

УДК 004.942, 623.526.4

DOI 10.17223/19988621/68/8

А.М. Липанов, И.Г. Русяк, В.Г. Суфиянов

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТВОЛА  
НА УГОЛ ВЫЛЕТА СНАРЯДА ПРИ ВЫСТРЕЛЕ<sup>1</sup>**

Рассмотрена задача о продольно-поперечных колебаниях ствола артиллерийского орудия при выстреле в одномерной постановке с учетом начального гравитационного прогиба, массовых сил, давления пороховых газов и массы снаряда. Разностные схемы для решения уравнений продольных и поперечных колебаний ствола получены на основе интегро-интерполяционного метода. Показано, что в вертикальной плоскости имеют место существенные колебания ствола, при этом время затухания колебаний больше промежутка времени между выстрелами, что оказывает влияние на разброс снарядов при стрельбе очередью.

**Ключевые слова:** *внутренняя баллистика, колебания ствола, математическая модель, вычислительный алгоритм, угол бросания снаряда, угол возвышения орудия.*

Точность и кучность стрельбы для ствольных систем имеет важное практическое значение. Во многом они определяются корректным заданием начальных данных. Одним из определяющих факторов здесь является отклонение угла бросания снаряда  $\theta$  (угла стрельбы) от угла возвышения  $\varphi$  вследствие деформации и колебания ствола под влиянием давления пороховых газов и движения снаряда внутри ствола в процессе выстрела [1, 2]. Вибрации ствола в особенности необходимо учитывать в автоматических пушках, в которых стрельба происходит очередями и за небольшой промежуток времени между выстрелами ствол не успевает стабилизироваться. Одной из первых работ, посвященных данной теме, является монография [3], в которой учитывается множество факторов, влияющих на взаимодействие снаряда со стволом. Наиболее полная постановка задачи о колебании стволов артиллерийских систем при выстреле, в рамках одномерной модели упругой динамики, представлена в работе [4]. Там же предложен конечно-разностный подход для моделирования рассматриваемых процессов. Вопросам учета радиальных колебаний ствола на начальные внешнебаллистические параметры посвящена работа [5]. Решение одномерной задачи о колебании ствола автоматической пушки методом разделения Фурье и его влиянии на кучность стрельбы рассматривается в работах [6]. Анализ влияния колебания подвижного ствола на точность выстрела из снайперской винтовки дан в работе [7]. В работе [8] представлены результаты трехмерного моделирования в системе LS-Dyne взаимодействия всех частей артиллерийского орудия на точность стрельбы. Данный подход с использованием современных систем инженерного проектирования и суперкомпьютерного моделирования, таких как Ansys, Logos, Nastran, Abaqus и др. находит широкое применение в работах как российских, так и зарубежных авторов. Особенно

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00072\20.

интенсивно публикуют результаты исследований в этой области ученые из Китая [9], Индии [10], США [11], Турции [12], Великобритании [13], Словакии [14], Израиля [15] и ряда других стран [16, 17]. Несмотря на то, что в большинстве исследований [12–17] используются системы трехмерного моделирования и инженерного проектирования, много работ по моделированию колебаний ствола основываются на одномерных моделях, например [9–11]. Значительный вклад в разработку математической теории упругих колебаний стержней внес С.П. Тимошенко [18]. Математические модели, представленные в работах [4, 18], с учетом дополнительных сил были использованы при проведении представленного в статье исследования для решения задач продольных и поперечных колебаний ствола.

Заметим, что одно из направлений повышения эффективности применения ствольной артиллерии связано с комплексным моделированием различных последовательных стадий процесса выстрела, что предполагает учет переходных процессов между ними. Один из таких переходных процессов между внутренней и внешней баллистикой – колебательный процесс ствола орудия.

Целью данной работы является повышение точности определения начальных внешнебаллистических условий стрельбы на основе совместного решения основной задачи внутренней баллистики, включая период последствий, и задачи о колебании ствола при стрельбе очередями. В этой связи, представляет определенный интерес также оценка отличия результатов моделирования колебаний ствола на основе одномерных уравнений по сравнению с трехмерными моделями, реализуемыми с использованием высокопроизводительных вычислительных систем.

### 1. Постановка задачи о колебании ствола

Рассмотрим постановку задачи о продольных и поперечных колебаниях ствола артиллерийского орудия в одномерном приближении [4]. Поперечные колебания будем рассматривать только в вертикальной плоскости относительно оси симметрии орудия. В горизонтальной плоскости колебаниями ствола будем пренебрегать. Выберем декартову систему координат  $Oxuz$  (рис. 1), связанную с недеформированным стволом орудия. Начало координат  $O$  находится в центре казенного среза ствола. Направим ось  $Ox$  вдоль оси симметрии ствола. Ось  $Oy$  находится в вертикальной плоскости перпендикулярно оси  $Ox$ . Ось  $Oz$  образует правостороннюю систему координат.

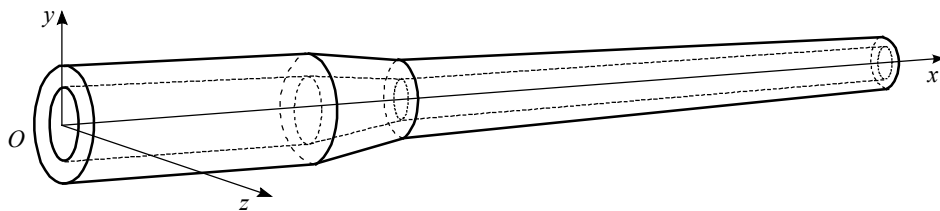


Рис. 1. Система координат, связанная со стволом

Fig. 1. Barrel-related coordinate system

Совместим начало координат  $Oxuz$  с осью местной системы координат  $OXYZ$ . Направим ось  $Ox$  орудия в плоскости  $OXY$  под углом возвышения  $\varphi$  к оси  $OX$  (рис. 2). Ось  $OY$  направим в сторону, противоположную направлению силы тяжести  $\vec{g}$ . Ось  $OZ$  совместим с остальными осями так же, как и ось  $Oz$ .

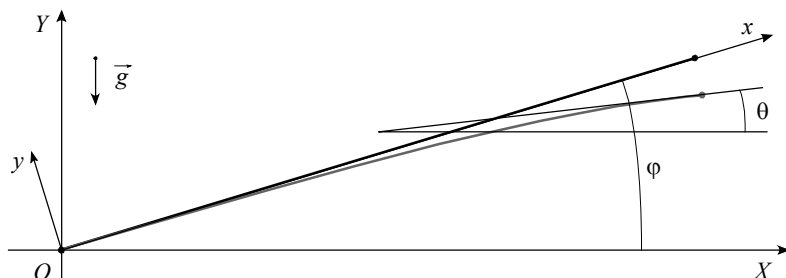


Рис. 2. Местная система координат OXYZ

Fig. 2. Local coordinate system OXYZ

Под действием силы тяжести и других сил ствол будет испытывать изгиб. Угол бросания снаряда  $\theta$  (рис. 2) вычисляется как угол, образованный осью  $Ox$  и направлением касательной к линии, совпадающей с центром канала ствола, в точке дульного среза в момент вылета снаряда.

### 1.1. Уравнение продольных колебаний

Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее в одномерном приближении нестационарные продольные колебания канала ствола, учитывающее силу тяжести, давление пороховых газов и взаимодействие снаряда со стволом. Уравнение продольных колебаний ствола в направлении оси  $Ox$  имеет вид [4]

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (F\sigma + 2\nu Sp) + p \frac{\partial S}{\partial x} - q_x(x, t) = 0, \quad (1)$$

где  $u = u(x, t)$  – величина продольной деформации;  $\rho$  – плотность материала ствола;  $F = F(x)$  – переменная площадь сечения ствола;  $S = S(x)$  – переменная площадь канала ствола;  $\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$  – напряжение в сечении  $x$ ;  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $p = p(x, t)$  – давление внутри канала ствола;  $q_x = q_x(x, t)$  – распределенные продольные силы.

Задача (1) решается при заданных начальных условиях:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x) \quad (2)$$

и граничных условиях:

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

где функция  $u_0(x)$  определяется из решения стационарной задачи гравитационного прогиба, в которой рассматриваются только сила тяжести;  $l = L_{\text{км}} + L_{\text{д}}$  – длина артиллерийской системы;  $L_{\text{км}}$  – длина камеры;  $L_{\text{д}}$  – длина ствола.

Распишем продольные силы, действующие на канал ствола:

$$q_x(x, t) = -\rho F g \sin \varphi - q_x^{\text{сн}}(x, t) + q_x^{\text{тр}}(x, t), \quad (4)$$

где  $q_x^{\text{ch}}(x, t)$  – массовая сила, действующая на ствол со стороны снаряда в направлении оси  $Ox$ ;  $q_x^{\text{tp}}(x, t)$  – сила трения и взаимодействия снаряда с нарезами в направлении оси  $Ox$ ;  $g$  – ускорение свободного падения. При определении этих сил снаряд будем считать эквивалентным по объему цилиндру, радиус которого совпадает с радиусом канала ствола. Длина эквивалентного снаряда равна  $\Delta l_{\text{ch}} = V_{\text{ch}} / S_{\text{kh}}$ , где  $S_{\text{kh}}$  – площадь сечения цилиндрической части канала ствола;  $V_{\text{ch}}$  – объем снаряда. Средняя плотность такого снаряда равна  $\rho_{\text{ch}} = q / V_{\text{ch}}$ , где  $q$  – масса снаряда. Тогда можно записать:

$$q_x^{\text{ch}}(x, t) = \begin{cases} \rho_{\text{ch}} S_{\text{kh}} g \sin \varphi, & x \in [x_{\text{ch}}, x_{\text{ch}} + \Delta l_{\text{ch}}], \\ 0, & x \notin [x_{\text{ch}}, x_{\text{ch}} + \Delta l_{\text{ch}}], \end{cases} \quad (5)$$

где положение снаряда  $x_{\text{ch}} = x_{\text{ch}}(t)$  определяется из решения основной задачи внутренней баллистики.

Распределенная сила, обусловленная взаимодействием снаряда с нарезами:

$$q_x^{\text{tp}}(x, t) = \begin{cases} R_x / \Delta l_{\text{ch}}, & x \in [x_{\text{ch}}, x_{\text{ch}} + \Delta l_{\text{ch}}], \\ 0, & x \notin [x_{\text{ch}}, x_{\text{ch}} + \Delta l_{\text{ch}}], \end{cases} \quad (6)$$

где  $R_x$  – сосредоточенная сила, действующая на стенки канала ствола в направлении оси  $Ox$ .

## 1.2. Уравнение поперечных колебаний в вертикальной плоскости

Рассмотрим нестационарное одномерное уравнение упругих колебаний стержня с одним закрепленным и вторым свободным концом. Уравнение продольных колебаний в вертикальной плоскости  $Oxy$  представляет собой бигармоническое уравнение вида [4]

$$\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ (F \sigma - Sp) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} E J_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - q_y(x) = 0, \quad (7)$$

где  $v = v(x, t)$  – поперечные деформации ствола в направлении оси  $Oy$ ;  $J_z = J_z(x)$  – момент инерции ствола относительно оси  $z$ ;  $q_y(x)$  – распределенные по длине ствола силы, действующие в направлении оси  $Oy$ .

Начальные условия для уравнения (7):

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad \left. \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} \right|_{t=0} = v_1(x), \quad (8)$$

где  $v_0(x)$  – начальный прогиб ствола, определяемый из решения стационарной задачи, в которой рассматривается только постоянная сила тяжести в направлении оси  $Oy$ ;  $v_1(x)$  – начальная скорость ствола в направлении оси  $Oy$ .

Граничные условия закрепления будем рассматривать при  $x = 0$ :

$$v(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (9)$$

Условия свободного конца при  $x = l$  имеют вид

$$\left. \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( EJ_z \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right) \right|_{x=l} = 0. \quad (10)$$

Распределенные силы для рассматриваемой системы запишем как

$$q_y(x, t) = -\rho g F \cos \varphi - q_y^{\text{ch}}(x, t), \quad (11)$$

где  $q_y^{\text{ch}}(x, t)$  – массовая сила, действующая на ствол со стороны снаряда в направлении оси Оу:

$$q_y^{\text{ch}}(x, t) = \begin{cases} \rho_{\text{ch}} S_{\text{кн}} g \cos \varphi, & x \in [x_{\text{ch}}, x_{\text{ch}} + \Delta l_{\text{ch}}], \\ 0, & x \notin [x_{\text{ch}}, x_{\text{ch}} + \Delta l_{\text{ch}}]. \end{cases} \quad (12)$$

## 2. Постановка задачи о статическом гравитационном изгибе ствола

Рассмотрим одномерное уравнение статического прогиба упругого стержня с одним закрепленным и вторым свободным концом под действием только силы тяжести. Решение данного уравнения будет начальным условием для решения задачи о колебаниях ствола. Дифференциальное уравнение для продольных деформаций с учетом только силы тяжести примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( FE \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = q_x^0(x), \quad (13)$$

с граничными условиями:

$$u_0(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (14)$$

и распределенными массовыми силами, действующими на канал ствола в направлении оси Ох:

$$q_x^0(x) = -\rho F g \sin \varphi - q_x^{\text{ch}}(x, 0). \quad (15)$$

Уравнение поперечного прогиба представляет собой бигармоническое уравнение вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EJ_z \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = q_y^0(x), \quad (16)$$

с граничными условиями при  $x = 0$ :

$$v_0(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (17)$$

Условия свободного конца при  $x = l$  имеют вид

$$\left. \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( EJ_z \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} \right) \right|_{x=l} = 0. \quad (18)$$

Распределенные массовые силы для рассматриваемого уравнения:

$$q_y^0(x) = -\rho g F \cos \varphi - q_y^{\text{ch}}(x, 0). \quad (19)$$

Из решения уравнения (13) с граничными условиями (14) и распределенными силами (15) определяются начальные условия для решения задачи о продольных колебаниях. Аналогично, из решения уравнения (16) с граничными условиями (17), (18) и распределенными силами (19) определяются начальные условия для решения задачи о поперечных колебаниях в вертикальной плоскости.

### 3. Постановка основной задачи внутренней баллистики

Внутрибаллистические параметры и динамика движения снаряда внутри ствола определялись в рамках термодинамического подхода [19]. В результате решения задачи определяются  $x_{\text{сн}}(t)$  – положение снаряда,  $p_{\text{сн}}(t)$  – давление на дно снаряда,  $p_{\text{кн}}(t)$  – давление на дно канала и  $p(x, t)$  – распределение давления вдоль ствола орудия, которое рассчитывалось на основе гипотезы осреднения плотности газопороховой смеси по заснарядному объему.

После вылета снаряда из канала ствола, принимается, что среднее давление и средняя плотность газов изменяются вследствие истечения газов из дульного среза со скоростью звука. Этот период называется периодом последствий. Он приближенно описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\frac{B(k)S_{\text{кн}}p}{W_{\text{д}}\sqrt{RT_{\text{д}}}}, \\ p = \rho RT_{\text{д}}, \end{cases} \quad (20)$$

где  $B(k) = \sqrt{k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$  – постоянная расхода;  $\rho$  – плотность пороховых газов;

$T_{\text{д}}$  – температура пороховых газов в момент вылета снаряда из канала ствола, которая принимается постоянной в течении всего периода последствий;  $W_{\text{д}} = W_{\text{км}} + L_{\text{д}}S_{\text{кн}}$  – суммарный объем камеры и канала ствола.

В качестве начальных условий в данном случае принимались параметры состояния продуктов горения в момент вылета снаряда из канала ствола при  $t = t_{\text{д}}$ :

$$\rho = \rho_{\text{д}} = \frac{\omega}{W_{\text{д}}}, \quad T = T_{\text{д}}, \quad p_{\text{д}} = \rho_{\text{д}}RT_{\text{д}}. \quad (21)$$

При принятых допущениях решение задачи (20) – (21) имеет вид:

$$p = p_{\text{д}} \exp\left(-\frac{t}{t_{\text{п}}}\right), \quad (22)$$

$$\text{где } t_{\text{п}} = \frac{W_{\text{д}}}{B(k)S_{\text{кн}}\sqrt{RT_{\text{д}}}}.$$

### 4. Алгоритмы решения задач

Система уравнений внутренней баллистики решалась с использованием двухшаговой схемы Рунге-Кутты второго порядка точности [20].

В литературе представлены различные методы решения одномерных задач упругих колебаний ствола в частных производных: метод конечных разностей [21], метод конечных элементов [22], метод Фурье [18], сведение задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1] и другие методы [23]. Наиболее эффективным среди рассматриваемых методов является метод конечных разностей.

Рассматривалась расчетная сетка во временной области  $0 \leq t \leq T$ :

$$\Xi = \left\{ t_n = n \cdot \tau \mid i \in \{0, 1, \dots, N\}, \tau = \frac{T}{N} \right\} \quad (23)$$

и пространственной области  $0 \leq x \leq l$ :

$$\Omega = \left\{ x_i = i \cdot h \mid i \in \{0, 1, \dots, I\}, h = \frac{l}{I} \right\}. \quad (24)$$

Разностная аппроксимация дифференциальных уравнений в частных производных (1), (7), (13) и (16) проводилась интегро-интерполяционным методом [21], который позволяет построить разностную схему для моделей с негладкими и разрывными коэффициентами и получить наиболее точное физическое решение. Применительно к рассматриваемой задаче этот метод наиболее актуален для аппроксимации граничных условий, в которых имеются разрывные параметры, а также для правильного учета влияния подвижных элементов артиллерийской системы на колебания ствола. В результате получена неявная разностная схема 2-го порядка точности по координате и времени. Разностная задача в итоге была сведена к трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений для дифференциальных уравнений (1) и (13) и к пятидиагональной – для дифференциальных уравнений (7) и (16), которые решались методом прогонки.

Верификация результатов численных расчетов в одномерной постановке осуществлялась на основе сравнения с результатами моделирования в Ansys.

## 5. Результаты расчетов

Как показали результаты комплексного моделирования взаимодействия пороховых газов и снаряда со стволом в трехмерной постановке, только для одного расчета в Ansys Autodyn на достаточно грубой сетке на современном персональном компьютере требуется более суток [24], при этом возникают сложности с заданием динамических граничных условий внутри ствола, что требует написания отдельного модуля.

В работе рассматривается 30-мм автоматическая нарезная пушка с массой снаряда  $q = 0.18 \text{ кг}$ . Алгоритмы моделирования в одномерной постановке верифицировались на основе сравнения с результатами математического моделирования в трехмерной постановке в системе инженерного проектирования Ansys.

Первая задача верификации – сравнение гравитационного прогиба ствола. Угол возвышения ствола  $\varphi$  принимался равным  $0^\circ$ . Параметры материала ствола соответствуют стандартной стали: плотность –  $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$ ; модуль упругости –  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; коэффициент Пуассона –  $\nu = 0.3$ . Рассматривалась структурированная сетка, состоящая из 3348 конечных гексагональных элементов. При решении одномерных конечно-разностных уравнений была использована сетка с постоянным шагом по пространству  $h = 0.01 \text{ м}$ . Количество точек разбиения расчетной области составило  $I = 180$ .

Одномерная модель была реализована на языке Python 3.8.3. Трехмерные расчеты проводились с использованием Ansys 2020 R1 Academic Edition (расчетный модуль Mechanical APDL) в среде Windows 10 на стандартном компьютере, оснащенном процессором Intel Core i7-2600K 3.4 ГГц и 16 Гб оперативной памяти.

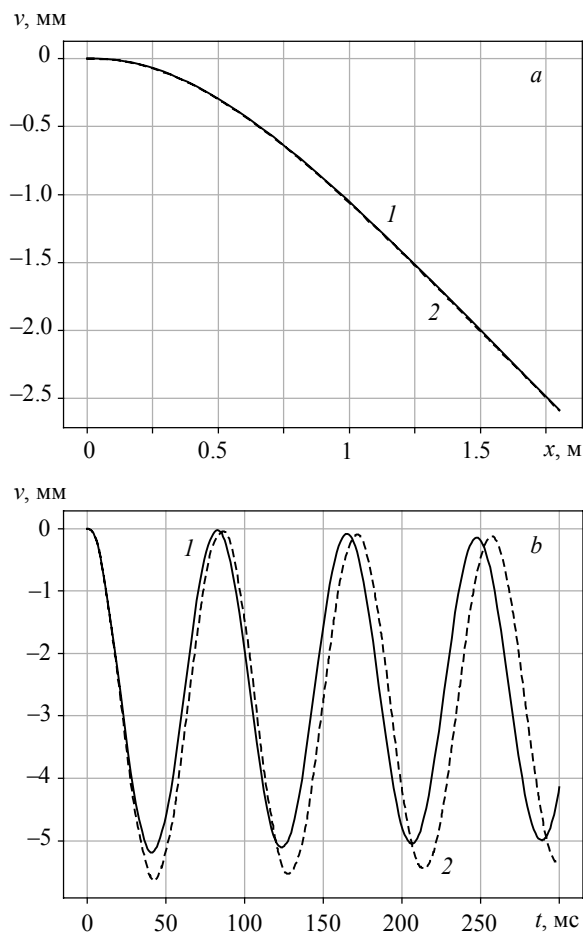
Сравнение гравитационных прогибов ствола 30-мм пушки, полученное в результате моделирования по рассматриваемой одномерной модели (13) – (19) и в Ansys, представлено на рис. 3.

Как видно на рис. 3, а, гравитационные прогибы, полученные в одномерной и трехмерной постановках, практически совпадают. Смещение дульного среза по

одномерной модели составило  $-v_0(l) = 2.58$  мм, а по трехмерной модели – 2.59 мм. Отклонение результатов составляет 0.4 %.

Вторая задача верификации – сравнение свободных поперечных колебаний ствола под действием сил тяжести. Принимались нулевые начальные условия и конечное время  $T = 0.3$  с. Время расчета в Ansys (расчетный модуль Autodyn) составило 15 мин. В одномерной постановке задача о свободных поперечных колебаниях ствола (7) – (12) с учетом массовых сил решалась 30 с.

Как видно из рис. 3, *b*, динамика свободных колебаний для рассматриваемых решений имеют одинаковую структуру, которая описывается затухающими синусоидальными колебаниями. На рассматриваемом временном отрезке амплитуды отличаются на ~8 %, а период колебаний на ~3 %.



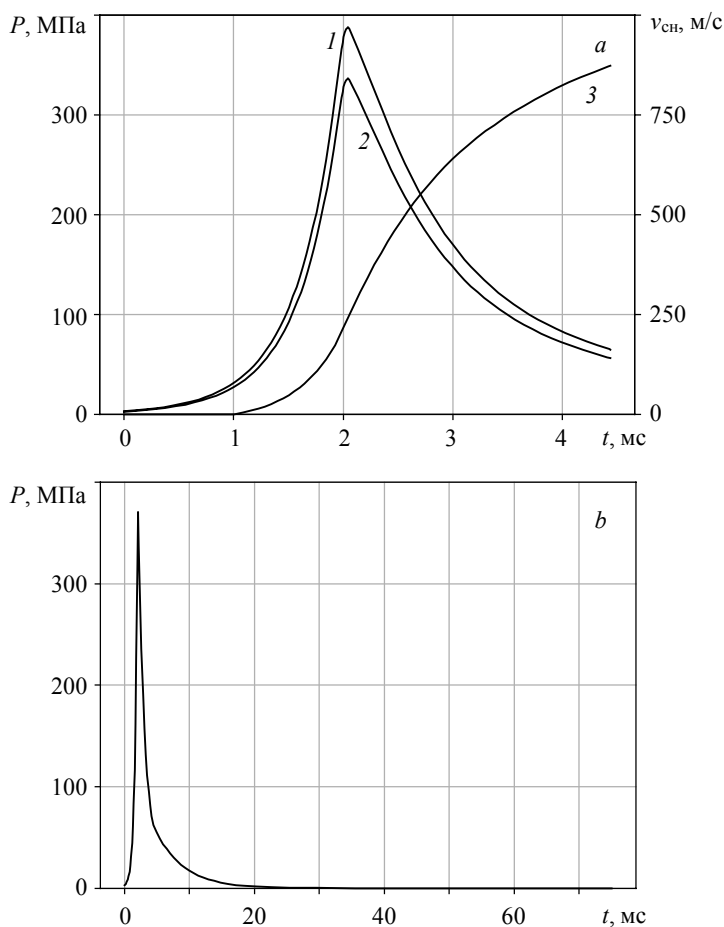
**Рис. 3.** Сравнение гравитационных прогибов (*a*) и динамики свободных колебаний (*b*) ствола 30-мм пушки, полученных по одномерной (1) и трехмерной моделям (2)

**Fig. 3.** Comparison of (*a*) gravitational deflections and (*b*) dynamics of free vibrations of a 30 mm gun barrel obtained using (1) a one-dimensional model and (2) a three-dimensional model



При расчете внутренней баллистики пушки начальное давление принималось равным  $p_n = 3$  МПа. В момент достижения давления форсирования  $p_\phi = 30$  МПа снаряд начинал движение. После достижения снарядом дульного среза расчеты периода последействия проводились по формуле (22). Внутрибаллистические характеристики в течение одного периода выстрела приведены на рис. 4.

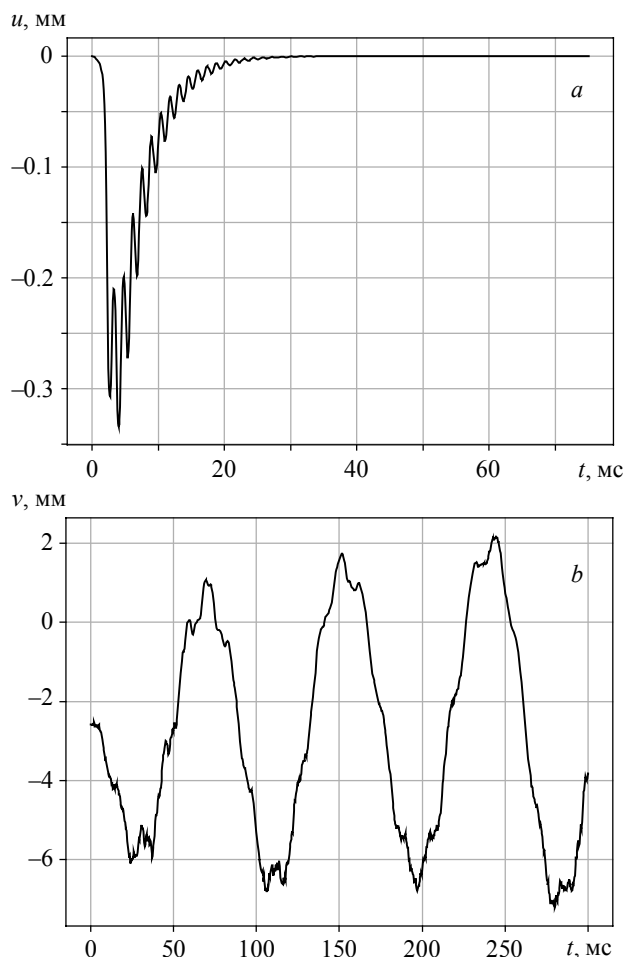
Максимальное давление внутри ствола составило  $p_{\max} = 370$  МПа, скорость снаряда на дульном срезе –  $v_{\text{сн}} = 890$  м/с, время выстрела –  $t_d = 4.5$  мс (рис. 4, а). Период последействия составил 24.5 мс (рис. 4, б). В расчетах рассматривалась автоматическая стрельба со скоростью 800 выстрелов в минуту, что соответствует периоду между выстрелами  $t_{\text{пер}} = 75$  мс.



**Рис. 4.** Расчетные внутрибаллистические параметры выстрела для 30-мм пушки: а – давление на дно канала (1), давление на дно снаряда (2) и скорость снаряда (3) в период выстрела; б – среднее давление в период выстрела и в период последействия

**Fig. 4.** Estimated ballistic parameters of a shot from a 30 mm gun: (a) 1, pressure on the bore bottom; 2, pressure on the projectile bottom; and 3, velocity of the projectile during the shot period; (b) average pressure during the shot period and in the subsequent period

Расчеты продольных и поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия проводились по уравнениям (1) и (7) с учетом воздействия давления, взаимодействия снаряда со стволом и массовых сил. Результаты расчета продольных и поперечных колебаний дульного среза ствола представлены на рис. 5.



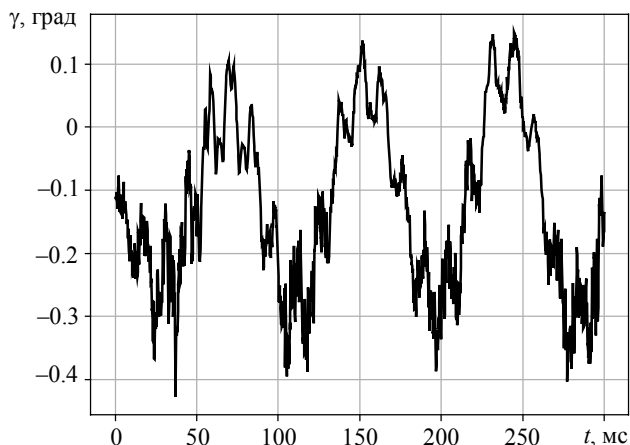
**Рис. 5.** Продольные (а) (1 выстрел) и поперечные (б) (4 выстрела) колебания дульного среза 30-мм пушки

**Fig. 5.** (a) Longitudinal (1 shot) and (b) transverse (4 shots) barrel vibrations of a 30 mm gun

Как видно из рис. 5, максимальная амплитуда продольных колебаний дульного среза ствола составила 0.33 мм, а поперечных – более 9 мм. Отклонение угла стрельбы  $\theta$  от угла возвышения  $\varphi$  определяется направлением касательной к линии канала ствола в точке дульного среза в момент вылета снаряда из орудия:

$$\gamma = \theta - \varphi = \arctg \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \bigg|_{x=l, t=t_d} \right). \quad (25)$$

Зависимость этого отклонения от времени представлена на рис. 6.



**Рис. 6.** Динамика отклонения угла стрельбы от угла возвышения при стрельбе очередью

**Fig. 6.** Dynamics of firing angle deviations from the angle of elevation in the burst mode

Как видно из результатов моделирования поперечных колебаний (рис. 6), угол стрельбы отклоняется от угла возвышения в пределах  $\gamma = [-0.4^\circ \div 0.1^\circ]$ . Для оценки влияния колебаний ствола в указанных пределах на точность стрельбы был проведен расчет внешнебаллистической траектории снаряда по методике [25]. При угле возвышения  $\varphi = 0^\circ$  на расстояние 1 км до цели изменение высоты полета снаряда составило 8.7 м: от  $-14.9$  м при  $\theta = -0.4^\circ$  до  $-6.2$  м при  $\theta = 0.1^\circ$ .

### Заключение

Исследование влияния колебаний ствола имеет важное практическое значение для определения точности и кучности стрельбы для ствольных систем. Рассмотрены совместные модели упругих продольно-поперечных колебаний ствола, описываемые одномерными дифференциальными уравнениями в частных производных, и модель внутренней баллистики, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Представленные в работе алгоритмы комплексного моделирования колебания ствола при выстреле позволяют уточнить углы вылета снаряда на внешнебаллистическую траекторию.

Разностная аппроксимация дифференциальных уравнений колебаний ствола проводилась интегро-интерполяционным методом; построены консервативные неявные разностные схемы 2-го порядка точности по координате и времени. Система дифференциальных уравнений внутренней баллистики решалась методом Рунге-Кутты второго порядка точности. Решение задач реализовано в виде программного кода на языке Python.

Верификация метода проводилась на основе сравнения решений задач в одномерной и трехмерной постановках. Результаты решений задачи стационарного гравитационного прогиба по одномерной и трехмерной моделям практически совпадают (отклонение составило 0.4 %). При решении задачи о свободных коле-

баниях ствола отклонения составили 8 % по амплитуде и 3 % по периоду колебаний. Однако на одинаковых вычислительных ресурсах время расчета колебаний ствола по трехмерной модели на несколько порядков превосходит время расчетов в одномерной модели.

Проведено моделирование упругих колебаний ствола при стрельбе из 30-мм нарезной автоматической пушки с учетом массовых сил, давления пороховых газов, а также взаимодействия снаряда с каналом ствола. Показано, что продольные колебания затухают в течении 30 мс, что намного меньше промежутка времени между выстрелами в очереди, который составляет 75 мс. Результаты моделирования поперечных колебаний ствола в вертикальной плоскости выявили отклонения угла стрельбы при вылете снаряда в пределах до  $0.5^\circ$ , что оказывает существенное влияние на точность стрельбы одиночными выстрелами и разброс снарядов при стрельбе очередью. Так, при стрельбе из 30-мм пушки изменение угла стрельбы на  $0.5^\circ$  приводит на дальности 1 км к изменению высоты точки поражения цели на 8.7 м.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов Б.В., Ларман Э.К., Маликов В.Г. Устройство и проектирование стволов артиллерийских орудий. М.: Машиностроение, 1976. 432 с.
2. Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Внешняя баллистика. М.: Машиностроение, 2005. 608 с.
3. Серебряков М.Е. Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. М.: Оборонгиз, 1962. 705 с.
4. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.
5. Гордон В.А., Семенова Г.А. Влияние радиальных осесимметричных колебаний ствола на начальные внешнебаллистические характеристики // Известия Орловского государственного технического университета. Серия: Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2008. № 4 (272). С. 3–7.
6. Игнатов А.В., Богомолов С.Н., Федянин Н.Д. Метод расчета свободных поперечных колебаний ствола автоматической пушки при заданном условии закрепления // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып. 11. Ч. 2. С. 70–77.
7. Артемова М.О., Скоробогатский В.Н., Федоров С.В. Колебания подвижного ствола и угол вылета пули при выстреле // Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны: сборник Материалов международной конференции XIII Харитоновские тематические научные чтения. 2011. С. 540–549.
8. Маликов Н.Ш., Слуцкий В.Е. Пространственная модель исследования динамики взаимодействия в системе «орудие – ствол – выстрел» для решения задач точности стрельбы // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. 2014. № 5(107). С. 184–190.
9. Yang Z., Qizheng Z., Pengfei Y. Research on vibration characteristics of gun barrel based on contact model // AIP Conference Proceedings 1829. 2017. 020017. <https://doi.org/10.1063/1.4979749>.
10. Chaturvedi E. Numerical investigation of dynamic interaction with projectile and harmonic behaviour for T-finned machine gun barrels // Defence Technology. 2020. No. 16. P. 460–469. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2019.07.018>.
11. Eichhorst Ch., Minnicino M., Hopkins D., Drysdale W.H. Inclusion of Rifling and Variable Centerline in Gun Tubes for Enhanced Modeling of Launch Dynamics // Proceedings of 26th International Symposium on Ballistics. Miami, Florida USA, 12–16 September, 2011. P. 966–975.
12. Koc M.A., Esen I., Cay Y. Dynamic analysis of gun barrel vibrations due to effect of an unbalanced projectile considering 2-D transverse displacements of barrel tip using a 3-D element technique // Latin American Journal of Solids and Structures. 2018. V. 15. No. 9. <https://doi.org/10.1590/1679-78254972>.

13. Ahmed N., Brown R.D., Hetherington J.G. Modeling of dynamic interaction between gun system components during the recoil motion of the gun // International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. 2009. P. 733–738. <https://doi.org/10.1115/DETC2009-87292>.
14. Stivnický M., Lisý P. Influence of barrel vibrations on the barrel muzzle position at the moment when the bullet exits // Advanced Military Technology. 2013. No. 8(Issue 1). P. 89–102. [http://aimt.unob.cz/articles/13\\_01/13\\_01%20%288%29.pdf](http://aimt.unob.cz/articles/13_01/13_01%20%288%29.pdf).
15. Azulayl I., Touatiz D., Manilovz B., Gur Y. Launch dynamics of the APAM-MP round // Proceedings of 26th International Symposium on Ballistics. Miami, Florida USA, 12–16 September, 2011. P. 956–965.
16. Keinänen H., Moilanen S., Tervokoski J., et al. Influence of rotating band construction on gun tube loading – Part I: Numerical approach // Journal of Pressure Vessel Technology. 2012. 134(4):041006. <https://doi.org/10.1115/1.4006354>.
17. Leonhardt D., Garnich M. A Finite Element Model to Predict the Influence of Asymmetries on Barrel Dynamics in Small Arms // Proceedings of 31st International Symposium on Ballistics, Hyderabad, India, 4–8 November 2019. DOI: 10.12783/ballistics2019/33139.
18. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Наука. 1975. 704 с.
19. Русяк И.Г., Липанов А.М., Ушаков В.М. Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016. 456 с.
20. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. 640 с.
21. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.
22. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
23. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
24. Суфиянов В.Г. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния ствола при выстреле // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 3. С. 13–17. <http://dx.doi.org/10.22213/2410-9304-2016-3-13-17>.
25. Королев С.А., Русяк И.Г., Суфиянов В.Г. Исследование влияния возмущающих факторов на траекторию движения снарядов и ракет при стрельбе с подвижного носителя // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 11-3. С. 23–33.

Статья поступила 30.06.2020

Lipanov A.M., Rusyak I.G., Sufyanov V.G. (2020) A STUDY ON THE EFFECTS OF GUN BARREL VIBRATIONS ON THE FIRING ANGLE OF A PROJECTILE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 80–94

DOI 10.17223/19988621/68/8

Keywords: internal ballistics, gun barrel vibrations, mathematical model, computational algorithm, firing angle, gun elevation angle.

The problem of longitudinal and transverse vibrations of an artillery gun barrel during firing is considered. Unsteady stress-strain equations for the gun barrel are solved together with equations of internal ballistics. Ballistic parameters and dynamics of the projectile motion inside a gun bore are determined using a thermodynamic approach. Formulation of the vibration problem accounts for the initial gravitational deflection of the barrel, mass forces, varying distribution of the propellant gas pressure, and the effect of moving projectile mass on gun barrel vibrations. To solve the equations for longitudinal and transverse gun barrel vibrations, difference schemes are obtained by integro-interpolation method. It has been revealed that the solution to the problem in a one-dimensional formulation is almost as accurate as the results obtained in a three-dimensional formulation. Moreover, the former case is significantly less time consuming. The decay time of

the barrel longitudinal vibrations after shot is shown to be much less than the time between shots in the burst. Deviations of the transverse barrel vibrations from the initial firing angle are more significant, and the vibration decay time is longer than the time between shots, which affects the accuracy of single shots and the dispersion of shells in the burst mode. Thus, when firing from a 30 mm gun at the range of 1 km, lateral vibrations lead to a change in the height of target hit point by 8.7 m.

**Financial support.** The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00072\20.

*Aleksey M. LIPANOV* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics Russian Academy of Sciences, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: AML35@yandex.ru

*Ivan G. RUSYAK* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: primat@istu.ru

*Vadim G. SUFIYANOV* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: vsufiy@mail.ru

#### REFERENCES

1. Orlov B.V., Larman E.K., Malikov V.G. (1976) *Ustroystvo i proektirovanie stvolov artilleriyskikh orudiy* [Arrangement and design of artillery barrels]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Dmitrievskiy A.A., Lysenko L.N. (2005) *Vneshnyaya ballistika* [External Ballistics]. Moscow: Mashinostroenie.
3. Serebryakov M.E. (1962) *Vnutrennyaya ballistika stvol'nykh sistem i porokhovyykh raket* [Internal ballistics of barrel systems and powder rockets]. Moscow: Oborongiz.
4. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematical modeling of interior ballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: Publishing House SB RAS.
5. Gordon V.A., Semenova G.A. (2008) Vliyanie radial'nykh osesimmetrichnykh kolebaniy stvola na nachal'nye vneshneballisticheskie kharakteristiki [Influence of the radial axisymmetric vibration of barrel on the initial extraballistic characteristics]. *Izvestiya Orlovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Fundamental'nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii – Izvestia Orel State Technical University: Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology*. 4(272). pp. 3–7.
6. Ignatov A.V., Bogomolov S.N., Fedyanin N.D. (2017) Metod rascheta svobodnykh poperechnykh kolebaniy stvola avtomaticheskoy pushki pri zadannom uslovii zakrepleniya [Calculation of free transverse vibrations of an automatic gun barrel under specified conditions]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki. – Izvestiya Tula State University. Technical Sciences*. 11. pp. 70–77.
7. Artemova M.O., Skorobogatskiy V.N., Fedorov S.V. (2011) Kolebaniya podvizhnogo stvola i ugol vyleta puli pri vystrele [Vibrations of a moving barrel and the angle of bullet departure when fired]. *Ekstremal'nye sostoyaniya veshchestva. Detonatsiya. Udarnye volny. Materialy mezhdunarodnoy konferentsii XIII Kharitonovskie tematische nauchnye chteniya*. pp. 540–549.
8. Malikov N.Sh., Slutskiy V.E. (2014) Prostranstvennaya model' issledovaniya dinamiki vzaimodeystviya v sisteme «orudie – stvol – vystrel» dlya resheniya zadach tochnosti strel'by [3D model for a research on interaction dynamics within "gun-barrel-shot" system for solving the problems on the shooting accuracy]. *Trudy Nizhegorodskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. R.E. Alekseeva – Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev*. 5(107). pp. 184–190.
9. Yang Z., Qizheng Z., Pengfei Y. (2017) Research on vibration characteristics of gun barrel based on contact model. *AIP Conference Proceedings*. 1829. 020017. DOI: 10.1063/1.4979749.

10. Chaturvedi E. (2020) Numerical investigation of dynamic interaction with projectile and harmonic behaviour for T-finned machine gun barrels. *Defence Technology*. 16. pp. 460–469. DOI: 10.1016/j.dt.2019.07.018.
11. Eichhorst Ch., Minnicino M., Hopkins D., Drysdale W.H. (2011) Inclusion of rifling and variable centerline in gun tubes for enhanced modeling of launch dynamics. *Proceedings of 26th International Symposium on Ballistics. Miami, Florida USA*. pp. 966–975.
12. Koc M.A., Esen I., Cay Y. (2018) Dynamic analysis of gun barrel vibrations due to effect of an unbalanced projectile considering 2-D transverse displacements of barrel tip using a 3-D element technique. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 15(9). DOI: 10.1590/1679-78254972.
13. Ahmed N., Brown R.D., Hetherington J.G. (2009) Modeling of dynamic interaction between gun system components during the recoil motion of the gun. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. pp. 733–738. DOI: 10.1115/DETC2009-87292.
14. Stiavnický M., Lisý P. (2013) Influence of barrel vibrations on the barrel muzzle position at the moment when the bullet exits. *Advanced Military Technology*. 8(1). pp. 89–102.
15. Azulayl I., Touatiz D., Manilovz B., Gur Y. (2011) Launch dynamics of the APAM-MP round. *Proceedings of 26th International Symposium on Ballistics, Miami, Florida USA*. pp. 956–965.
16. Keinänen H., Moilanen S., Tervokoski J., et al. (2012) Influence of rotating band construction on gun tube loading. Part I: Numerical approach. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 134(4). 041006. DOI: 10.1115/1.4006354.
17. Leonhardt D., Garnich M. (2019) A finite element model to predict the influence of asymmetries on barrel dynamics in small arms. *Proceedings of 31st International Symposium on Ballistics, Hyderabad, India*. DOI: 10.12783/ballistics2019/33139.
18. Timoshenko S.P. (1975) *Prochnost' i kolebaniya elementov konstruksiy* [Strength and vibrations of structural elements]. Moscow: Nauka.
19. Rusyak, I.G., Lipanov A.M., Ushakov V.M. (2016) *Fizicheskie osnovy i gazovaya dinamika gorennya porokhov v artillerijskikh sistemakh* [Physical fundamentals and gas dynamics of gunpowder combustion in artillery systems]. Moscow, Izhevsk: Institute of Computer Studies.
20. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. (2011) *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Binom. Laboratoriya znaniy.
21. Samarskiy A.A. (1971) *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow: Nauka.
22. Zienkiewicz O.S. (1971) *The Finite Element Method in Engineering Science*. London: McGraw-Hill Publishing Company.
23. Muskhelishvili N.I. (1966) *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka.
24. Sufyanov V.G. (2016) Matematicheskoe modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya stvola pri vystrele [Mathematical modelling of stress-strain state of gun barrel at shot]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve – Intelligent Systems in Manufacturing*. 14(3). pp. 13–17. DOI: 10.22213/2410-9304-2016-3-13-17.
25. Korolev S.A., Rusyak I.G., Sufyanov V.G. (2017) Issledovanie vliyaniya vozmushchayushchikh faktorov na traektoriyu dvizheniya snaryadov i raket pri strel'be s podvizhnogo nositelya [Study of the effect of disturbing factors on the trajectory of projectiles and rockets shooting from a moving carrier]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya Tula State University. Technical sciences*. 11. pp. 23–33.

Received: July 30, 2020