI: 10.1115/1.2063088.
4. Fernandes C., Araujo M.S., Nobrega J.M., Ferras L.L. (2018) Development length in planar channel flows of inelastic non-Newtonian fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 255. pp. 13–18. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2018.02.011.
5. Chebbi R. (2002) Laminar flow of power-law fluids in the entrance region of a pipe. *Chemical Engineering Science*. 57(21). pp. 4435–4443. DOI: 10.1016/S0009-2509(02)00422-0.
6. Capobianchi M., McGah P. (2017) Developing region solution for high Reynolds number laminar flows of pseudoplastic and dilatant fluids in circular ducts. *Journal of Fluids Engineering*. 139(4). DOI: 10.1115/1.4035242.
7. Ookawara S., Ogawa K., Dombrowski N., Amooie-Foumeny E., Riza A. (2000) Unified entry length correlation for Newtonian, power law and Bingham fluids in laminar pipe flow at low Reynolds number. *Journal of Chemical Engineering of Japan*. 33(4). pp. 675–678. DOI: 10.1252/jcej.33.675.
8. Poole R.J., Chhabra R.P. (2010) Development length requirements for fully developed laminar pipe flow of yield stress fluids. *Journal of Fluids Engineering*. 132(3). DOI: 10.1115/1.4001079.

9. Bird R.B., Dai G.C., Yarusso B.J. (1983) The rheology and flow of viscoplastic materials. *Reviews in Chemical Engineering*. 1(1). pp. 1–70. DOI: 10.1515/revce-1983-0102.
10. Patankar S.V. (1988) *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i mekhaniki zhidkosti* [Numerical methods for solving problems of heat transfer and fluid dynamics]. Moscow: Energoatomizdat.
11. Godunov S.K., Ryabenkiy V.S. (1987) *Difference Schemes*. North-Holland: Elsevier Science Ltd.
12. Borzenko E.I., Diakova O.A. (2016) Issledovanie techeniya vyazkoy zhidkosti v T-obraznom kanale s usloviyami prilipaniya – skol'zheniya na tverдой stenke [Investigation of viscous fluid flow in T-shaped channel with no slip/slip boundary conditions on the solid wall. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 58–69. DOI: 10.17223/19988621/42/6.13.
13. Yankov V.I., Boyarchenko V.I., Pervadchyuk V.P., Glot I.O., Shakirov N.V. (2008) *Pererabotka voloknoobrazuyushchikh polimerov. Osnovy reologii polimerov i techenie polimerov v kanalakakh* [Processing of fiber-forming polymers. Fundamentals of the rheology of polymers and the flow of polymers in channels]. Moscow; Izhevsk: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika.
14. Chen-I Hung, Yeong-Yan Perng (1991) Flow of non-Newtonian fluid in the entrance region of a tube with porous walls. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 12(3). pp. 263–268. DOI: 10.1016/0142-727X(91)90061-Y.
15. Matras Z., Nowak Z. (1983) Laminar entry length problem for power law fluids. *Acta Mechanica*. 48(1–2). pp. 81–90. DOI: 10.1007/BF01178498.

Received: May 27, 2020