

МЕХАНИКА

УДК 534.16
DOI 10.17223/19988621/68/4

А.А. Алифов, М.Г. Фарзалиев

**О РАСЧЕТЕ МЕТОДОМ ЛИНЕАРИЗАЦИИ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И АВТОКОЛЕБАНИЙ
ПРИ ЗАПАЗДЫВАНИИ И ОГРАНИЧЕННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ**

Рассмотрено взаимодействие автоколебаний и параметрических колебаний во фрикционной системе при наличии запаздывания, нелинейной упругости и источника энергии ограниченной мощности. Автоколебания возникают под действием нелинейной силы трения, которая содержит запаздывание. Для построения решений нелинейных дифференциальных уравнений движения использованы методы прямой линеаризации нелинейностей. Получены уравнения нестационарных и стационарных движений в области основного параметрического резонанса. Приведены условия устойчивости стационарных колебаний.

Ключевые слова: *взаимодействие, параметрические колебания, автоколебания, запаздывание, источник энергии, метод, прямая линеаризация.*

Человечество вступило в эпоху глобального экологического кризиса, и множество фактов различного характера свидетельствуют о его движении к экологической катастрофе глобального, общепланетарного масштаба. Эффективное решение экологических проблем предполагает отказ от модели общества потребления, в том числе роста потребляемой энергии. Рациональное использование этой энергии является одним из ряда путей решения экологических проблем. Как отмечено в работе [1]: «В любой отрасли промышленности экономия ресурсов энергии, материалов и комплектующих – насущная проблема. Значительная часть энергии потребляется различного рода приводами машин и технологического оборудования». В данном контексте достаточно значимую актуальность приобрела созданная В.О. Кононенко систематическая теория колебательных систем с ограниченным возбуждением. Ее основой является физический эффект, экспериментально обнаруженный немецким ученым А. Зоммерфельдом в 1902 г. Эта теория изложена в основополагающей монографии В.О. Кононенко [2], изданной также в Англии [3]. Она привела к возникновению нового направления в теории колебаний, за которым закрепились также следующие названия: теория взаимодействия колебательных систем с источниками энергии; теория колебательных систем с источниками энергии ограниченной мощности; теория колебательных систем с неидеальными источниками энергии. В целом ряде стран появилось много работ в этом направлении, в том числе [4] и ряд других. Среди современных работ можно отметить [5–8] и др. В вышедшей в 2018 г. статье [5], приведен обзор исследований в данном направлении теории колебаний.

Как известно, в электронике, устройствах автоматического управления, следящих системах, транспортных системах (ленточные транспортеры и др.), пневмосистемах, цифровых системах управления, станах холодного проката металла, биотехнологических системах саморегулирования, текстильной промышленности и др. широко распространено запаздывание. Под названием транспортное запаздывание оно присутствует, например, во многих технических процессах, текстильной и химической промышленности. Следует отметить, что интерес к системам с транспортным запаздыванием в последнее время растет. Как отмечено в работе [9], «Звенья с чистым запаздыванием часто встречаются в различных технологических процессах, когда материал перемещается из одной точки в другую с помощью ленточных транспортеров; в системах регулирования толщины листа при прокатке; в системах магнитной записи и воспроизведения и т. д.». Под действием запаздывания возникают колебательные процессы, которые могут быть вредными или полезными. В последнем случае запаздывание вводится в систему специально.

Задачи с запаздыванием при идеальном источнике энергии рассматривались в достаточно большом числе работ [10–13 и др.]. В отличие от этого, задачи о колебаниях в системе с запаздыванием при ограниченной мощности источника энергии изучались в весьма малом числе исследований. Для математического описания систем с запаздыванием чаще всего используются нелинейные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Так как решение таких уравнений связано с большими трудностями, то выделяется класс квазилинейных систем. Для изучения последних привлекаются приближенные методы нелинейной механики (усреднения, энергетического баланса, гармонической линеаризации и др.), среди которых широко используется асимптотический метод усреднения Крылова – Боголюбова [14, 15].

Цель работы – развитие способов расчета нелинейных колебательных систем на основе методов прямой линеаризации нелинейностей [16–20]. В отличие от известных методов нелинейной механики, методы прямой линеаризации позволяют значительно легче получить конечные расчетные соотношения независимо от конкретного вида характеристики, тратить достаточно малый труд и время. Результаты на основе известных методов нелинейной механики и методов прямой линеаризации совпадают *качественно*, имеются лишь незначительные *количественные* отличия. Сравнение этих количественных результатов при различных значениях параметра точности линеаризации приведено в [16].

Модель системы и уравнения движения

Во множестве работ, посвященных исследованию нелинейных систем, а также в [2–4, 21, 22], изучение автоколебаний проводилось на основе часто используемой известной модели механической фрикционной автоколебательной системы. В этой модели удерживаемое пружиной тело массы m расположено на движущейся со скоростью V непрерывной ленте на двух колесах (рис. 1). В месте контакта тела и ленты возникает трение, вызывающее фрикционные автоколебания. Такого типа автоколебания возникают, например, при медленных движениях ползунов в направляющих металлорежущих станков [23], в прядильном оборудовании [24], в текстильных машинах, в тормозах и фрикционных передачах и др.

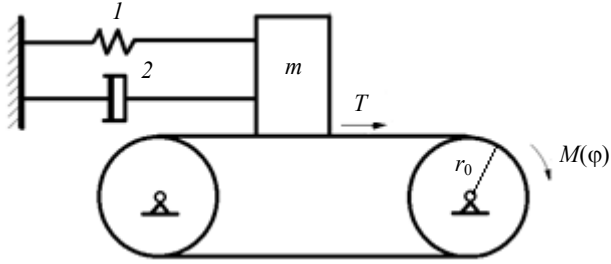


Рис. 1. Модель системы

Fig. 1. System model

Рассмотрим описанную модель при наличии запаздывания в силе трения $T(U)$, параметрического воздействия, нелинейной силы упругости пружины и источника энергии ограниченной мощности (двигателя). Характеристику (разрывную) зависящей от скорости $U = V - \dot{x}$ силы трения без запаздывания представим в виде

$$T(U) = R[\operatorname{sgn} U + F(U)], \quad F(U) = \sum_{i=1}^5 \delta_i U^i,$$

$$\operatorname{sgn} U = \begin{cases} 1, & U > 0, \\ -1, & U < 0, \end{cases}$$

где R – нормальная сила реакции, $\delta_i = \text{const}$.

Заметим, что в реальных условиях широко распространена характеристика силы трения, в которой

$$F(U) = -\delta_1 U + \delta_3 U^3. \quad (1)$$

Как следует из результатов работы [25], характеристика $T(U)$ с (1) наблюдалась также при измерении сил трения в условиях космического эксперимента.

Скорость V в случае идеального источника энергии постоянна, а источника энергии ограниченной мощности переменна, т.е. $V = r_0 \dot{\phi}$, где r_0 – радиус колеса (точнее, точки приложения силы трения), приводящего в движение ленту, $\dot{\phi}$ – скорость вращения ротора двигателя. При наличии запаздывания Δ относительная скорость $U_\Delta = V - \dot{x}_\Delta$, $\dot{x}_\Delta = \dot{x}(t - \Delta)$ и сила трения $T(U) \rightarrow T(U_\Delta)$.

Преобразуем $F(U)$ и представим в требуемой в дальнейшем форме

$$F(\dot{x}) = \sum_{n=0}^5 \alpha_n \dot{x}^n, \quad (2)$$

где $\alpha_0 = \delta_1 V + \delta_2 V^2 + \delta_3 V^3 + \delta_4 V^4 + \delta_5 V^5$,

$$\alpha_1 = -(\delta_1 + 2\delta_2 V + 3\delta_3 V^2 + 4\delta_4 V^3 + 5\delta_5 V^4),$$

$$\alpha_2 = \delta_2 + 3\delta_3 V + 6\delta_4 V^2 + 10\delta_5 V^3,$$

$$\alpha_3 = -(\delta_3 + 4\delta_4 V + 10\delta_5 V^2),$$

$$\alpha_4 = \delta_4 + 5\delta_5 V, \quad \alpha_5 = -\delta_5.$$

Движение системы описывается уравнениями

$$m\ddot{x} + k_0\dot{x} + c_0x = T(U_\Delta) - f(x) - bx \cos vt, \\ J\ddot{\phi} = M(\phi) - r_0 T(U_\Delta), \quad (3)$$

где $m = \text{const}$, $k_0 = \text{const}$ – коэффициент демпфирования демпфера 2, c_0x и $f(x)$ – соответственно линейная и нелинейная части силы упругости пружины 1, $c_0 = \text{const}$, $bx \cos vt$ – параметрическое воздействие, $b = \text{const}$, J – суммарный момент инерции вращающихся частей, $M(\phi)$ – разность вращающего момента двигателя и момента сил сопротивления вращению, которую будем называть характеристикой источника энергии.

Нелинейную часть силы упругости представим полиномиальной функцией

$$f(x) = \sum_s \gamma_s x^s,$$

где $\gamma_s = \text{const}$, $s = 2, 3, 4, \dots$.

Замена методом прямой линеаризации нелинейных функций линейными

По методу прямой линеаризации [16] нелинейные функции $f(x)$ и $F(\dot{x})$ заменим соответственно линейными функциями

$$f_*(x) = B_f + k_f x, \quad F_*(\dot{x}) = B_F + k_F \dot{x}. \quad (4)$$

В (4) символы B_f , k_f , B_F , k_F представляют коэффициенты линеаризации и определяются выражениями

$$B_f = \sum_s N_s \gamma_s a^s, \quad s = 2, 4, 6, \dots (s - \text{четное}), \quad (5)$$

$$k_f = \sum_s \bar{N}_s \gamma_s a^{s-1}, \quad s = 3, 5, 7, \dots (s - \text{нечетное}),$$

$$B_F = \sum_n N_n \alpha_n v^n, \quad n = 0, 2, 4, \dots (n - \text{четное}),$$

$$k_F = \sum_n \alpha_n \bar{N}_n v^{n-1}, \quad n = 1, 3, 5, \dots (n - \text{нечетное}).$$

Здесь $a = \max |x|$, $v = \max |\dot{x}|$, $N_s = (2r+1)/(2r+1+s)$, $\bar{N}_s = (2r+3)/(2r+2+s)$, $N_n = (2r+1)/(2r+1+n)$, $\bar{N}_n = (2r+3)/(2r+2+n)$. Параметр r определяет точность линеаризации (степень близости решения линеаризованного уравнения к точному решению нелинейного уравнения) и его величина может быть различной. Как показано в [16], он может быть выбран из промежутка (0, 2).

Уравнения (3) с учетом (5) принимают вид

$$m\ddot{x} + k_0\dot{x} + cx = B + R \operatorname{sgn} U_\Delta + Rk_F \dot{x}_\Delta - bx \cos vt, \\ J\ddot{\phi} = M(\phi) - r_0 R (\operatorname{sgn} U_\Delta + B_F + k_F \dot{x}_\Delta), \quad (6)$$

где $B = RB_F - B_f$, $c = c_0 + k_f$.

Построение решений линеаризованных уравнений

Решение линеаризованного уравнения можно построить двумя методами [16]. Одним из них является *метод замены переменных с усреднением*, позволяющий рассмотреть стационарные и нестационарные процессы. Нелинейное уравнение достаточно общего вида представлено в работе [16] в линеаризованном виде и получены стандартной формы соотношения для определения нестационарных значений амплитуды и фазы. Поскольку первое уравнение (3) является частным случаем такого общего вида нелинейного уравнения, то эта стандартная форма позволяет непосредственно выписать результаты для первого уравнения (6), осуществляя вычисление лишь его правой части. А в отношении второго уравнения (6) пользуемся процедурой усреднения, описанной в [18]. Следует отметить, что в соответствии с этой процедурой скорость $V = r_0 \dot{\phi}$ заменяется на $u = r_0 \Omega$, где Ω – усредненное значение скорости $\dot{\phi}$ источника энергии.

Прежде чем перейти к приведению соотношений для стационарных и нестационарных процессов, заметим, что имеются два принципиально различных случая, при которых существуют качественно различные режимы колебаний. Они определяются скоростью U , которая может быть положительной и отрицательной. В случае $U > 0$ имеет место выражение $u \geq ap$, а в случае $U < 0$ – выражение $u < ap$, причем для вывода соотношений при $u < ap$ использован способ, описанный в [4]. Как показано в этих работах аналитически и моделированием на вычислительной машине, характеры решений $x(t)$, $\dot{x}(t)$ при скоростях $u \geq ap$ и $u < ap$ качественно различны.

На практике основной интерес представляет главный резонанс. В случае параметрического воздействия он происходит тогда, когда половина частоты воздействия близка к собственной частоте системы. С учетом $\dot{x}_\Delta = -ap \sin(\psi - p\Delta)$ искомые решения при основном параметрическом резонансе имеют вид

$$x = a \cos \psi, \quad \dot{x} = -ap \sin \psi, \quad \psi = pt + \xi, \quad p = \nu/2, \quad \dot{\phi} = \Omega. \quad (7)$$

В соответствии с (7) в выражениях (4) будет $\nu = ap$.

На основе отмеченной выше стандартной формы соотношений использования метода прямой линеаризации при анализе общего вида нелинейной системы, можно выписать следующие уравнения нестационарных движений для (6):

а) $u \geq ap$:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{a(k_0 - Rk_F \cos p\Delta)}{2m} + \frac{ba}{4pm} \sin 2\xi, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\omega^2 - p^2}{2p} - \frac{Rk_F}{2m} \sin p\Delta + \frac{b}{4pm} \cos 2\xi, \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{J} \left[M\left(\frac{u}{r}\right) - r_0 R(1 + B_F) \right]; \end{aligned} \quad (8, a)$$

б) $u < ap$:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a}{2m} [(k_0 - Rk_F \cos p\Delta) + 4R(\pi a^2 p^2)^{-1} (a^2 p^2 - u^2)^{1/2}] + \frac{ba}{4pm} \sin 2\xi,$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega^2 - p^2}{2p} - \frac{Rk_F}{2m} \sin p\Delta + \frac{b}{4pm} \cos 2\xi, \quad (8,6)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{r_0}{J} \left[M\left(\frac{u}{r}\right) - r_0 R(1 - B_F) - \frac{r_0 R}{\pi} (3\pi - 2\Psi_*) \right],$$

где $\omega^2 = c/m = (c_0 + k_f)/m = \omega_0^2 + (k_f/m)$, $\omega_0^2 = c_0/m$, $\Psi_* = 2\pi - \arcsin(u/ap)$.

Так как в области резонанса разность частот $\omega_0 - p$ достаточно мала, то можно принять $(\omega_0^2 - p^2)/2p \approx \omega_0 - p$.

В ряде практических случаев представляет интерес смещение центра колебаний x_0 , с учетом которого имеем $x = x_0 + a \cos \psi$, где

$$\text{а) } u \geq ap: \quad x_0 = \frac{1}{c_0 + k_f} [R(1 + B_F) - B_f],$$

$$\text{б) } u < ap: \quad x_0 = \frac{1}{c_0 + k_f} \left[R(1 - B_F) - B_f - \frac{1}{\pi} (3\pi - 2\Psi_*) \right].$$

Условия $\dot{a} = 0$, $\dot{\xi} = 0$ доставляют в случае $u \geq ap$ следующие соотношения для определения стационарных значений амплитуды и фазы колебаний:

$$p^2(k_0 - Rk_F \cos p\Delta)^2 + [m(\omega^2 - p^2) - pRk_F \sin p\Delta]^2 = 0.25b^2, \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} 2\xi = - \frac{p(k_0 - Rk_F \cos p\Delta)}{m(\omega^2 - p^2) - pRk_F \sin p\Delta}.$$

В случае $u < ap$ стационарное значение амплитуды колебаний определяется приближенным равенством $ap \approx u$, справедливым при малом внешнем воздействии. Это приближенное соотношение и первое уравнение (9) позволяют для различных значений запаздывания строить представляющую некоторую поверхность зависимость амплитуды от частоты и скорости $a(p, u)$ в широком диапазоне, начиная со значения скорости $u = 0$. При этом зависимость амплитуды от скорости u строится для фиксированных значений частоты $p = v/2$ в области резонанса.

Из условия $\dot{u} = 0$ следует для $u \geq ap$ и $u < ap$ уравнение общего вида

$$M(u/r) - S(u) = 0, \quad (10)$$

где нагрузка $S(u)$ на источник энергии равна:

$$\text{а) } u \geq ap: \quad S(u) = r_0 R(1 + B_F),$$

$$\text{б) } u < ap: \quad S(u) = r_0 R \left[(1 - B_F) + \pi^{-1} (3\pi - 2\Psi_*) \right].$$

Кривая нагрузки $S(u)$ строится с использованием амплитудно-частотно-скоростной зависимости $a(p, u)$. Стационарные значения скорости u , которые могут быть реализованы, определяются точками пересечения кривых $M(u/r)$ и $S(u)$.

Условия устойчивости стационарных решений

Стационарные колебания в одних случаях желательны, а в других – нет. Поэтому чтобы их реализовать в первом случае и устранить – во втором, эти движения необходимо проверить на устойчивость. С этой целью составляем уравнения

в вариациях для (8) и, пользуясь критериями Рауса – Гурвица, получаем следующие условия устойчивости:

$$D_1 > 0, \quad D_3 > 0, \quad D_1 D_2 - D_3 > 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= -(b_{11} + b_{22} + b_{33}), \\ D_2 &= b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21} - b_{13}b_{31}, \\ D_3 &= b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33} - b_{11}b_{22}b_{33} - b_{12}b_{23}b_{31} - b_{13}b_{21}b_{32}. \end{aligned}$$

В случае $u \geq ar$ имеем

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{r_0}{J} (Q - r_0 R \frac{\partial B_F}{\partial u}), \quad b_{12} = -\frac{r_0^2 R}{J} \frac{\partial B_F}{\partial a}, \\ b_{13} &= 0, \quad b_{21} = \frac{Ra}{2m} \frac{\partial k_F}{\partial u} \cos p\Delta, \\ b_{22} &= -\frac{1}{2m} (k - Rk_F \cos p\Delta - aR \frac{\partial k_F}{\partial a} \cos p\Delta) + \frac{b}{4pm} \sin 2\xi, \\ b_{23} &= \frac{ab}{2pm} \cos 2\xi, \quad b_{31} = -\frac{R}{2m} \frac{\partial k_F}{\partial u} \sin p\Delta, \\ b_{32} &= \frac{1}{2pm} \frac{\partial k_f}{\partial a} - \frac{R}{2m} \frac{\partial k_F}{\partial a} \sin p\Delta, \quad b_{33} = -\frac{b}{2pm} \sin 2\xi, \end{aligned} \quad (12,a)$$

а в случае $u < ar$ изменяются лишь коэффициенты

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{r_0}{J} \left[Q - r_0 R \frac{\partial B_F}{\partial u} - \frac{2r_0 R}{\pi \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right], \\ b_{12} &= -\frac{Rr_0^2}{J} \left[\frac{\partial B_F}{\partial a} + \frac{2u}{\pi a \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right], \\ b_{21} &= \frac{a}{2m} \left[R \frac{\partial k_F}{\partial u} \cos p\Delta + \frac{4uR}{\pi a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right], \\ b_{22} &= -\frac{1}{2m} (k - Rk_F \cos p\Delta - aR \frac{\partial k_F}{\partial a} \cos p\Delta + \frac{4Ru^2}{\pi a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}}) + \frac{b}{4pm} \sin 2\xi, \end{aligned} \quad (12,б)$$

где $Q = \frac{d}{du} M(\frac{u}{r})$.

С учетом того, что при усреднении $\dot{\phi} = \Omega$, $u = r_0 \Omega$, входящие в (12) производные определяются выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_F}{\partial u} &= \frac{\partial \alpha_0}{\partial u} + N_2(ap)^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} + N_4(ap)^4 \frac{\partial \alpha_4}{\partial u}, \\ \frac{\partial k_F}{\partial u} &= \bar{N}_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} + \bar{N}_3(ap)^2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial u} + \bar{N}_5(ap)^4 \frac{\partial \alpha_5}{\partial u}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B_F}{\partial a} = 2ap^2(N_2\alpha_2 + 2N_4\alpha_4a^2p^2),$$

$$\frac{\partial k_F}{\partial a} = 2ap^2(\bar{N}_3\alpha_3 + 2\bar{N}_5\alpha_5a^2p^2),$$

$$\frac{\partial k_f}{\partial a} = 2a(\bar{N}_3\gamma_3 + 2\bar{N}_5\gamma_5a^2 + 3\bar{N}_7\gamma_7a^4 + \dots),$$

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial u} = \delta_1 + 2\delta_2u + 3\delta_3u^2 + 4\delta_4u^3 + 5\delta_5u^4,$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = -2(\delta_2 + 3\delta_3u + 6\delta_4u^2 + 10\delta_5u^3),$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial u} = 3(\delta_3 + 4\delta_4u + 10\delta_5u^2),$$

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial u} = -4(\delta_4 + 5\delta_5u),$$

$$\frac{\partial \alpha_4}{\partial u} = 5\delta_5, \quad \frac{\partial \alpha_5}{\partial u} = 0.$$

Заметим, что при вычислении $\partial B_F/\partial u$, $\partial B_F/\partial a$ учитываются лишь четные степени n и соответственно α_0 , α_2 , α_4 , а вычисления $\partial k_F/\partial u$, $\partial k_F/\partial a$ – нечетные степени n и соответственно α_1 , α_3 , α_5 , причем в выражениях α_n в (2) вместо V будет u . Точно так же при вычислении $\partial k_f/\partial a$ учитываются нечетные степени s (соответственно γ_1 , γ_3 , γ_5 и т.д.).

Как видно из приведенных выше результатов, применение методов прямой линеаризации достаточно просто. Они позволяют легко получить конечные расчетные соотношения и на несколько порядков снизить затраты труда и времени при вычислениях. Данные преимущества весьма значительно повышают эффективность использования этих методов на практике.

Расчеты

Чтобы получить информацию о динамике системы, проводились расчеты при следующих параметрах: $\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}$, $m = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^{-1}$, $k_0 = 0.02 \text{ кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1}$, $b = 0.07 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$, $J = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^2$, $r_0 = 1 \text{ см}$, $R = 0.5 \text{ кгс}$, $\delta_1 = 0.84 \text{ с} \cdot \text{см}^{-1}$, $\delta_3 = 0.18 \text{ с}^3 \cdot \text{см}^{-3}$. Характеристика силы трения была выбрана в форме $T(U) = R(\text{sgn} U - \delta_1 U + \delta_3 U^3)$, где δ_1 и δ_3 – положительные постоянные. Такая характеристика трения широко распространена на практике и, как отмечалось выше, она наблюдалась также в условиях космического эксперимента [25].

Некоторые результаты расчетов в случае $u = 1.2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ и линейной упругости представлены на рис. 2. Для расчета амплитудно-частотных кривых, показанных на рис. 2, использован параметр точности $r = 1.5$, приведенный в (5).

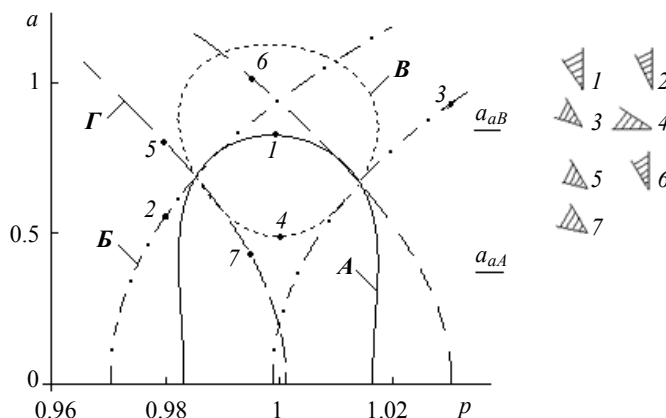


Рис. 2. Амплитудно-частотные кривые
Fig. 2. Amplitude-frequency curves

Сплошная кривая A соответствует $p\Delta = 0$, штрих-пунктирная B – $p\Delta = \pi/2$, пунктирная B – $p\Delta = \pi$, штриховая Γ – $p\Delta = 3\pi/2$. Амплитуды автоколебаний при $p\Delta = 0$ и $p\Delta = \pi$ отмечены соответственно как a_{aA} и a_{aB} (в соответствии с обозначениями кривых A и B). Заметим, что эти кривые полностью совпадают с кривыми, полученными по методу Крылова – Боголюбова, который широко используется для расчета нелинейных систем. При неидеальном источнике энергии устойчивость колебаний зависит от характеристики источника, что видно из выражения коэффициента b_{11} в (12). Например, колебания с амплитудами, соответствующими точкам 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, устойчивы, если $Q = dM/du$ в (12) для характеристики источника $M(u/r_0)$ находится в пределах заштрихованных секторов. Как видно из результатов расчета, запаздывание оказывает значительное влияние на ширину и положение области резонанса, амплитуду и устойчивость резонансных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков А.Н., Мацко О.Н., Мосалова А.В. Выбор энергосберегающих законов движения мехатронных приводов технологических машин // Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. 2018. Т. 24. № 4. С.141–149. DOI: 10.18721/JEST.24414.
2. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 236 с.
3. Kononenko V.O. Vibrating Systems with Limited Power-Supply. London: Iliffe. 1969.
4. Alifov A.A., Frolov K.V. Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources. New York; Washington; Philadelphia; London: Hemisphere Publishing Corporation, 1990. 327 p.
5. Краснопольская Т.С., Ганиев Р.Ф. Научное наследие В.О. Кононенко: эффект Зоммерфельда – Кононенко // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 5. С. 3–15. DOI: 10.31857/S023571190001552-8.
6. Kovrigin D.A. Synchronization and Sommerfeld effect as typical resonant patterns // Archive Appl. Mech. 2012. V. 82. P. 591–604.
7. Samantaray A.K., Dasgupta S.S. and Bhattacharyya R. Sommerfeld effect in rotationally symmetric planar dynamical systems // International Journal of Engineering Science. 2010. V. 48. P. 21–36. doi: 10.1016/j.ijengsci.2009.06.005.

8. Cveticanin L., Zukovic M., Cveticanin D. Non-ideal source and energy harvesting // *Acta Mech.* 2017. V. 228. P. 3369–3379. DOI: 10.1007/s00707-017-1878-4.
9. Теория автоматического управления. Ч. I. Теория линейных систем автоматического управления / под ред. А.А. Воронова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1986. 367 с.
10. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
11. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 256 с.
12. Асташев В.К., Герц М.Е. Автоколебания вязко-упругого стержня с ограничителями при действии запаздывающей силы // *Машиноведение.* 1973. № 5. С. 3–11.
13. Жирнов Б.М. Об автоколебаниях механической системы с двумя степенями свободы при наличии запаздывания // *Прикладная механика.* 1973. Т. 9. № 10. С. 83–87.
14. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
15. *Вибрации в технике: Справочник: в 6 т. / пред. ред. совета В.Н. Челомей.* М.: Машиностроение, 1979. Т. 5. Колебания нелинейных механических систем / под ред. И.И. Блехмана. 1979. 351 с.
16. Алифов А.А. Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2015. 74 с.
17. Alifov A.A. Method of the direct linearization of mixed nonlinearities // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability.* 2017. V. 46. No. 2. P. 128–131. DOI: 10.3103/S1052618817020029.
18. Алифов А.А. О расчете колебательных систем с ограниченным возбуждением методами прямой линеаризации // *Проблемы машиностроения и автоматизации.* 2017. № 4. С. 92–97.
19. Alifov A.A., Farzaliev M.G., Jafarov E.N. Dynamics of a self-oscillatory system with an energy source // *Russian Engineering Research.* 2018. V. 38. No. 4. P. 260–262. DOI: 10.3103/S1068798X18040032.
20. Alifov A.A. About application of methods of direct linearization for calculation of interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources // *Proc. of the Second International Symposium of Mechanism and Machine Science (ISMMS – 2017), September 11–14, 2017, Baku, Azerbaijan.* P. 218–221.
21. Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
22. Фролов К.В. Избранные труды: в 2 т. Т.1. Вибрация и техника. М.: Наука, 2007. 351 с.
23. Кудинов В.А. Динамика станков. М.: Машиностроение, 1967.
24. Коритыцкий Я.И. Крутильные автоколебания вытяжных приборов прядильных машин при граничном трении в опорах скольжения // *Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах: сб. М.: Наука, 1972.*
25. Броновец М.А., Журавлёв В.Ф. Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // *Изв. РАН. МТТ.* 2012. № 3. С. 3–11.

Статья поступила 14.03.2019

Alifov A.A., Farzaliev M.G. (2020) ON THE CALCULATION BY THE METHOD OF LINEARIZATION OF THE INTERACTION OF PARAMETRIC AND SELF-OSCILLATIONS AT DELAY AND LIMITED EXCITATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 41–52

DOI 10.17223/19988621/68/4

Keywords: interaction, parametric oscillations, self-oscillations, delay, energy source, method, direct linearization.

The aim of the study is to develop methods for calculating nonlinear oscillatory systems with limited excitation on the basis of direct linearization of nonlinearities. Unlike the known methods of nonlinear mechanics, direct linearization methods simplify obtaining of the finite calculating formulas regardless of the particular type of characteristics and require less labor and time. The results obtained using the known methods of nonlinear mechanics and methods of direct linearization coincide qualitatively, but there are some insignificant quantitative differences which disappear in some cases. The interaction of self-oscillations and parametric oscillations in the presence of delay, nonlinear elasticity, and an energy source of limited power, is considered. A well-known model of mechanical friction self-oscillating system is used, in which self-oscillations occur under the nonlinear friction force action with a delay. The solution of the system of nonlinear differential equations of motion is obtained using direct linearization methods. Applying these methods, the linearization of nonlinear functions is first performed, and then the equations of unsteady and steady motions in the main parametric resonance region are derived. The stability conditions of steady-state oscillations are further considered using the Routh-Hurwitz criteria. To gain information about dynamics of the system, calculations are performed. Amplitude-frequency characteristics are plotted with determination of their stable and unstable regions both at an ideal source of energy and under limited excitation.

Alishir A. ALIFOV (Doctor of Technical Sciences, Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Moscow, Russian Federation). E-mail: a.alifov@yandex.ru

Mezahir G. FARZALIEV (Doctor of Technical Sciences, Professor, Azerbaijan State University of Economics, Baku, Azerbaijan). E-mail: mezahir-ferzeliyev@rambler.ru

REFERENCES

1. Volkov A.N., Matsko O.N., Mosalova A.V. (2018) Vybor energosberegayushchikh zakonov dvizheniya mekhatronnykh privodov tekhnologicheskikh mashin [Selecting of the energy-saving laws of motion for mechatronic drives of production machines]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbPU. Estestvennye i inzhenernye nauki – St. Petersburg Polytechnic University Journal of Engineering Science and Technology*. 24(4). pp. 141–149. DOI: 10.18721/JEST.24414.
2. Kononenko V.O. (1964) *Kolebatel'nye sistemy s ogranichenym vozbuzhdeniem* [Vibrating systems with limited power-supply]. Moscow: Nauka.
3. Kononenko V.O.. (1969) *Vibrating Systems with Limited Power-Supply*. London: Iliffe.
4. Alifov A.A., Frolov K.V. (1990) *Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources*. New York, Washington, Philadelphia, London: Hemisphere Publishing Corporation.
5. Krasnopolskaya T.S., Ganiev R.F. (2018) Nauchnoe nasledie V.O. Kononenko: effekt Zommerfelda-Kononenko [Scientific heritage of V.O. Kononenko: the Sommerfeld-Kononenko effect]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin – Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 5. pp. 35. DOI: 10.31857/S023571190001552-8.
6. Kovriguine D.A. (2012) Synchronization and Sommerfeld effect as typical resonant patterns. *Archive Appl. Mech.* 82. pp. 591–604.
7. Samantaray A.K., Dasgupta S.S., Bhattacharyya R. (2010) Sommerfeld effect in rotationally symmetric planar dynamical systems. *International Journal of Engineering Science*. 48. pp. 2136. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2009.06.005.
8. Cveticanin L., Zukovic M., Cveticanin D. (2017) Non-ideal source and energy harvesting. *Acta Mech.* 228, pp. 3369–3379. DOI: 10.1007/s00707-017-1878-4.
9. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* (1986) [Automatic control theory]. Vol. 1. Moscow: Vysshaya shkola.
10. Rubanik V.P. (1969) *Kolebaniya kvazilineynykh sistem s zapazdyvaniem* [Oscillations of quasilinear systems with delay]. Moscow: Nauka.
11. Butenin N.V., Neymark Yu.I., Fufaev N.A. (1976) *Vvedenie v teoriyu nelineynykh kolebaniy* [Introduction to the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka.

12. Astashev V.K., Gerts M.E. (1973) Avtokolebaniya vyazko-uprugogo sterzhnya s ogranichitel'nyimi pri deystvii zapazdyvayushchey sily [Self-oscillations of a visco-elastic rod with limiters under the action of a lagging force]. *Mashinovedenie – Soviet Machine Science*. 5. pp. 3–11.
13. Zhirnov B.M. (1973) Ob avtokolebaniyakh mekhanicheskoy sistemy s dvumya stepenyami svobody pri nalichii zapazdyvaniya [On self-oscillations of a mechanical system with two degrees of freedom in the presence of a delay]. *Prikladnaya mekhanika – International Applied Mechanics*. 9(10). pp. 83–87.
14. Bogolyubov N.N., Mitropolskiy Yu.A. (1974) *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka.
15. *Vibratsii v tekhnike* (1979) [Vibrations in technical equipment]. Vol. 5. Moscow: Mashinostroenie.
16. Alifov A.A. (2015) *Metody pryamoy linearizatsii dlya rascheta nelineynykh sistem* [Methods of direct linearization for calculation of nonlinear systems]. Moscow-Izhevsk: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika.
17. Alifov A.A. (2017) Method of the direct linearization of mixed nonlinearities. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 46(2). pp. 128–131. DOI: 10.3103/S1052618817020029.
18. Alifov A.A. (2017) O raschete kolebatel'nykh sistem s ogranichenным возбуждением metodami pryamoy linearizatsii [On the calculation of oscillating systems with limited power-supply by direct linearization methods]. *Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii – Engineering & Automation Problems*. 4. pp. 92–97.
19. Alifov A.A., Farzaliev M.G., Jafarov E.N. (2018) Dynamics of a self-oscillatory system with an energy source. *Russian Engineering Research*. 38(4). pp. 260–262. DOI: 10.3103/S1068798X18040032.
20. Alifov A.A. (2017) About application of methods of direct linearization for calculation of interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. *Proceedings of the Second International Symposium of Mechanism and Machine Science (ISMMS – 2017)*. Baku, 11-14 September 2017. Baku: AzTU. pp. 218–221.
21. Zhuravlev V.F., Klimov D.M. (1988) *Prikladnye metody v teorii kolebaniy* [Applied methods in the theory of oscillations]. Moscow: Nauka.
22. Frolov K.V. (2007) *Izbrannyye trudy* [Selected Works]. Vol. 1. Moscow: Nauka.
23. Kudinov V.A. (1967) *Dinamika stankov* [Machine dynamics]. Moscow: Mashinostroenie.
24. Koritysskiy Ya.I. (1972) *Krutil'nye avtokolebaniya vytyazhnykh priborov pryadil'nykh mashin pri granichnom trenii v oporakh skol'zheniya* [Torsional self-oscillations of exhaust devices spinning machines with boundary friction in the sliding bearings]. *Nelineynye kolebaniya i perekhodnye protsessy v mashinakh*. Moscow: Nauka.
25. Bronovets M.A., Zhuravlev V.F. (2012) Ob avtokolebaniyakh v sistemakh izmereniya sil treniya [On self-excited vibrations in friction force measurement systems]. *Izv. RAN. MTT – Mechanics of Solids*. 3. pp. 3–11.

Received: March 14, 2019