

УДК 531.332

DOI 10.17223/19988621/68/5

С.О. Гладков, С.Б. Богданова

## К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ БРАХИСТОХРОНЫ

Приводится общий вид функционала для задачи о брахистохроне в случае  $n$ -мерного евклидова пространства. С помощью основных принципов вариационного исчисления получена система дифференциальных уравнений, позволяющая найти формальное решение поставленной задачи. Найдено параметрическое решение системы уравнений в трехмерном и  $n$ -мерном случаях. Аналитически и численно доказано, что в пространственном случае, так же, как и в двухмерном, линией наибо́льшего скатывания будет плоская кривая, что подтверждается графической иллюстрацией полученных решений.

**Ключевые слова:** *трехмерная брахистохрона,  $n$ -мерный случай, функционал, экстремаль.*

Во всех известных нам публикациях, касающихся анализа задач, так или иначе связанных с брахистохроной, речь всегда ведется о двухмерной задаче (см., к примеру, работы [1–7] и монографию [8]) за исключением работы [9], в которой был рассмотрен трехмерный случай вращающейся брахистохроны.

В этом коротком сообщении мы проведем подробное исследование в том случае, когда брахистохрона многомерная, но вначале подробно остановимся на трехмерном случае при условии, что координаты  $y, z$  являются независимыми и могут зависеть лишь от третьей координаты  $x$ , как от параметра.

При этом совершенно понятно, что геометрия желоба, по которому скатывается тело массой  $m$ , имеет абсолютно произвольную ориентацию в пространстве.

## Решение и анализ задачи в 3-мерном случае

В рамках поставленной задачи общий функционал в результате будет иметь вполне очевидный вид

$$\delta t\{y, z\} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{h-z}} dx, \quad (1)$$

где  $\delta t$  – интервал времени в условиях скатывания тела,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $h$  – максимальная высота тела над Землей.

С целью решения поставленной задачи удобно воспользоваться уравнениями Эйлера – Лагранжа [10], которые имеют вид

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где функция  $F = \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{h-z}}$ . Заметим, что в силу линейности уравнений (2)

множитель  $\frac{1}{\sqrt{2g}}$  не существен, и мы его учитывать не будем.

Из верхнего уравнения системы (2) следует, что

$$F_{y'} = C_1 = \text{const}, \quad (3)$$

а нижнее, в силу независимости подинтегральной функции от  $x$ , дает

$$F - z'F_{z'} = C_2, \quad (4)$$

где  $C_2$  – константа интегрирования.

После простых вычислений приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} y' = C_1 \sqrt{h-z} \sqrt{1+y'^2+z'^2}, \\ 1+y'^2 = C_2 \sqrt{h-z} \sqrt{1+y'^2+z'^2}. \end{cases} \quad (5)$$

Поделив их друг на друга и вводя новую константу  $A = \frac{C_1}{C_2}$ , приходим к соотношению

$$\frac{1+y'^2}{y'} = \frac{C_1}{C_2} = A, \quad (6)$$

где  $A = \text{const}$ .

Отсюда сразу же следует решение

$$y = ax + b, \quad (7)$$

где  $a = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - 1}$ , а  $b$  – константа интегрирования.

Заменяя в верхнем уравнении системы (5) производную  $y'$  на  $a$ , получаем

$$a = C_1 \sqrt{h-z} \sqrt{1+a^2+z'^2}. \quad (8)$$

Уравнение (8) тривиально решается с помощью подстановки

$$z' = \sqrt{1+a^2} \operatorname{tg} \beta, \quad (9)$$

где угловая переменная  $\beta$  представляет собой параметр.

В результате простого интегрирования немедленно находим решение уравнения (8) в параметрическом виде

$$z = h - \frac{1+a^2}{C_1^2} \cos^2 \beta. \quad (10)$$

Поскольку согласно (9),  $dz = \sqrt{1+a^2} \operatorname{tg} \beta dx$ , то отсюда следует, что

$$x = C_3 + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \int \operatorname{ctg} \beta \frac{dz}{d\beta} d\beta,$$

где  $C_3$  – константа интегрирования. В результате подстановки сюда (10) приходим к следующему решению:

$$x = C_3 + \frac{\sqrt{1+a^2}}{C_1^2} \left( \beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right). \quad (11)$$

Таким образом, собирая решения (7), (10) и (11) в единую систему, получаем решение задачи о пространственной брахистохроне в виде

$$\begin{cases} x = C_3 + \frac{\sqrt{1+a^2}}{C_1^2} \left( \beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \\ y = ax + b, \\ z = h - \frac{1+a^2}{2C_1^2} (1 + \cos 2\beta). \end{cases} \quad (12)$$

Выбирая константу  $C_1^2$  в виде

$$C_1^2 = \frac{1+a^2}{h}, \quad (13)$$

вместо (12) находим

$$\begin{cases} x = C_3 + \frac{h}{\sqrt{1+a^2}} \left( \beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \\ y = ax + b, \\ z = \frac{h}{2} (1 - \cos 2\beta). \end{cases} \quad (14)$$

Считая, наконец, что брахистохрона «привязана» к началу координат, получим  $b = C_3 = 0$ , и решение становится вполне компактным:

$$\begin{cases} x = \frac{h}{\sqrt{1+a^2}} \left( \beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \\ y = \frac{ah}{\sqrt{1+a^2}} \left( \beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \\ z = \frac{h}{2} (1 - \cos 2\beta). \end{cases} \quad (15)$$

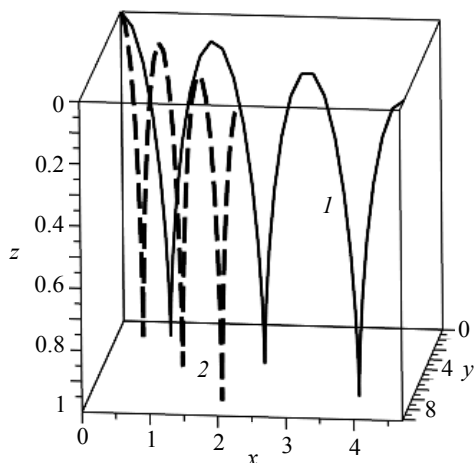
Полагая в предельном случае  $a = 0$ , приходим к параметрическим уравнениям обычной двумерной брахистохроны

$$\begin{cases} x = h \left( \beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \\ z = \frac{h}{2} (1 - \cos 2\beta). \end{cases} \quad (16)$$

Полагая в уравнениях (15), например,  $a = \sqrt{3}$ , получаем

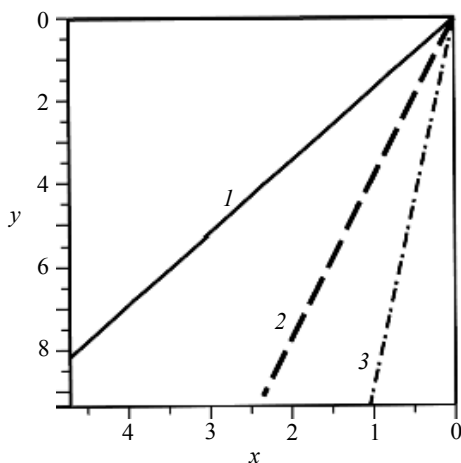
$$\begin{cases} x = \frac{h}{2} \left( \beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \\ y = \frac{h\sqrt{3}}{2} \left( \beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \\ z = \frac{h}{2} (1 - \cos 2\beta). \end{cases} \quad (17)$$

Из решений (17) видно, что на плоскостях  $x-z$  и  $y-z$  будут наблюдаться типичные двухмерные брахистохроны, только на плоскости  $y-z$  амплитуда будет в  $\sqrt{3}$  раз больше (см. рис. 1).



**Рис. 1.** Решения системы (17): линия 1 построена в предположении, что  $h=1$ ,  $a=\sqrt{3}$ , линия 2 построена при  $h=1$ ,  $a=\sqrt{15}$ . Параметр  $t$  принадлежит сегменту  $[0, 3\pi]$

**Fig. 1.** Solutions to system (17): line 1 corresponds to a case of  $h=1$ ,  $a=\sqrt{3}$  and line 2, to a case of  $h=1$ ,  $a=\sqrt{15}$ . The parameter  $t$  belongs to the interval of  $[0, 3\pi]$



**Рис. 2.** Проекция на плоскость  $xoy$  трех пространственных брахистохрон: линия 1 – проекция брахистохроны с параметрами  $h=1$ ,  $a=\sqrt{3}$ ; линия 2 –  $h=1$ ,  $a=\sqrt{15}$ ; линия 3 –  $h=1$ ,  $a=\sqrt{80}$  для  $t \in [0; 3\pi]$

**Fig. 2.** Projections of three nonpolar brachistochrones on the plane  $xoy$ : line 1 corresponds to a brachistochrone at  $h=1$ ,  $a=\sqrt{3}$ , line 2, at  $h=1$ ,  $a=\sqrt{15}$ , and line 3, at  $h=1$ ,  $a=\sqrt{80}$  for  $t \in [0; 3\pi]$

### ***n*-Мерный случай**

Рассмотрим теперь случай  $n$ -мерного евклидового пространства. В этом случае функционал (1) должен быть заменен на

$$\delta t \{ \mathbf{x} \} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + x_2'^2 + x_3'^2 + \dots + x_n'^2}}{\sqrt{h - x_n}} dx_1, \quad (18)$$

где вектор  $\mathbf{x} = (x_2, x_3, \dots, x_n)$ .

В соответствии с уравнениями Эйлера – Лагранжа получаем в результате следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x'_2 = C_1 \sqrt{h - x_n} \sqrt{1 + x_2'^2 + x_3'^2 + \dots x_n'^2}, \\ x'_3 = C_2 \sqrt{h - x_n} \sqrt{1 + x_2'^2 + x_3'^2 + \dots x_n'^2}, \\ \dots\dots\dots, \\ 1 + x_2'^2 + x_3'^2 + \dots + x_{n-1}'^2 = C_{n-1} \sqrt{h - x_n} \sqrt{1 + x_2'^2 + x_3'^2 + \dots x_n'^2}. \end{cases} \quad (19)$$

Деля почленно верхние  $n - 2$  уравнения друг на друга, находим

$$\begin{cases} \frac{x'_2}{x'_3} = \frac{C_1}{C_2} = a_1, \\ \frac{x'_2}{x'_4} = \frac{C_1}{C_3} = a_2, \\ \frac{x'_2}{x'_5} = \frac{C_1}{C_4} = a_3, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{x'_2}{x'_{m-2}} = \frac{C_1}{C_{m-3}} = a_{m-4}. \end{cases} \quad (20)$$

где  $m \geq 4$ , а коэффициент  $a_0 = 1$ .

Таким образом, имеется следующее рекуррентное соотношение:

$$x'_{m-2} = \frac{x'_2}{a_{m-4}}, \quad (21)$$

где число  $m$  подчиняется неравенству

$$4 \leq m \leq n + 2. \quad (22)$$

Подставляя теперь (21) в нижнее уравнение системы (19), немедленно получаем такое уравнение:

$$1 + x_2'^2 + \frac{x_2'^2}{a_3^2} + \frac{x_2'^2}{a_4^2} \dots + \frac{x_2'^2}{a_{n-1}^2} = C_{n-1} \sqrt{h - x_n} \sqrt{1 + x_2'^2 + \frac{x_2'^2}{a_3^2} + \frac{x_2'^2}{a_4^2} \dots + \frac{x_2'^2}{a_{n-1}^2} + x_n'^2}.$$

$$\text{Или} \quad 1 + g_{n-1} x_2'^2 = C_{n-1} \sqrt{h - x_n} \sqrt{1 + g_{n-1} x_2'^2 + x_n'^2}, \quad (23)$$

$$\text{где} \quad g_{n-1} = 1 + \frac{1}{a_3^2} + \frac{1}{a_4^2} \dots + \frac{1}{a_{n-1}^2} \geq 1.$$

Учитывая верхнее уравнение системы (19), приходим к замкнутой системе из двух уравнений, а именно

$$\begin{cases} x'_2 = C_1 \sqrt{h - x_n} \sqrt{1 + g_{n-1} x_2'^2 + x_n'^2}, \\ 1 + g_{n-1} x_2'^2 = C_{n-1} \sqrt{h - x_n} \sqrt{1 + g_{n-1} x_2'^2 + x_n'^2}. \end{cases} \quad (24)$$

Решение этой системы точно такое же, как и системы (5). Поэтому, деля почленно уравнения друг на друга, будем иметь

$$\frac{x_2'}{1 + g_{n-1}x_2'^2} = \frac{C_1}{C_{n-1}} = \frac{1}{p_{n-1}}.$$

$$\text{Откуда} \quad x_2 = A_{n-1}x_1 + B, \quad (25)$$

где  $B$  – константа интегрирования, а новый коэффициент

$$A_{n-1} = \frac{p_{n-1} - \sqrt{p_{n-1}^2 - 4g_{n-1}}}{2g_{n-1}}. \quad (26)$$

Поэтому из нижнего уравнения системы (24) получим

$$1 + g_{n-1}A_{n-1}^2 = C_1\sqrt{h - x_n}\sqrt{1 + g_{n-1}A_{n-1}^2 + x_n'^2}. \quad (27)$$

Совершая здесь подстановку

$$x_n' = \sqrt{1 + g_{n-1}A_{n-1}^2} \operatorname{tg} \theta, \quad (28)$$

находим

$$x_n = h - \frac{(1 + g_{n-1}A_{n-1}^2) \cos^2 \theta}{C_1^2}. \quad (29)$$

Поэтому согласно (28), получаем

$$x_1 = \frac{\sqrt{1 + g_{n-1}A_{n-1}^2}}{C_1^2} \left( \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + C, \quad (30)$$

где  $C$  – константа интегрирования.

И, значит, согласно (25) из (21) следует, что

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{A_{n-1}}{a_1} x_1 + \frac{B}{a_1}, \\ x_4 &= \frac{A_{n-1}}{a_2} x_1 + \frac{B}{a_2}, \\ x_5 &= \frac{A_{n-1}}{a_3} x_1 + \frac{B}{a_3}, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_{n-1} &= \frac{A_{n-1}}{a_{n-3}} x_1 + \frac{B}{a_{n-3}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Решения (29) – (31) отвечают на вопрос о форме брахистохроны в многомерном случае.

### Заключение

В заключение отметим:

1. Дано решение задачи о брахистохроне в  $n$ -мерном случае и, как пример, приводится подробное решение для трехмерного случая.

2. Отмечено принципиальное отличие многомерной брахистохроны от классической двухмерной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гладков С.О., Богданова С.Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. С. 161101-1-5.
2. Гладков С.О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 4. С. 164002-1-5.
3. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения тел с переменной массой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 83–91. DOI: 10.17223/19988621/65/6.
4. Denman Harry H. Remarks on brachistochrone – tautochrone problems // Amer. J. Phys. 1985. V. 53. P. 224–227.
5. Scarpello G.M. and Ritelli D. Planar brachistochrone of a particle attracted in vacuo by an infinite rod // New Zealand J. Math. 2007. V. 36. P. 241–252.
6. Goldstein H. and Bender C. Relativistic brachistochrone // J. Math. Phys. 1986. V. 27. N 2. P. 507–511.
7. Scarpello G.M. and Ritelli D. Relativistic brachistochrones under electric or gravitational uniform fields // Z. Angew. Math. Mech. 2006. V. 86. No. 9. P. 736–743.
8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
9. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. С. 172101-1-6.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Физматлит, 2004. 210 с.

Статья поступила 14.12.2019

Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) TO THE THEORY OF  $n$ -DIMENSIONAL BRACHISTOCHRONE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 53–60

DOI 10.17223/19988621/68/5

Keywords: three-dimensional brachistochrone,  $n$ -dimensional case, functional, extremal.

In this paper, a solution to the problem of the motion of a brachistochrone in the  $n$ -dimensional Euclidean space is firstly presented. The very first formulation of the problem in a two-dimensional case was proposed by J. Bernoulli in 1696. It represented an analytical description of the trajectory for the fastest rolling down under gravitational force only. Thereafter, a number of problems devoted to a brachistochrone were considered with account for gravitational forces, dry and viscous drag forces, and a possible variation in the mass of a moving body.

Analytical solution to the formulated problem is presented in details by an example of the body moving along a brachistochrone in three-dimensional Cartesian coordinates. The obtained parametric solution is confirmed by a graphical interpretation of the calculated result. The formulated problem is solved for an ideal case when drag forces are neglected. If dry and viscous friction forces are taken into account, the plane shape of the brachistochrone remains the same, while the analysis of the solution becomes more complicated. When, for example, a side air flow is taken into account, the plane curve is replaced by a three-dimensional brachistochrone.

Sergey O. GLADKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru

Sofiya B. BOGDANOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

## REFERENCES

1. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2016) Geometricheskiiy fazovyy perekhod v zadache o brakhistokhrone [Geometrical phase transition in a problem on brachistochrone]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 1. pp. 161101-1–5.
2. Gladkov S.O. (2016) O traektorii dvizheniya tela, vkhodyashchego v zhidkost' pod proizvol'nym uglom [On the trajectory of the body entering the fluid at an arbitrary angle]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 4. pp. 164002-1–5.
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii dvizheniya tel s peremennoy massoy [To the theory of motion of bodies with variable mass]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 83–91. DOI: 10.17223/19988621/65/6.
4. Denman H.H. (1985) Remarks on brachistochrone – tautochrone problems. *American Journal of Physics*. 53. pp. 224–227.
5. Scarpello G.M., Ritelli D. (2007) Planar brachistochrone of a particle attracted in vacuo by an infinite rod. *New Zealand Journal of Mathematics*. 36. pp. 241–252.
6. Goldstein H., Bender C. (1986) Relativistic brachistochrone. *Journal of Mathematical Physics*. 27(2). pp. 507–511.
7. Scarpello G.M., Ritelli D. (2006) Relativistic brachistochrones under electric or gravitational uniform fields. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 86(9). pp. 736–743.
8. Elsholz L.E. (1969) *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka.
9. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) K teorii dvizheniya sharika po vrashchayushcheysya brakhistokhrone s uchedom sil treniya [To the question of analysis equations for moving due to the rotating of the plane brachistohron]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 2. pp. 172101-1–6.
10. Landau L., Lifshitz E. (1976) *Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann.

Received: December 14, 2019