УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/53/8

Л.А. Нежелская, Д.А. Тумашкина

ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В РЕКУРРЕНТНОМ ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Изучается рекуррентный полусинхронный поток событий второго порядка, функционирующий в условиях наличия мертвого времени фиксированной длительности; решается задача оценивания длительности непродлевающегося мертвого времени для исследуемого потока методом моментов; находятся вероятностные характеристики потока. Для установления качества оценивания неизвестного параметра (длительности мертвого времени) приводятся результаты статистических экспериментов, реализованных на имитационной модели потока.

Ключевые слова: дважды стохастический поток событий; условия рекуррентности, рекуррентный полусинхронный поток событий второго порядка; непродлевающееся мертвое время; оценка длительности мертвого времени, метод моментов.

В настоящей работе рассматривается полусинхронный дважды стохастический поток событий второго порядка. Дважды стохастические потоки [1–9], в свою очередь, являются адекватными математическими моделями информационных потоков запросов, функционирующих в телекоммуникационных сетях. Модели дважды стохастических потоков можно классифицировать в зависимости от того, каким образом происходит смена их состояний: синхронные потоки [10]; асинхронные [11]; полусинхронные потоки [12]. Более того, в литературе выделяют два класса дважды стохастических потоков в зависимости от интенсивности потока: 1) интенсивность является непрерывным случайным процессом [4, 5]; 2) интенсивность является кусочно-постоянным случайным процессом [1–3].

Множество состояний вышеприведенных потоков конечно и дискретно. В данной работе число состояний потока полагается равным двум.

Поскольку в реальности любому регистрирующему устройству необходимо некоторое время на регистрацию заявки (сообщения), в течение которого устройство не способно регистрировать другие заявки, большую актуальность в настоящее время имеют модели потоков, функционирующих в условиях так называемого мертвого времени. Мертвое время [13, 14] является периодом ненаблюдаемости, вызванным наступлением события, в течение которого другие наступившие события потока недоступны для наблюдения. В этой связи возникает вопрос об оценке среднего числа потерянных событий в единицу времени, который сводится к задаче оценивания длительности мертвого времени. Наступившие в период ненаблюдаемости события могут продлевать или не вызывать продления длительности мертвого времени, поэтому различают модели с продлевающимся и непродлевающимся мертвым временем. В работах [15–19] рассматриваются подобные задачи для различных моделей дважды стохастических потоков событий.

В данном исследовании, которое является непосредственным развитием [20, 21], методом моментов решается задача оценивания длительности непродлевающегося мертвого времени в рекуррентном полусинхронном потоке событий второго порядка, проводятся статистические эксперименты.

1. Постановка задачи

Рассматривается стационарный режим функционирования полусинхронного потока событий второго порядка (поток), сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ – кусочно-постоянный с двумя состояниями S_1 и S_2 .

Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1 определяется случайной величиной $\eta = \min(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$, где $\xi^{(1)}$ имеет функцию распределения $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$, $t \geq 0$; $\xi^{(2)}$ – функцию распределения $F_1^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}$, $t \geq 0$; $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ – независимые случайные величины. В момент наступления события потока в зависимости от того, какая из случайных величин $\xi^{(i)}$, $i = 1, 2$, приняла минимальное значение, процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния S_1 в S_2 с вероятностью $P_1^{(i)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, либо $\lambda(t)$ остается в состоянии S_1 с вероятностью $P_1^{(i)}(\lambda_1 | \lambda_1)$, $i = 1, 2$. Здесь $P_1^{(i)}(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1^{(i)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 1$, $i = 1, 2$. Длительность интервала между событиями потока в состоянии S_1 является случайной величиной с функцией распределения $F_1(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t}$, $t \geq 0$.

Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 является случайной величиной с функцией распределения $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$, $t \geq 0$. В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_2 . Далее полагается, что имеет место состояние S_i (i -е состояние) процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$; $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

Матрицы инфинитезимальных характеристик [22] процесса $\lambda(t)$ имеют вид:

$$D_0 = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & 0 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности T , в течение которого следующие события исходного потока являются недоступными для наблюдения. После окончания данного периода первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T (непродлевающееся мертвое время) и т.д.

Пример возникающей ситуации проиллюстрирован на рис. 1, где $t_1, t_2, \dots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке; штриховкой обозначены периоды мертвого времени длительности T ; черными кружками обозначены недоступные наблюдению события потока.

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий
Fig. 1. Formation of the observed event flow

Процесс $\lambda(t)$ – принципиально ненаблюдаем, наблюдаются только моменты наступления событий $t_1, t_2, \dots$, тогда $\lambda(t)$ является скрытым марковским процессом или ненаблюдаемым сопровождающим марковским процессом. Отметим, что в моменты $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова.

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, – значение длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке, $p_T(\tau_k)$ – плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока. Рассматривается стационарный режим функцио-

нирования потока, тогда $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$ для всех $k = 1, 2, \dots, \tau \geq 0$. Как следствие, момент наступления события потока t_k без ограничения общности можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$. В силу стационарного режима функционирования потока расположение двух смежных интервалов (t_k, t_{k+1}) и (t_{k+1}, t_{k+2}) , $k = 1, 2, \dots$, на временной оси произвольно. Тогда без ограничения общности $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = 0$ можно рассматривать как моменты наступления соседних событий в наблюдаемом потоке. При этом совместную плотность вероятности значений любых смежных интервалов обозначим $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$.

Ставится задача оценивания длительности мертвого времени T в рекуррентном полусинхронном потоке событий второго порядка методом моментов. Для решения поставленной задачи необходимо найти явный вид совместной плотности вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$, получить условия рекуррентности потока, а также для каждого из выписанных условий найти явный вид плотности вероятности $p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, в рекуррентном потоке.

2. Вывод совместной плотности вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$

Пусть $\tau_1 = T + t^{(1)}$, $\tau_2 = T + t^{(2)}$ – значения длительностей двух смежных интервалов между моментами наступления соседних событий в наблюдаемом потоке, где T – значение длительности мертвого времени, $t^{(l)}$ – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени и моментом наступления очередного события наблюдаемого потока, $t^{(l)} > 0$, $l = 1, 2$.

Рассмотрим один из двух смежных интервалов, значение длительности которого обозначим $\tau = T + t$, $t > 0$.

Введем в рассмотрение переходную вероятность $q_{ij}(T)$ того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния S_i в момент времени $\tau = 0$ в состояние S_j в момент $\tau = T$, $i, j = 1, 2$; условную стационарную вероятность $\pi_i(0/T)$ того, что процесс $\lambda(t)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии S_i , $i = 1, 2$, при условии, что в данный момент времени наступило событие наблюдаемого потока, породив период мертвого времени длительности T ; условную вероятность $p_{ij}(t)$ того, что на интервале $(0, t)$ нет событий потока, и в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_j$ при условии, что в момент времени $t = 0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_i$; $\tilde{p}_{ij}(t)$ – соответствующая плотность вероятности, $i, j = 1, 2$.

В силу того, что последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots$ образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, совместная плотность вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ [23] определится в виде:

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau_1 < T, \tau_2 \geq 0, \\ 0, & 0 \leq \tau_2 < T, \tau_1 \geq 0, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0/T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) \sum_{s=1}^2 q_{ks}(T) \sum_{n=1}^2 \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), & \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T. \end{cases} \quad (1)$$

Явный вид $\pi_i(0/T)$, $q_{ij}(T)$, $\tilde{p}_{jk}(\tau - T)$, $i, j, k = 1, 2$, устанавливают следующие леммы [21].

Лемма 1. Переходные вероятности $q_{ij}(T)$, $i, j = 1, 2$, в коррелированном полусинхронном потоке событий второго порядка определяются формулами

$$\begin{aligned} q_{11}(T) &= \pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_2 + a)T}, & q_{12}(T) &= \pi_2 - \pi_2 e^{-(\alpha_2 + a)T}, \\ q_{21}(T) &= \pi_1 - \pi_1 e^{-(\alpha_2 + a)T}, & q_{22}(T) &= \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + a)T}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$; априорные финальные вероятности состояний S_1 и S_2 равны $\pi_1 = \alpha_2 / (\alpha_2 + a)$, $\pi_2 = a / (\alpha_2 + a)$ соответственно.

Лемма 2. Плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в коррелированном полусинхронном потоке событий второго порядка имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{1j}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1)] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad j = 1, 2, \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= \frac{\alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} [e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}], \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= \frac{\alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} [e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}] + \lambda_2 e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \quad \tau \geq 0,\end{aligned}\quad (3)$$

где $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$.

Лемма 3. Условные стационарные вероятности $\pi_i(0/T)$, $i = 1, 2$, в коррелированном полусинхронном потоке событий второго порядка определяются следующим образом

$$\pi_1(0/T) = (z_1 - a) \left(\alpha_2 + \lambda_2 \pi_1 \left(1 - e^{-(\alpha_2 + a)T} \right) \right) / \left(z_1 z_2 - \lambda_2 (z_1 - a) e^{-(\alpha_2 + a)T} \right), \quad \pi_2(0/T) = 1 - \pi_1(0/T), \quad (4)$$

$z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$; π_1 и a определены в (2).

Теорема 1. Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в коррелированном полусинхронном потоке второго порядка в условиях наличия мертвого времени для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$ имеет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1 - \gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (5)$$

$$\gamma(T) = \pi_1 \left[(z_1 - z_2 - a) / (z_1 - z_2) \right] \left[1 + a(z_1 - \lambda_2) / (z_1 z_2 e^{(\alpha_2 + a)T} - \lambda_2 (z_1 - a)) \right],$$

где π_1 и a определены в (2); z_1, z_2 – в (4).

Тогда на основании вышеприведенных лемм и теоремы 1 сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Полусинхронный поток событий второго порядка при наличии мертвого времени в общем случае является коррелированным и совместная плотность вероятности значений длительностей смежных интервалов для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned}p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad \tau_2 \geq 0, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \quad \tau_1 \geq 0, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1) p_T(\tau_2) + \gamma(T)(1 - \gamma(T))(1 - a/z_1)(\lambda_2 / z_2) \times \\ &\times \left[z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1-T)} \right] \left[z_1 e^{-z_1(\tau_2-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)} \right] e^{-(\alpha_2 + a)T}, \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T,\end{aligned}\quad (6)$$

где вероятности $p_T(\tau_k)$ для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$, и $\gamma(T)$ определены в (5); a – в (2); z_1, z_2 – в (4).

Доказательство. Последовательно подставляя в (1) выражения (3), (2), (4), проделывая достаточно трудоемкие преобразования, получим (6). Теорема 2 доказана.

Далее, опираясь на результаты, полученные в [21], определим $p_T(\tau_1, \tau_2)$ в явном виде для особого случая задания параметров потока, когда коэффициент $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$.

Лемма 4. Плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в коррелированном полусинхронном потоке событий второго порядка для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{1j}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1)] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad j = 1, 2, \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= \alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \tau e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= \alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] \tau e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} + \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad \tau \geq 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Теорема 3. Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в коррелированном полусинхронном потоке второго порядка в условиях наличия мертвого времени для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ определяется следующим образом:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ [(\lambda_1 + \alpha_1) - \alpha_2 \pi_2(T)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T))] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (8)$$

$$\pi_2(T) = \pi_2 \left[1 + a \alpha_2 / \left((\lambda_1 + \alpha_1)^2 e^{(\alpha_2 + a)T} - \lambda_2 (\lambda_1 + \alpha_1 - a) \right) \right],$$

где π_2 и a определены в (2) [21].

На основании лемм 1, 4, теоремы 3 сформулируем следующую теорему.

Теорема 4. Полусинхронный поток событий второго порядка является коррелированным и совместная плотность вероятности значений длительностей смежных интервалов для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad \tau_2 \geq 0, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \quad \tau_1 \geq 0, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1) p_T(\tau_2) - \lambda_2 (\alpha_2 / z)^2 (z - a) \pi_2^2(T) \times \\ &\times [1 - z(\tau_1 - T)] [1 - z(\tau_2 - T)] e^{-z(\tau_1 + \tau_2 - 2T)} e^{-(\alpha_2 + a)T}, \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \end{aligned} \quad (9)$$

где $z = \lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$; $p(\tau_k)$ для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$, а также $\pi_2(T)$ определены в (8); коэффициент a определен в (2).

Доказательство. Подставляя в (1) выражения (7), (2), (4) и проделывая достаточно трудоемкие преобразования, получим (9). Теорема 4 доказана.

3. Условия рекуррентности потока при наличии мертвого времени

Рассмотрим случаи, когда поток является рекуррентным; для каждого из случаев запишем вид плотности исходя из выражений (5), (8).

Для общего случая $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ задания параметров потока, анализируя (6), подчеркнем, что совместная плотность факторизуется $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1) p_T(\tau_2)$, если:

- 1) $a/z_1 = 1$, получим $p_T(\tau) = \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau - T)} + (1 - \gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$;
- 2) $\lambda_2 = 0$, получим $p_T(\tau) = \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau - T)} + (1 - \gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \alpha_2$;
- 3) $\gamma(T) = 0$, получим плотность для простейшего потока $p_T(\tau) = z_2 e^{-z_2(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$;
- 4) $1 - \gamma(T) = 0$, получим плотность для простейшего потока $p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$.

В свою очередь, для особого случая $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ задания параметров потока, анализируя (9), аналогичным образом находим, что совместная плотность факторизуется $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1) p_T(\tau_2)$, если:

- 1') $z - a = 0$, получим $p_T(\tau) = [z - \alpha_2 \pi_2(T)(1 - z(\tau - T))] e^{-z(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z = \lambda_1 + \alpha_1$;
- 2') $\lambda_2 = 0$, получим $p_T(\tau) = z [1 - \pi_2(T)(1 - z(\tau - T))] e^{-z(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z = \lambda_1 + \alpha_1$;
- 3') $\pi_2(T) = 0$, получим плотность для простейшего потока $p_T(\tau) = z e^{-z(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z = \lambda_1 + \alpha_1$.

Ставится задача оценивания длительности мертвого времени T для рекуррентного потока при выполнении условий 1 и 2 в общем случае задания параметров, а также для условий 1' и 2' в особом случае задания параметров потока.

4. Оценивание длительности мертвого времени в рекуррентном потоке методом моментов

Пусть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ — значение длительности интервала между моментами t_k и t_{k+1} , $k = 1, 2, \dots, n$, наступления событий в наблюдаемом потоке. Введем статистику $C = (1/n) \sum_{k=1}^n \tau_k$,

$M_T(\tau) = \int_T^{\infty} \tau p_T(\tau) d\tau$ – начальный теоретический момент первого порядка. Тогда в соответствии с методом моментов [24] уравнение моментов для определения неизвестного параметра T запишется в виде:

$$M_T(\tau) = C. \quad (10)$$

В общем случае задания параметров потока с учетом плотности, определенной для условий 1 и 2 рекуррентности потока, уравнение (10) будет иметь вид:

$$\gamma(T)(1/z_1 - 1/z_2) + T + 1/z_2 = C, \quad (11)$$

где z_1, z_2 принимают значения, соответствующие выписанным условиям 1 и 2.

Утверждение 1. Уравнение моментов (11) для условий рекуррентности 1 и 2 имеет единственное решение.

В свою очередь, уравнение (10) для особого случая задания параметров потока с учетом плотности, определенной для условий 1' и 2' рекуррентности потока, запишется в виде:

$$\alpha_2 \pi_2(T) / z^2 + T + 1/z = C, \quad (12)$$

где $\pi_2(T) = \pi_2 \left(1 + \alpha_2 / \left(z e^{(\alpha_2 + a)T} \right) \right)$ для условия 1'; $\pi_2(T) = \pi_2 \left(1 + a / \left(\alpha_2 e^{(\alpha_2 + a)T} \right) \right)$ для условия 2'.

Утверждение 2. Уравнение моментов (12) для условий рекуррентности 1' и 2' имеет единственное решение.

Доказательство утверждений 1 и 2 проводится аналогичным путем, приведенным в работе [21].

Полученные уравнения моментов (11) и (12) относительно неизвестного параметра T решаются только с привлечением численных методов.

5. Вероятностные характеристики потока

Поскольку теоремы 2 и 4 доказывают, что поток является коррелированным, рассмотрим следующие вероятностные характеристики.

Для общего случая задания параметров потока при $T = 0$ ковариация и коэффициент корреляции имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tau_1, \tau_2) &= \gamma(1-\gamma)(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1 - 1/z_2)^2, \\ r_{\tau_1, \tau_2} &= \gamma(1-\gamma)(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1 - 1/z_2)^2 \left\{ \gamma^2(1/z_1 - 1/z_2)^2 + 2\gamma(1/z_1^2 - 1/(z_1 z_2)) + 1/z_2^2 \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

В особом случае задания параметров потока ковариация и коэффициент корреляции при $T = 0$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tau_1, \tau_2) &= -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(0) / z^6, \\ r_{\tau_1, \tau_2} &= -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(0) / z^6 \left\{ -\alpha_2^2 \pi_2^2(0) / z^4 + 2\alpha_2 \pi_2(0) / z^3 + 1/z^2 \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

При $T \neq 0$ ковариация и коэффициент корреляции для общего случая параметров имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{cov}_T(\tau_1, \tau_2) &= \gamma(T)(1-\gamma(T))(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1 - 1/z_2)^2 e^{-(\alpha_2 + a)T}, \\ r_{\tau_1, \tau_2}^{(T)} &= \gamma(T)(1-\gamma(T))(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1 - 1/z_2)^2 e^{-(\alpha_2 + a)T} \times \\ &\times \left\{ \gamma(T)^2(1/z_1 - 1/z_2)^2 + 2\gamma(T)(1/z_1^2 - 1/(z_1 z_2)) + 1/z_2^2 \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

и для особого случая задания параметров потока:

$$\begin{aligned} \text{cov}_T(\tau_1, \tau_2) &= -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(T) e^{-(\alpha_2 + a)T} / z^6, \\ r_{\tau_1, \tau_2}^{(T)} &= -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(T) e^{-(\alpha_2 + a)T} / z^6 \left\{ -\alpha_2^2 \pi_2^2(T) / z^4 + 2\alpha_2 \pi_2(T) / z^3 + 1/z^2 \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Отметим, что для рекуррентного потока как в общем случае задания параметра потока $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$, так и в особом случае $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ при полной наблюдаемости потока имеем

$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = 0$, $r_{\tau_1, \tau_2} = 0$; при наличии непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности T имеем $\text{cov}_T(\tau_1, \tau_2) = 0$, $r_{\tau_1, \tau_2}^{(T)} = 0$.

6. Результаты статистических экспериментов

Оценка длительности мертвого времени T производится по следующему алгоритму. Обозначим $f(T) = M_T(T)$. В качестве оценки параметра T выбирается решение (11)/(12) (в зависимости от задания параметров потока) на полуинтервале $(0, \tau_{\min}]$, где $\tau_{\min} = \min_k(\tau_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$; если $f(0) < C < f(\tau_{\min})$, то $\hat{T}_{\text{numeric}} = \hat{T}$; если $f(0) < f(\tau_{\min}) \leq C$, то $\hat{T}_{\text{numeric}} = \tau_{\min}$; $f(0) \geq C$, то $\hat{T}_{\text{numeric}} = 0$, где $\hat{T}_{\text{numeric}}$ – численное решение уравнения (11)/(12) методом Ньютона. Стоит отметить, что применение $\tau_{\min}$ дает улучшенную оценку параметра T .

Для проверки качества оценивания длительности мертвого времени с использованием построенной имитационной модели полусинхронного потока событий второго порядка проведена серия статистических экспериментов [25].

По алгоритму, приведенному выше, находится выборка оценок $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_N$ для N реализаций потока и вычисляются выборочное среднее $\hat{M}(\hat{T}) = (1/N) \sum_{s=1}^N \hat{T}_s$, выборочная вариация $\hat{V}(\hat{T}) = 1/N \sum_{s=1}^N (\hat{T}_s - \hat{T})^2$ и оценка смещения $\delta(T) = |\hat{M}(\hat{T}) - T|$ для конкретного эксперимента.

Цель первого статистического эксперимента – проверка установления стационарного режима в случае выполнения первого условия рекуррентности в общем случае задания параметров потока. В соответствии с условием рекуррентности положим

$$P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 1,$$

$$P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 0.$$

При параметрах потока $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$, $T = 1,5$ и $N = 300$ рассмотрим следующие значения времени моделирования: $T_m = 50, 100, \dots, 1\,000$ ед. времени с шагом 50. В табл. 1 приведены численные результаты данного эксперимента.

Таблица 1

Результаты первого статического эксперимента

T	50	100	150	...	700	750	...	950	1 000
$\hat{M}(\hat{T})$	1,2095	1,2748	1,3067	...	1,4905	1,4906	...	1,4904	1,4905
$\delta(T)$	0,2905	0,2252	0,1933	...	0,0095	0,0094	...	0,0096	0,0095
$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	24,4841	20,0012	18,1038	...	1,7731	1,5871	...	1,1742	1,8421

Целью второго статистического эксперимента является установление зависимости $\hat{M}(\hat{T})$, $\hat{V}(\hat{T})$ от количества реализаций N ($N = 50, 100, \dots, 500$ с шагом 50) при заданных значениях параметра мертвого времени T ($T = 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2$), а также проверка качества оценивания при увеличении периода ненаблюдаемости при выполнении второго условия рекуррентности для особого случая задания параметров потока. В соответствии с условием рекуррентности положим $\lambda_2 = 0$, $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,4$, $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,6$, а также $\lambda_1 = 7$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 8$.

Таблица 2

Результаты второго статического эксперимента

	N	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$T = 0,2$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,1980	0,1986	0,1988	0,1988	0,1988	0,1989	0,1990	0,1989	0,1989	0,1988
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	1,0179	0,3475	0,3815	0,2157	0,2874	0,2904	0,3111	0,3199	0,2894	0,2971

Окончание табл. 2

	N	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$T = 0,5$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,5033	0,5026	0,5024	0,5028	0,5021	0,5021	0,5024	0,5024	0,5022	0,5022
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	1,5980	0,7159	0,6791	0,6105	0,6817	0,6587	0,6454	0,6971	0,6587	0,6621
$T = 1$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,9913	0,9928	0,9918	0,9920	0,9928	0,9930	0,9931	0,9932	0,9930	0,9931
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	3,5483	2,1713	1,9971	1,6105	1,5157	0,9387	0,9689	0,9189	0,9541	0,8917
$T = 1,5$	$\hat{M}(\hat{T})$	1,4876	1,4880	1,4881	1,4887	1,4891	1,4897	1,4892	1,4896	1,4897	1,4896
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	5,7781	3,7421	3,1154	2,9715	2,4718	2,1741	2,2154	2,2089	2,2541	2,3517
$T = 2$	$\hat{M}(\hat{T})$	1,9602	1,9612	1,9621	1,9618	1,9625	1,9629	1,9632	1,9630	1,9630	1,9631
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	7,4887	5,3872	5,0082	4,9700	4,8176	4,5813	4,1984	4,3489	4,1579	3,9947

Проводя анализ полученных в табл. 1 и 2 численных результатов, можно сделать следующие выводы:

- 1) найденная оценка является состоятельной [24] и смещенной, при этом наблюдения показывают достаточно приемлемую величину смещения;
- 2) оценка ухудшается (в смысле увеличения выборочной вариации) с увеличением T , что является естественным в силу большей потери событий (информации);
- 3) отмечается установление стационарного режима для $T_m \geq 700$ (табл. 1);
- 4) количество экспериментов коррелирует со значением мертвого времени T (табл. 2): для достаточно малого значения T результаты стабилизируются при $N = 100$, однако при увеличении T для получения более стабильных результатов необходимо увеличить количество реализаций и положить $N = 300$.

Заключение

В настоящей работе рассмотрен полусинхронный поток событий второго порядка в условиях наличия непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности T . В ходе исследования потока было выявлено два случая задания параметров потока: общий и особый. Для обоих случаев задания параметров потока путем вывода совместной плотности вероятности значений длительностей смежных интервалов доказано, что рассматриваемый поток является коррелированным. В этой связи найдены такие вероятностные характеристики потока, как ковариация и коэффициент корреляции, а также сформулированы условия, при которых поток является рекуррентным. Для рекуррентного потока решена задача оценивания длительности мертвого времени с применением численного метода для решения уравнения моментов относительно неизвестного параметра T . Алгоритм вычисления оценок длительности мертвого времени запрограммирован на языке C# в среде Visual Studio 2013. С целью проверки качества полученных оценок проведена серия статистических экспериментов с помощью имитационной модели потока; численные результаты реализованных экспериментов демонстрируют приемлемое качество оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
3. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
4. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, No. 3. P. 433–441.
5. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
6. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a bath markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
7. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во Белорус. гос. ун-та, 2000. 175 с.

8. Basharin G.P., Gaidamaka Yu.V., Samouylov K.E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multi-service communication of the next generation networks // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47, No. 2. P. 62–69.
9. Vishnevsky V.M., Semenova O.V. Polling systems: theory and applications for broadband wireless networks. London : Academic Publishing, 2012. 316 p.
10. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1-1. С. 24–29.
11. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
12. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
13. Normey-Rico J.E. Control of dead-time process. London : Springer-Verlag, 2007. 462 p.
14. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
15. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
16. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
17. Горцев А.М., Соловьев А.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов потока физических событий при неподлежащем мертвому времени // Известия высших учебных заведений. Физика. 2014. Т. 57, № 7. С. 103–111.
18. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events // Telecommunications and Radio Engineering. 1993. V. 48, is. 10. P. 40–45.
19. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable // Telecommunications and Radio Engineering. 1992. V. 47, is. 1. P. 33–38.
20. Nezhelskaya L., Tumashkina D. Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 93–105.
21. Нежелская Л.А., Тумашина Д.А. Оценивание методом моментов длительности непродлевающегося мертвого времени в полусинхронном потоке событий второго порядка // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 52. С. 73–82.
22. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск : Изд-во НУТ, 2006. 204 с.
23. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 13–27.
24. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : ГТУ им. Ф. Скорины, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.
25. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

Поступила в редакцию 12 июня 2020 г.

Nezhel'skaya L.A., Tumashkina D.A. (2020) ESTIMATION OF THE UNEXTENDABLE DEAD TIME DURATION IN RECURRENT SEMI-ASYNCHRONOUS EVENTS FLOW OF THE SECOND ORDER BY THE METHOD OF MOMENTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 53. pp. 82–92

DOI: 10.17223/19988605/53/8

In the current paper we consider the stationary operation mode of the doubly stochastic semi-synchronous events flow of the second order under the conditions of unextendable dead time functioning, i.e. after each registered event at the time moment t_k , the dead time period of fixed duration T appears, during which other events are unobservable. The first event that occurred again at the end of the dead time period creates a period of dead time, etc.

Under these conditions, joint probability density $p_T(\tau_1, \tau_2)$ of the adjacent flow intervals duration values in the *general case* of setting parameters $(\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2)$ has the following form

$$\begin{aligned}
 p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad \tau_2 \geq 0, \\
 p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \quad \tau_1 \geq 0, \\
 p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + \gamma(T)(1 - \gamma(T))(1 - a/z_1)(\lambda_2/z_2) \times \\
 &\times [z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1 - T)}] [z_1 e^{-z_1(\tau_2 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)}] e^{-(\alpha_2 + a)T}, \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \\
 \gamma(T) &= \pi_1 [(z_1 - z_2 - a)/(z_1 - z_2)] \left(1 + a(z_1 - \lambda_2) / (z_1 z_2 e^{(\alpha_2 + a)T} - \lambda_2(z_1 - a)) \right),
 \end{aligned}$$

where $a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$.

For the special case ($\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$) of setting flow parameters, $p_T(\tau_1, \tau_2)$ has the form

$$\begin{aligned} p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad \tau_2 \geq 0, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \quad \tau_1 \geq 0, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1) p_T(\tau_2) - \lambda_2 \left(\alpha_2 / z \right)^2 (z - a) \pi_2^2(T) \times \\ &\times [1 - z(\tau_1 - T)] [1 - z(\tau_2 - T)] e^{-z(\tau_1 + \tau_2 - 2T)} e^{-(\alpha_2 + a)T}, \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \\ \pi_2(T) &= \pi_2 \left[1 + a \alpha_2 / \left((\lambda_1 + \alpha_1)^2 e^{(\alpha_2 + a)T} - \lambda_2 (\lambda_1 + \alpha_1 - a) \right) \right], \quad z = \lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2. \end{aligned}$$

Using the explicit forms of the density functions, the flow recurrence conditions were obtained, the moment equations to determine parameter T were written out and numerically solved for the recurrent flow in both cases.

The algorithm for calculating the estimates was implemented using C# programming language in Visual Studio 2013. In order to establish the quality of the estimation, the statistical experiments were carried out using a simulation model of the flow, the numerical results of which illustrate an acceptable quality of estimation.

Keywords: doubly stochastic events flow; recurrence conditions, recurrent semi-synchronous events flow of the second order; unextendable dead time; estimation of the dead time duration; method of moments.

NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Applied Mathematics Department, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: ludne@mail.tsu.ru

TUMASHKINA Diana Aleksandrovna (Post-graduate Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: diana1323@mail.ru

REFERENCES

1. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Chast 1. [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 17(6). pp. 92–99.
2. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch.2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 2]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
3. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
4. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
5. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
6. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a bath markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
7. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing Systems with Correlated Flows]. Minsk: Belarusian State University.
8. Basharin, G.P., Gaidamaka, Yu.V. & Samouylov K.E. (2013) Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of the next generation networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(2). pp. 62–69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
9. Vishnevsky, V.M. & Semenova, O.V. (2012) *Polling systems: theory and applications for broadband wireless networks*. London: Academic Publishing.
10. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Estimation of the parameters of a synchronous doubly stochastic event flow by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 24–29.
11. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
12. Nezhelskaya, L. (2000) Optimal estimation of the states of semi-synchronous event flow under conditions of its partial observability. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95–98.
13. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of dead-time process*. London: Springer-Verlag.
14. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavsky, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskoy eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.

15. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151.
16. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of the dead time duration in generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54–63.
17. Gortsev, A.M. & Soloviev, A.A. (2014) The joint probability density of the intervals duration of the flow of physical events with unextendable dead time. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika – Russian Physics Journal*. 57(7). pp. 103–111.
18. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1993) Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events. *Telecommunications and Radio Engineering*. 48(10). pp. 40–45.
19. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1992) Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable. *Telecommunications and Radio Engineering*. 47(1). pp. 33–38.
20. Nezhelskaya, L. & Tumashkina, D. (2018) Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 93–105. DOI: 10.17223/19988605/46/9
21. Nezhelskaya, L.A. & Tumashkina, D.A. (2020) Estimation of the unextendable dead time duration in semi-synchronous events flow of the second order by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 52. pp. 73–82. DOI: 10.17223/19988605/52/9
22. Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (2006) *Teoriya veroyatnostey i sluchaynykh protsessov* [The theory of probability and random processes]. Tomsk: NTL.
23. Bakhholdina, M. & Gortsev, A. (2015) Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 13–27. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
24. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Gomel: Francisk Skorina Gomel State University.
25. Sobol, I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.