ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 Управление, вычислительная техника и информатика № 53

УДК 51-73 + 004.932.2
DOI: 10.17223/19988605/53/6

А.Г. Масловская, Л.С. Афанасов

АЛГОРИТМЫ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ СПЕЦИФИКАЦИИ РАСТРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ САМОПОДОБНЫХ СТРУКТУР

Работа посвящена развитию и применению алгоритмического подхода к оценке скейлинговых характеристик растровых изображений самоподобных структур на основе мультифрактального вейвлет-анализа. В рамках метода максимумов модулей вейвлет-преобразования предложены алгоритмы фильтрации и маркировки линий локальных экстремумов. Представлены мультифрактальные характеристики на примере анализа растровых изображений доменных структур типичных сегнетоэлектриков.
Keywords: растровые изображения; метод максимумов модулей вейвлет-преобразования; алгоритм фильтрации; алгоритм маркировки; мультифрактальные характеристики.

На современном этапе теория самоорганизации представляет перспективное направление, которое активно используется для исследования объектов, обнаруживающих самоподобие и высокую степень самоупорядочения или, напротив, обладающих свойствами диссипативности, нерегулярности, шероховатости, хаоса и беспорядка [1]. Концепции теории фракталов часто выступают в качестве теоретического базиса, привлекаемого для математической формализации и количественного анализа различных твердотельных структур.

Как известно, центральным понятием теории фракталов является фрактальная размерность. Сложные физические системы характеризуются проявлением свойств самоподобия в иерархии масштабных уровней, поэтому для спецификации таких объектов – мультифракталов – используют спектр размерностей. Основной подход в применении методов фрактального и мультифрактального анализа состоит в установлении зависимостей между физическими свойствами физического объекта и скейлинговыми характеристиками его структуры или динамического поведения. Особую роль в практике приобретают алгоритмы мультифрактальной параметризации как инструменты детального анализа дисперсии фрактальных размерностей [2]. Одной из важнейших задач рассматривается проблема обработки, характеризации и классификации сложных 2*D*- и 3*D*-структур на основе математического аппарата мультифрактального анализа.

В числе методов мультифрактального анализа растровых изображений особого внимания заслуживают методы, основанные на покрытии объекта кластерами, когда не только происходит подсчет количества «занятых» кластеров при уменьшении их размера, но и определяется их удельный вес. Методы этой группы базируются на идее метода покрытий. Другим многообещающим и непрерывно развивающимся направлением является использование вейвлет-преобразований для оценки мультифрактальных характеристик изображений. Так, метод максимумов модулей вейвлет-преобразования (ММВП), предложенный Мьюзи, Бакри и Арнеодо [3], нашел применение не только для анализа временных рядов, но и для расчета скейлинговых характеристик растровых изображений [4–5] и даже распространился на 3*D* растровые и векторные поля [6]. Альтернативными подходами являются основанный на вейвлет-преобразованиях метод мультифрактального флуктуационного анализа [7] и методы, использующие дискретное вейвлет-преобразование, в частности метод вейвлет-лидеров [8–9]. Все указанные подходы вполне сопоставимы в плане алгоритмической сложности, точности и потенциальности для расчета скейлинговых характеристик.

В числе твердотельных структур, обладающих интересными фрактальными свойствами, можно выделить особый класс полярных диэлектрических материалов – сегнетоэлектрики. Сегнетоэлектри-

ческий кристалл имеет неоднородную структуру и разбит на домены, каждому из которых соответствует определенное направление спонтанной поляризации. Способность сегнетоэлектриков переключать поляризацию под внешним воздействием обусловливает востребованность этих материалов в микроэлектронике, оптике, акустике, пиро- и пьезотехнике, приемниках и преобразователях излучений. Доменные конфигурации типичных сегнетоэлектриков являются результатом процесса самоорганизации и обнаруживают самоподобные геометрические свойства. Фрактальность сегнетоэлектрических доменов была установлена рядом независимых авторов на основе анализа растровых изображений, полученных методом селективного химического травления, поляризационным или зондовыми методами (растровой электронной микроскопии (РЭМ) и атомно-силовой микроскопии) [10–13]. Можно также отметить, что фрактальная динамика доменов, эффекты памяти, присутствие шумовых компонент в поляризационных и диэлектрических откликах, а также скачки Баркгаузена, вызванные сложным характером перестройки доменов, были исследованы с привлечением методов фрактального анализа временных рядов, теории клеточных автоматов, перколяции и математического аппарата дробного дифференцирования [14–15].

Рассматривая РЭМ-изображения сегнетоэлектрических доменов как объекты фрактального анализа, требуется учитывать их специфику. Изображения в РЭМ формируются построчно и представляют результат регистрации видеосигнала как отклика образца на воздействие электронного зонда. Поскольку мультифрактальный вейвлет-анализ предоставляет гибкий математический инструмент для диагностики сложных сигналов, возможности частных методик могут быть применены для характеризации сегнетоэлектриков. В частности, одномерный метод максимумов модулей вейвлет-преобразования может быть использован для спецификации РЭМ-контраста сложных структур на основе анализа профиля видеосигнала.

Настоящая работа направлена на развитие алгоритмов в концепции ММВП, разработку системы компьютерного анализа скейлинговых характеристик самоподобных физических структур и применение данной методики к задачам исследования мультифрактальных свойств РЭМ-изображений доменных конфигураций типичных сегнетоэлектриков.

1. Математический аппарат вейвлет-мультифрактального анализа

Теория вейвлет-анализа была разработана для исследования временных рядов с меняющимся спектральным составом и выступила конкурирующей альтернативой преобразованию Фурье, дающему локализацию частот без временного разрешения, и возможностям функций Шеннона, специфицирующих моменты времени без частотного разрешения [16]. Семейство вейвлет-анализаторов позволяет на основе частотно-временной локализации характеризовать структуру неоднородных объектов.

Вейвлет-преобразование строится на основе солитоноподобной функции ψ из пространства $L^2(R)$. В вейвлет-преобразованиях масштаб заменяет понятие частоты, применяемой в спектральном анализе. Для покрытия вейвлетами временной оси вводится сдвиг функций, и используемые вейвлеты представляются функциями вида: $\psi([t-b]/a)$, где b – сдвиг, a – масштаб. Непрерывное вейвлет-преобразование некоторой функции $g(t)$ задается в виде:

$$W(a,b)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt\,. \qquad (1)$$

Вейвлеты также ассоциируют с «математическим микроскопом», определяя параметр сдвига b как позицию «фокусировки», масштаб a – как увеличение, а сам вейвлет – как «разрешающую способность» [16]. Поскольку различные вейвлеты обладают различными особенностями во временном и частотном пространствах, ключевая роль при анализе данных отводится выбору вейвлета. Наиболее известным подходом к конструированию материнских вейвлетов является использование производных функций Гаусса: $\psi_m(t)=(-1)^m\,\partial_t^m\left[\exp\left(-t^2/2\right)\right]$. Использование производных более высоких порядков, с одной стороны, дает возможность расширить функционал вейвлета за счет извлечения детальной ин-

формации из данных, но, с другой стороны, требует контроля соотношения между гладкостью вейвлета и анализируемого сигнала. Поэтому на практике особенно востребованными оказались вейвлеты первого (WAVE-вейвлет, $m = 1$) и второго («мексиканская шляпа», или MHAT-вейвлет, $m = 2$) порядков [17].

Рассмотрим базовые концепции ММВП. Как показывает практика, более устойчивый результат метод демонстрирует при использовании предварительной нормализации и исключения линейного тренда исходного сигнала $G(t)$ путем построения его «профиля» $g(t_i) = \left|G(t_i) - \langle G \rangle\right|, \quad i = \overline{1, N}$, где $\langle G \rangle$ – среднее арифметическое значений исходного ряда. Первый шаг ММВП предполагает проведение непрерывного вейвлет-преобразования функции $g(t)$ по соотношению (1), которое часто реализуют на основе приближенного представления интеграла:

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{i=1}^{N} g_i \cdot \psi\left(\frac{i-b}{a}\right). \tag{2}$$

Многие авторы также допускают модификацию преобразований (1) и (2) с учетом умножения правой части на коэффициент $1/\sqrt{a}$ [17]. Результатом проведенного вейвлет-преобразования является зависящая от двух координат регулярная функция $W(a, b)$, для геометрической интерпретации которой традиционно используют поверхность в трехмерном пространстве и проекцию на плоскость (a, b). Другой важной характеристикой является скелетон – линии локальных экстремумов функции (максимумов и минимумов) $W(a, b)$ для каждого значения масштабного коэффициента a. Второй шаг алгоритма ММВП состоит в оценке скейлинговых характеристик анализируемых сигналов на основе полученных данных. С этой целью используют статистические функции

$$Z(q,a) = \sum_{l \in L(a)} \left|W\left(a', x_l(a')\right)\right|^q, \tag{3}$$

где $L(a)$ – множество всех линий l локальных максимумов модулей вейвлет-коэффициентов $W(a, b)$, существующих на масштабе a; q – дискретный массив эмпирически устанавливаемых параметров деформации.

Для более корректного воспроизведения функций $Z(q, a)$ при отрицательных значениях параметра деформации q оценку получают посредством вычисления максимальных значений модулей коэффициентов вейвлет-преобразования вдоль каждой линии локальных экстремумов l на всех масштабах a', меньших заданного значения масштабного параметра a, по формуле

$$Z(q,a) = \sum_{l \in L(a)} \left[\sup_{a' \le a} \left|W\left(a', x_l(a')\right)\right|\right]^q. \tag{4}$$

Выражение (4) можно формализовать в обобщенном виде: $Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}$, откуда, выполнив построение зависимостей $Z(a)$ для каждого q в двойном логарифмическом масштабе, можно получить оценку скейлинговой экспоненты $\tau(q)$, которая имеет вид линейной зависимости для монофрактальных объектов и нелинейной – для мультифракталов: $\tau(q) = qh - 1$, где $h(q)$ – альтернативная характеристика, связанная со спектром размерностей $D(q)$ фрактального множества: $D(q) = \tau(q)/(q - 1)$. Преобразование Лежандра позволяет установить связь между основными спектральными характеристиками рассматриваемого мультифрактального множества:

$$\alpha(q) = d\tau(q)/dq, \quad f(\alpha) = q \cdot \alpha - \tau(q), \tag{5}$$

где α – экспоненты Гёльдера и $f(\alpha)$ – спектр сингулярностей.

Носителем фрактальной меры является множество Ψ, представляющее собой объединение фрактальных подмножеств Ψ_α. Множество Ψ характеризуется фрактальной размерностью D, а каждое из подмножеств Ψ_α – величиной $f(\alpha < D)$.

2. Алгоритмы фильтрации и маркировки линий локальных максимумов

Анализируя ММВП, можно отметить, что ключевым этапом, представляющим сложность в алгоритмическом плане, является запись скелетона функции $W(a, b)$ согласно (1) или (2) в виде,

пригодном для дальнейшего вычисления статистических функций $Z(q, a)$. При построении линий локальных максимумов могут возникнуть цепочки «ложных» или, как отмечают авторы работы [18], «грязных» максимумов. Кроме того, возможно присутствие «висячих» или «обрывающихся» максимумов, не относящихся к продолжающимся линиям, как показано на рис. 1.

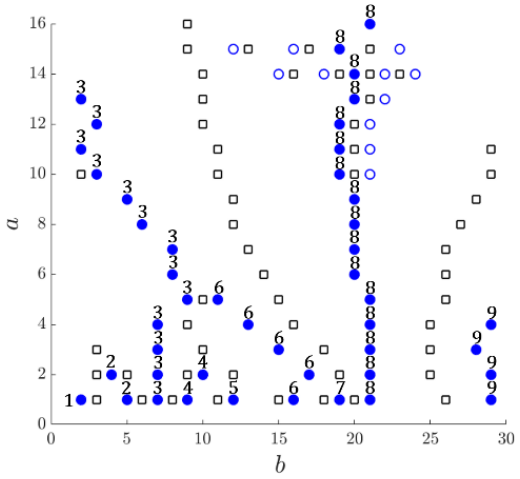


Рис. 1. Пример фильтрации и маркировки линий локальных максимумов (квадратами обозначены минимумы, закрашенными кругами – максимумы, подлежащие маркировке, пустыми кругами – «ложные» максимумы)
Fig. 1. An example of filtering and marking the local maxima lines (squares refer to minima, shaded circles – marked maxima, and empty circles – “false” maxima)

Подобные «артефакты» искажают результат вычисления значений статистических функций, поэтому возникает подзадача фильтрации линий локальных максимумов, которая позволит исключить из рассмотрения «ложные» максимумы. Данный аспект ММВП, как отмечено в работе [18], относится «к темной стороне» алгоритма. Многие авторы избегают организации подобных процедур, ограничиваясь работой с матрицей максимумов модулей коэффициентов вейвлет-преобразования, включающей «ложные» цепочки.

Результата процедуры фильтрации будет достаточно для построения функций $Z(q, a)$ по формуле (3). Однако для того, чтобы воспользоваться соотношением (4), необходимо знать, какой цепочке принадлежит подлежащий просмотру максимум, чтобы определить максимальное значение вдоль каждой линии. Здесь возникает другая подзадача – маркировки локальных максимумов. Многие авторы также отказываются от программной реализации этого подхода в пользу применения более простого соотношения (3). В рамках реализации ММВП введем в рассмотрение следующие алгоритмы фильтрации и маркировки линий локальных максимумов. Алгоритм основной функции формализован с помощью блок-схемы, приведенной на рис. 2.

Входными параметрами являются: *Scales* – диапазон изменения масштаба a; D – матрица максимумов модулей коэффициентов вейвлет-преобразования $W(a, b)$. Выходные данные: *Filt_D* – сформированная в результате фильтрации матрица максимумов модулей коэффициентов вейвлет-преобразования; *Mark_D* – матрица, содержащая уникальные для каждой линии максимумов метки.

Процесс поиска выполняется последовательно на каждом масштабе снизу вверх. На первом шаге выполняется инициализация матриц *Filt_D* и *Mark_D* как матриц с нулевыми элементами. Далее значения для первой строки матрицы *Filt_D* определяются равными значениям первой строки матрицы D. Выполняется маркировка для самого нижнего уровня масштаба a: каждый максимум маркируется цифрой и маркер инкрементируется.

На втором шаге выполняется цикличный перебор всех значений матрицы D на каждом масштабе a_i. Если при просмотре элементов массива *Filt_D* было найдено значение, отличное от нуля, то выполняется вызов вспомогательной функции *next_max*, которая выполняет поиск индексов максимума на следующем масштабе от текущей позиции. Далее осуществляется маркировка вновь найденного максимума: значение маркера равно значению маркера максимума, для которого был проведен поиск.

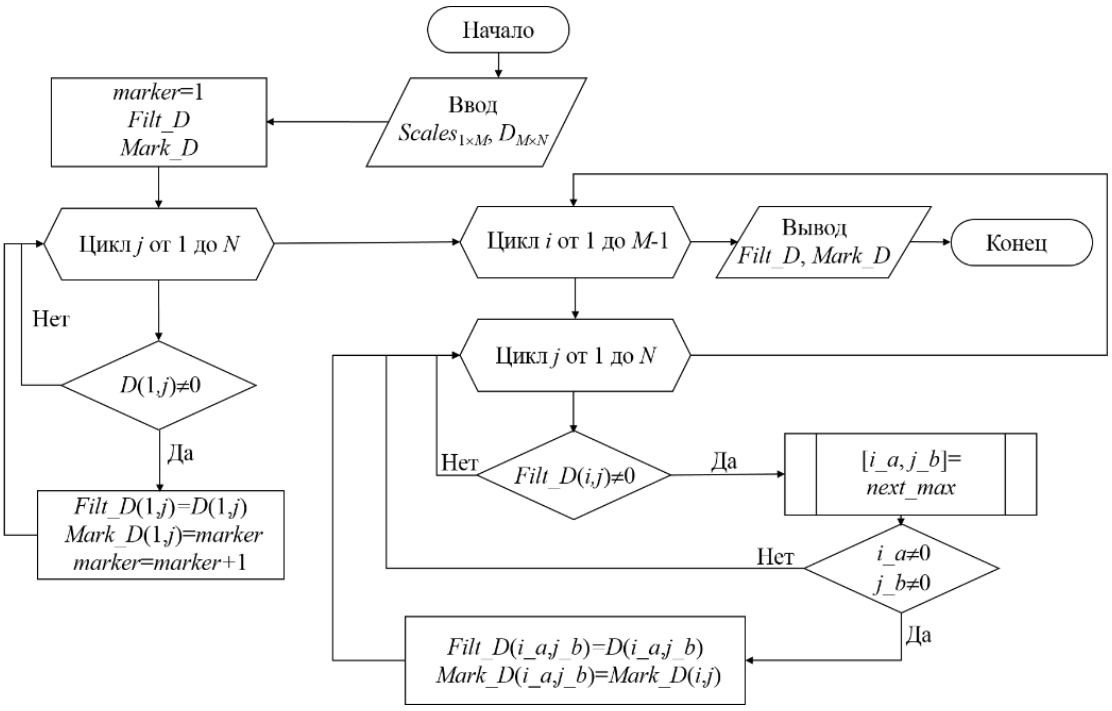


Рис. 2. Блок-схема алгоритма
Fig. 2. The flowchart of the algorithm

Входными параметрами вспомогательной функции *next_max* являются: значение масштаба a_{i+1}, на котором производится поиск максимума; массивы *D* и *Mark_D*. Выходные данные: *i_a, i_b* – позиция максимума на уровне a_{i+1}, принадлежащего той же линии, что и максимум, из которого ведется поиск. Первый этап предполагает инициализацию индексов и переменной шага для поиска. Если значение переданного искомого масштаба a_{i+1} меньше максимального возможного значения, то выполняются дальнейшие шаги алгоритма для поиска максимума, в противном случае происходит выход из функции.

Следующий шаг – фиксация диапазона для поиска максимума на текущем значении масштаба и контроль достижения границ. Выполняется проход по диапазону для поиска близлежащего немаркированного максимума на заданном масштабе. Если при переборе было найдено значение, отличное от нуля, и в матрице *Mark_D* с теми же индексами не был записан маркер, то выполняется запись индексов данного максимума. После полного прохода от крайней левой точки до крайней правой выбираются индексы того максимума, который был расположен ближе к исходной позиции по *j*. А если при полном проходе ни одного из максимума не было найдено, то функция вернет индексы нулевыми.

Предложенные алгоритмы в концепции ММВП могут быть применены для мультифрактального анализа растровых изображений. Строго говоря, особенностью описанного выше метода является его локальная одномерность: исследованию подлежит «сигнал» – выбранная строка растрового изображения. Система компьютерного анализа реализована в виде программного приложения в ППП Matlab, структура которого представлена на рис. 3. Графический интерфейс пользователя позволяет загрузить исследуемое изображение в рабочую область, зафиксировать определенный профиль изображения для анализа, осуществить выбор материнского вейвлета и выполнить расчет мультифрактальных характеристик. Модуль обработки транслирует монохромное изображение в матрицу яркости и выделяет «двумерный сигнал», соответствующий профилю изображения, выбранному пользователем. Следующий модуль выполняет вейвлет-преобразование, строит поверхность коэффициентов вейвлет-преобразования. Далее следует блок построения скелетона на основе алгоритмов фильтрации и маркировки линий локальных экстремумов, после чего ММВП рассчитываются характеристики анализируемого множества: скейлинговая экспонента $\tau(q)$, значения экспонент Гёльдера $\alpha(q)$ и спектр сингулярностей $f(\alpha)$. Программа сохраняет данные в библиотеку файлов и выводит результаты расчета в графическую область.

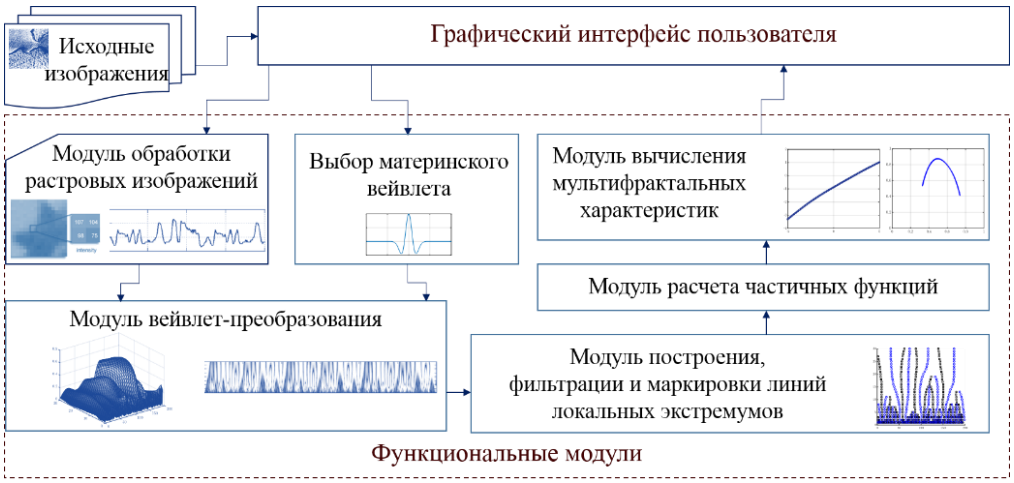


Рис. 3. Структурная схема программного приложения
Fig. 3. Block diagram of a software application

Можно заметить, что ППП Matlab имеет встроенный инструментарий не только для проведения вейвлет-преобразования (функция *cwt*), но и для мультифрактального анализа сигналов на основе методов ММВП и вейвлет-лидеров (функции *wtmm* и *dwtleader* соответственно). Применение указанных функций избавляет исследователя от необходимости программной реализации сложных алгоритмов, тем не менее «пользовательский» подход на практике встречает некоторые серьезные ограничения. Например, использование функции *wtmm* не предполагает вариацию выбора материнского вейвлета, изменение диапазона значений параметра деформации и включает только определенный набор скейлинговых характеристик. Кроме того, результат работы функции *cwt*, используемой функцией *wtmm*, не предполагает дальнейшей фильтрации максимумов. Также разработчиками предусмотрено нормированное представление при вычислении статистических функций: соотношение (3) умножается на параметр, что дает сдвиг скейлинговой экспоненты и, как следствие, сдвиг спектра сингулярностей. Таким образом, для получения адекватного результата потребуется искусственная настройка графического вывода.

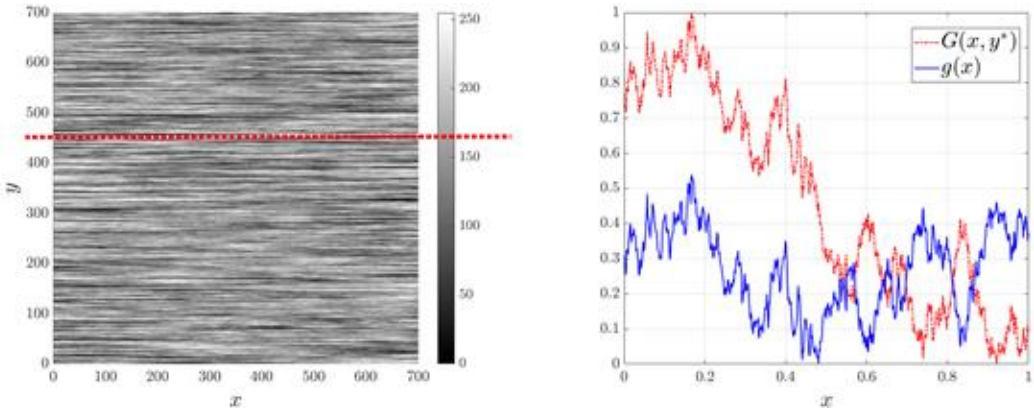
3. Демонстрационный пример

Проверка адекватности работы программного приложения проводилась на тест-объектах – искусственно сгенерированных абстрактных сигналах, являющихся монофрактальными объектами с известным характером поведения скейлинговых характеристик и значениями фрактальных размерностей. С целью верификации и демонстрации особенностей работы модифицированного алгоритма рассмотрим тестовую задачу анализа анизотропного изображения, искусственно синтезированного с использованием коричневого шума для каждой строки изображения. Будем считать, что исходное изображение задано в растровом формате «градации серого», как показано на рис. 4, *a*, и всему изображению поставлена в соответствие матрица яркости $G(x, y)$. Пользовательский выбор строки изображения дает анализируемый сигнал, профиль $g(x)$ которого представлен на рис. 4, *b*.

Выполним преобразование (1) над сигналом $g(x)$, используя вейвлет «мексиканская шляпа». Результатом являются поверхность абсолютных значений коэффициентов вейвлет-преобразования $W(a, b)$ и ее проекция на плоскость (a, b). Проекция наглядно отображает иерархическую структуру сигнала – характерные разветвления на различных масштабах a.

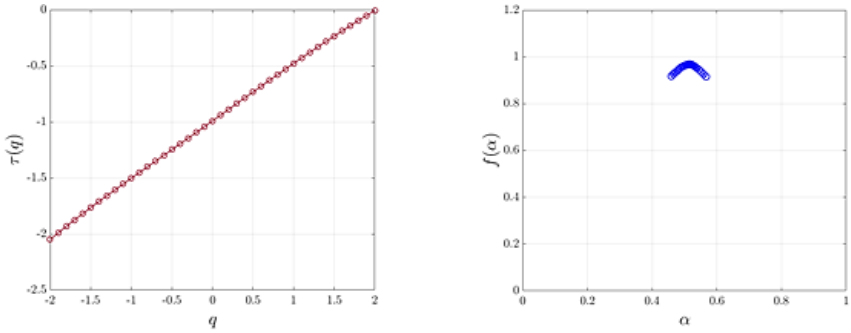
Модули прикладной программы реализуют предложенные алгоритмы и позволяют построить отфильтрованные линии локальных экстремумов и выполнить их уникальную маркировку. Дальнейшая реализация алгоритма предполагает вычисление функций $Z(a, q)$, фиксируя набор параметров деформации $q \in [-2, 2]$. Вычисление функций $Z(a, q)$ дает визуально не различимый результат для положительных q, что служит также верификацией работы алгоритма. Результаты расчета скейлинго-

вых характеристик приведены на рис. 5. В данном случае зависимость $\tau(q)$ имеет «спрямленный» вид, а спектр сингулярностей $f(\alpha)$ четко локализован и имеет максимум в точке с координатами (0,5; 1), что соответствует проявлению фрактальных свойств анализируемого сигнала.



a *b*

Рис. 4. Растровое тест-изображение и пример выбора строки y^* для анализа (пунктирная линия) – *a*, значение яркости сигнала $G(x, y^*)$ в нормированном виде и «профиль» $g(x)$ этого сигнала – *b*
Fig. 4. Raster test-image and an example of selecting the string y^* for analysis (dashed line) – *a*, the signal brightness value $G(x, y^*)$ in the normalized form and the "profile" $g(x)$ of this signal – *b*



a *b*

Рис. 5. Скейлинговые характеристики анализируемого сигнала $g(x)$, установленные ММВП: скейлинговая экспонента $\tau(q)$ – *a*, спектр сингулярностей $f(\alpha)$ – b*б*
Fig. 5. The scaling characteristics of the analyzed signal $g(x)$ specified by WTMM: the scaling exponent $\tau(q)$ – *a*, the singularity spectrum $f(\alpha)$ – *b*

Известно, что значение скейлинговой экспоненты $\tau(0) = -1$ и для коричневого шума $\tau(2) = 0$, что отвечает данным, представленным на рис. 5, *a*. Для фрактальных сигналов между $\tau(2)$ и показателем степени β функции спектральной плотности мощности $S(\varphi) = 1/\varphi^{\beta}$ существует взаимосвязь: $\beta = 2 + \tau(2)$. Кроме того, $\beta = 2H + 1$, где H – параметр Херста фрактального множества, и $H = 0{,}5$ для коричневого шума. Значение максимума функции спектра дает информацию о носителе меры, а абсцисса максимума соответствует значению параметра Херста $\alpha_{max} = 0{,}5$ (рис. 5, *b*).

3.1. Мультифрактальный вейвлет-анализ РЭМ-изображений доменных структур сегнетоэлектриков

В качестве прикладной задачи рассмотрим анализ РЭМ-фотографий доменных структур типичных сегнетоэлектриков. Все исследуемые изображения были предварительно представлены в формате «градации серого». Для анализа выбиралось несколько строк из матрицы яркости соответствующего изображения. Формируемый в РЭМ контраст отвечает построчной визуализации сигнала как отклика образца на воздействие электронного зонда. Таким образом, считая скорость движения зонда посто-

янной, анализу подлежит регистрируемый видеосигнал. Значение масштабного параметра a соответствовало диапазону [1, 30], параметр деформации $q \in [-2, 2]$.

На рис. 6, *a* приведен пример результатов расчета мультифрактального спектра для кристалла триглицинсульфата (ТГС). Для расчетов использован материнский вейвлет «мексиканская шляпа». Результат оценки скейлинговых характеристик позволяет охарактеризовать особенности изображений. Скейлинговая экспонента $\tau(q)$ представляется нелинейной зависимостью, что характерно для мультифрактальной структуры. Спектр сингулярностей позволяет определить набор фрактальных размерностей и оценить уровень максимума α_{max}, соответствующий параметру Херста, и ширину фрактального спектра $\Delta\alpha$. Для изображения кристалла ТГС при выборе различных строк для анализа абсцисса максимума варьировала в диапазоне 0,32–0,58, ширина спектра $\Delta\alpha \approx 0{,}5$–1. Поскольку метод анализа является локально одномерным – преобразование выполняется каждый раз над отдельной строкой изображения, носителем меры во всех случаях является единица (максимальное значение $f_{max}(\alpha)$ ограничено единицей).

На рис. 6, *b*, *c* показана эволюция спектра сингулярностей РЭМ-изображения доменной структуры кристалла ТГС, наблюдаемая в условиях температурного нагрева.

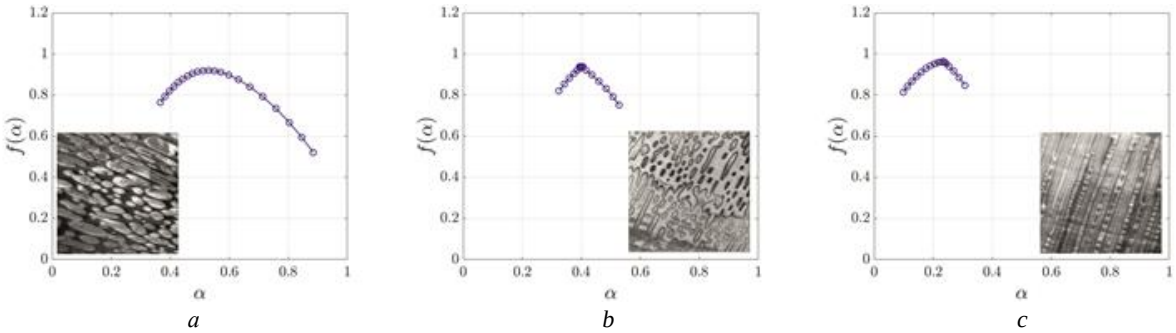


Рис. 6. Спектры мультифрактальных размерностей для РЭМ-изображений доменной структуры ТГС, визуализируемых: при комнатной температуре – *a*, при прогреве до T_C – *b*, при глубоком отжиге $T >> T_C$ – *c*
Fig. 6. Multifractal spectra calculated for SEM images of the TGS domain structure visualized: at room temperature – *a*, at heating to T_C – *b*, at deep annealing $T>>T_C$ – *c*

При прогреве кристалла ТГС выше температуры Кюри $T_C \approx 49$°C визуализируемый поляризационный контраст соответствует структуре, известной при описании процесса полимеризации гелей как «вязкие пальцы». Такая конфигурация характеризуется некоторым сужением и смещением спектра при $\alpha_{max} \approx 0{,}4$. Наконец, глубокий отжиг при температуре $T = 70$°C приводит к модификации и выстраиванию «псевдодоменов» в вытянутые цепочки. Мультифрактальный спектр также является достаточно узким и еще более сдвинут в сторону меньших значений экспонент Гельдера α и $\alpha_{max} \approx 0{,}23$. Таким образом, при нагреве кристалла ТГС свыше температуры Кюри остаточный поляризационный контраст на поверхности имеет достаточно сложную организацию, даже более «упорядоченную», чем исходная доменная структура. Степень, или уровень, такой упорядоченности можно охарактеризовать спектром фрактальных размерностей с шириной $\Delta\alpha \approx 0{,}2$.

Поэтому спецификация геометрии доменных структур сегнетоэлектриков хотя и может быть в некоторых частных случаях проведена с использованием фрактального формализма, в общем требует привлечения методов мультифрактального анализа. Отметим, что дополнительные возможности и перспективы в данном классе задач открывает использование 2*D* и 3*D* мультифрактального вейвлет-анализа.

Заключение

Настоящая работа обобщает результаты развития алгоритмов и их применение для анализа растровых изображений самоподобных структур в рамках одномерного метода максимумов модулей

вейвлет-преобразования. Предложен алгоритм фильтрации локальных экстремумов, позволяющий работать с корректным представлением скелетона функции, являющейся результатом вейвлет-преобразования. Алгоритм нацелен на ликвидацию «обрывающихся» и «висячих» максимумов при построении непрерывных линий локальных экстремумов. Сателлитом данного алгоритма выступил алгоритм маркировки линий локальных экстремумов, позволяющий однозначно идентифицировать принадлежность максимума к той или иной линии локальных экстремумов и вычислять статистические функции при отрицательных значениях параметра деформации.

На базе ППП Matlab разработан программный комплекс, предназначенный для проведения мультифрактального вейвлет-анализа растровых изображений. Работа программного приложения продемонстрирована на тестовой задаче оценки скейлинговых характеристик растрового изображения, сгенерированного на основе коричневого шума. Разработанные программные средства применены для оценки мультифрактальных характеристик растровых изображений доменных структур сегнетоэлектрических материалов. Показано, что РЭМ-изображение типичного сегнетоэлектрика ТГС характеризуется спектром фрактальных размерностей, представленным достаточно широким диапазоном. Проведен анализ эволюции спектра сингулярностей для сегнетоэлектрика, подверженного температурному воздействию. Показано, что остаточный поляризационный контраст при отжиге характеризуется сужением и смещением спектра по сравнению с исходной структурой, наблюдаемой в равновесных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Falconer K. J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Chichester : Wiley, 2014. 398 p.
2. Abry P., Jaffard S., Wendt H. Irregularities and scaling in signal and image processing: multifractal analysis // Benoit Mandalbrot: a Life in Many Dimensions / M. Frame, N. Cohen (ed.). Singapore : World Scientific Publ., 2015. P. 31–116.
3. Muzy J.F., Barcy E., Arneodo A. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data // Phys. Rev. Lett., 1991. P. 3515–3518.
4. Arneodo A., Decoster N., Kestener P., Roux S.G. A wavelet-based method for multi-fractal image analysis: From theoretical concepts to experimental applications // Adv. Imaging Electr. Phys. 2003. V. 126. P. 1–92.
5. Гиляров В.Л., Корсуков В.Е., Бутенко П.Н., Светлов В.Н. Применение вейвлет-преобразования при изучении изменения фрактальных свойств поверхностей аморфных металлов под воздействием механической нагрузки // Физика твердого тела. 2004. Т. 46, вып. 10. С. 1806–1810.
6. Kestener P., Arneodo A. Generalizing the wavelet-based multifractal formalism to random vector fields: Application to three-dimensional turbulence velocity and vorticity data // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. 044501(5).
7. Jagtap J., Ghosh S., Panigrahi P.K., Pradhan A. Wavelet-based multifractal analysis of laser biopsy imagery // Proc. SPIE 8222. Dynamics and Fluctuations in Biomedical Photonics IX. 2012. 82220F(9).
8. Jaffard S., Lashermes B., Abry P. Wavelet leaders in multifractal analysis // Wavelet Analysis and Applications / T. Qian, M.I. Vai, Y. Xu (ed.). Basel : Birkhauser Verlag, 2006. P. 219–264.
9. Leonarduzzi R., Wendt H., Abry P., Jaffard S., Melot C. Finite-Resolution Effects in p-Leader Multifractal Analysis // IEEE Transactions on Signal Processing. 2017. V. 65 (13). P. 3359–3368.
10. Mitić V.V., Paunović V., Lazović G., Kocić L., Fecht H. Fractal dimension of fractals tensor product ferroelectric ceramic materials frontiers // Ferroelectrics. 2018. V. 535, No. 1. P. 114–119.
11. Uchino K. Advanced piezoelectric material. Science and technology. Duxford : Elsevier, Woodhead publ., 2017. 848 p.
12. Roy M.K., Paul J., Dattagupta S. Domain dynamics and fractal growth analysis in thin ferroelectric films // IEEE Xplore. 2010. V. 109. 014108(4).
13. Maslovskaya A.G., Barabash T.K. Fractal parameterization analysis of ferroelectric domain structure evolution induced by electron beam irradiation // Proc. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2017. V. 168. 012028 (6).
14. Maslovskaya A.G., Barabash T.K. Multifractal analysis of electron beam stimulated process of polarization reversal in ferroelectrics // Physics Procedia. 2012. No. 23. P. 81–85.
15. Tadic B. Switching current noise and relaxation of ferroelectric domains // Eur. Phys. J. B. 2002. V. 28. P. 81–89.
16. Addison P.S. The illustrated wavelet transform handbook: Introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance. New York : CRC Press, 2016. 446 p.
17. Павлов А.Н., Анищенко В.С. Мультифрактальный анализ сложных сигналов // Успехи физических наук. 2007. Т. 177, № 8. С. 859–872.
18. Puckovs A., Matvejevs A. Wavelet transform modulus maxima approach for world stock index multifractal analysis // Information Technology and Management Science. 2012. V. 15. P. 76–86.

Поступила в редакцию 10 июля 2020 г.

Maslovskaya A.G., Afanasov L.S. (2020) ALGORITHMS OF MULTIFRACTAL WAVELET ANALYSIS IN PROBLEMS OF SPECIFYING RASTER IMAGES OF SELF-SIMILAR STRUCTURES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 53. pp. 61–71

DOI: 10.17223/19988605/53/6

Many physical objects exhibit self-similarity and a high degree of self-organization, or, in contrast, possess the properties of dissipativity, irregularity, roughness, chaos, and disorder. The concepts of the theory of fractals and multifractals are used as a theoretical basis for mathematical formalization and quantitative analysis of various solid-state media. The study is devoted to further developing algorithmic approaches of the multifractal wavelet analysis and their application for assessing scaling characteristics of raster images of self-similar physical structures.

The wavelet transform modulus maxima (WTMM) method is one of the promising and widespread multifractal techniques based on wavelet transforms. The basic step of WTMM method is presented by constructing the wavelet transform skeleton, which is used for the calculation of partition functions and scaling characteristics. However, the traditional approach leads to the appearance of the so-called “artifacts” at the construction of lines of local extrema. The algorithms for filtering and marking lines of local maxima are proposed within the framework of WTMM. The filtering algorithm is aimed at eliminating “breaking” and “hanging” maxima when constructing continuous lines of local maxima and allows one to work with the correct representation of the wavelet transform skeleton. The marking algorithm uniquely identifies the maximum belonging to a particular line of local extrema and underlines calculating partition functions for negative values of the deformation parameter.

A system of computer analysis of raster images was designed in Matlab to perform a multifractal parameterization and visualize the main scaling characteristics. The results of the program application are demonstrated for the test problem of analysis of the fractal image artificially generated with use of brown noise. The developed software tools are applied to estimate the multifractal characteristics of digital images of materials obtained by scanning electron microscopy. The scanning electron microscope (SEM) images are formed line by line by electron beam moving with constant velocity. SEM-images are result of videosignal registration as a sample response under the electron probe action. Hence, one-dimensional WTMM method can be used for specification of complex images by means of analyzing video signal profile.

Ferroelectrics is a special class of polar dielectric materials possessing interesting fractal properties. Domain configurations of typical ferroelectrics are the result of self-organization and indicate self-similar behavior. Scaling characteristics are established for the domain structure image of a typical ferroelectric – triglycine sulfate (TGS). The findings suggest, that the SEM-image of a TGS crystal exhibits multifractal properties and is characterized by a spectrum of fractal dimensions, represented by a rather wide range. The analysis of the evolution of the singularities spectrum is carried out for a ferroelectric under temperature exposure. Our results show that the residual polarization contrast during annealing is characterized by a narrowing and a shift of the spectrum to lower values of the Hölder exponents in comparison with the initial structure. This result demonstrates that the alignment of the TGS “pseudo-domains” into elongated chains at annealing has a complex organization, even more “ordered” than the initial domain structure observed under equilibrium conditions.

In general, the apparatus of multifractal wavelet analysis provides a flexible technique for mathematical diagnostics of the degree of the self-similarity properties of domain configurations and the topographic structure of complex structured physical systems.

Keywords: raster images; wavelet transform modulus maxima method; filtering algorithm; marking algorithm; multifractal characteristics.

MASLOVSKAYA Anna Gennadievna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor, Amur State University, Blagoveshchensk, Russian Federation).
E-mail: maslovskayaag@mail.ru

AFANASOV Leonid Sergeevich (Junior Researcher, Amur State University, Blagoveshchensk, Russian Federation).
E-mail: l.a.1996@mail.ru

REFERENCES

1. Falconer, K.J. (2014) *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Chichester: Wiley.
2. Abry, P., Jaffard, S. & Wendt, H. (2015) Irregularities and scaling in signal and image processing: multifractal analysis. In: Frame, M. & Cohen, N. (eds) *Benoit Mandalbrot: A Life in Many Dimensions*. Singapore: World Scientific Publ. pp. 31–116.
3. Muzy, J.F., Barcy, E. & Arneodo, A. (1991) Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data. *Physical Review Letters*. 67. pp. 3515–3518. DOI: 10.1103/PhysRevLett.67.3515
4. Arneodo, A., Decoster, N., Kestener, P. & Roux, S. G. (2003) A wavelet-based method for multi- fractal image analysis: From theoretical concepts to experimental applications. *Advances in Imaging and Electron Physics*. 126. pp. 1–92. DOI: 10.1016/S1076-5670(03)80014-9
5. Gilyarov, V.L., Korsukov, V.E., Butenko, P.N. & Svetlov, V.N. (2004) Primenenie veyvlet-preobrazovaniya pri izuchenii izmeneniya fraktal'nykh svoystv poverkhnostey amorfnykh metallov pod vozdeystviem mekhanicheskoy nagruzki [Wavelet transform as a method for studying the fractal properties of the surface of amorphous metals under mechanical load]. *Fizika tverdogo tela – Physics of the Solid State*. 46(10). pp. 1868–1872.

6. Kestener, P. & Arneodo, A. (2004) Generalizing the wavelet-based multifractal formalism to random vector fields: Application to three-dimensional turbulence velocity and vorticity data. *Physical Review Letters.* 93. pp. 044501(5). DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.044501
7. Jagtap, J., Ghosh, S., Panigrahi, P.K. & Pradhan, A. (2012) Wavelet-based multifractal analysis of laser biopsy imagery. *Proc. SPIE 8222. Dynamics and Fluctuations in Biomedical Photonics IX*. pp. 82220F(9). DOI: 10.1117/12.907330
8. Jaffard, S., Lashermes, B. & Abry, P. (2006) Wavelet leaders in multifractal analysis. In: Qian T., Vai M. I. & Xu, Y. (eds) *Wavelet Analysis and Applications*. Basel, Switzerland: Birkhauser Verlag. pp. 219–264.
9. Leonarduzzi, R., Wendt, H., Abry, P., Jaffard, S. & Melot, C. (2017) Finite-Resolution Effects in p-Leader Multifractal Analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing.* 65(13). pp. 3359–3368. DOI: 10.1109/TSP.2017.2690391
10. Mitić, V.V., Paunović, V., Lazović, G., Kocić, L. & Fecht, H. (2018) Fractal dimension of fractals tensor product ferroelectric ceramic materials frontiers. *Ferroelectrics*. 535(1). pp. 114–119. DOI: 10.1080/00150193.2018.1474653
11. Uchino, K. (2017) *Advanced piezoelectric material. Science and technology*. Duxford: Elsevier, Woodhead.
12. Roy, M.K., Paul, J. & Dattagupta, S. (2010) Domain dynamics and fractal growth analysis in thin ferroelectric films. *IEEE Xplore*. 109. pp. 014108(4). DOI: 10.1063/1.3456505
13. Maslovskaya, A.G. & Barabash, T.K. (2017) Fractal parameterization analysis of ferroelectric domain structure evolution induced by electron beam irradiation. *Proc. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 168. pp. 012028 (6).
14. Maslovskaya, A.G. & Barabash, T.K. (2012) Multifractal analysis of electron beam stimulated process of polarization reversal in ferroelectrics. *Physics Procedia*. 23. pp. 81–85. DOI: 10.1016/j.phpro.2012.01.021
15. Tadic, B. (2002) Switching current noise and relaxation of ferroelectric domains. *The European Physical Journal B.* 28. pp. 81–89. DOI: 10.1140/epjb/e2002-00203-1
16. Addison, P.S. (2016) *The illustrated wavelet transform handbook: Introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance*. New York: CRC Press.
17. Pavlov, A.N. & Anishchenko, V.S. (2007) Multifractal analysis of complex signals. *Physics-Uspekhi*. 50(8). pp. 819–834. DOI: 10.1070/PU2007v050n08ABEH006116
18. Puckovs, A. & Matvejevs, A. (2012) Wavelet transform modulus maxima approach for world stock index multifractal analysis. *Information Technology and Management Science*. 15. pp. 76–86. DOI: 10.2478/v10313-012-0016-5