

УДК 534.2

DOI 10.17223/19988621/68/9

**А.В. Лун-Фу, М.А. Бубенчиков, С. Жамбаа, С.Г.-Ц. Цыдыпов****ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ПЕРЕХОДНИКОВ И ТУПИКОВЫХ ОТВЕТВЛЕНИЙ ГАЗОПРОВОДОВ**

С помощью волнового уравнения для упругой деформации осевой линии трубы, а также метода разделения переменных и функции Крылова, найдено точное решение задачи о распространении малых деформаций по трубе, имеющей различные способы закрепления на концах выделенного фрагмента трубопровода. Представлены также компактные программы расчета форм и частот колебаний во всех рассматриваемых случаях закрепления концов трубы.

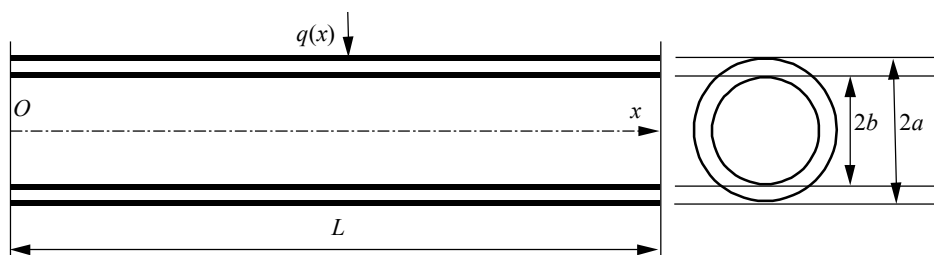
**Ключевые слова:** *фрагмент трубопровода, упругая волна, стоячая волна осевой линии, спектр частот, основной тон колебаний.*

Вибрации трубопроводов являются основным фактором, который выводит систему газоподачи из строя. Поэтому важными являются углубленное понимание явлений, приводящих к вибрациям, и построение эффективных математических моделей колебаний стенок трубы. В работе [1] на основе экспериментальных исследований описаны возможные причины акустически-индуцированной вибрации и предложены меры по снижению вибрационной нагрузки газопровода. В [2] рассмотрена модель вибрационного анализа трубопровода под действием пульсационной муфты давления газа. Приводится уравнение вынужденной вибрации трубопровода, позволяющее определить скорости вибрационного смещения трубопровода в зависимости от скорости подачи газа. В [3] описан метод конечных элементов, применяемый для определения виброакустических характеристик трубопроводной системы. Разработанные методики ориентированы на диаметр трубопровода, значительно меньший, чем длина акустической волны в жидкости. Результаты теоретических исследований подтверждены экспериментальными данными, полученными на гидравлическом стенде. Работа [4] посвящена обсуждению механизмов, приводящих к вибрациям трубопроводов, а также разработке мер корректирующего обслуживания трубопроводов. В [5] предлагается новый метод поиска и уплотнения отличительных признаков акустических сигналов, поступающих с микрофонных датчиков, установленных на системе охлаждения атомной электростанции лабораторного масштаба. Предлагаемый метод позволяет улучшить точность классификации данных, несмотря на громкие машинные шумы поблизости.

Таким образом, изменяющееся давление в системах подачи среды, газа или жидкости, является причиной возникновения вибраций в трубопроводе, которые при определенных условиях могут приводить к резонансным явлениям и разрушению узла технической системы.

### Дифференциальное уравнение статического прогиба трубы под действием поперечной нагрузки

На рис. 1 показан пример трубы длины  $L$ , закрепленной с одного или двух концов, на которую действует поперечная нагрузка  $q(x)$ . Требуется найти дифференциальное уравнение, описывающее прогиб  $w(x)$  оси этой полой конструкции.



**Рис. 1.** Эскиз балки, выполненной конструктивно в виде цилиндрической трубы, закрепленной с одного или двух концов

**Fig. 1.** Beam design represented constructively as a cylindrical pipe fixed at one or two ends

Приближенная инженерная теория, пригодная для малых деформаций, основана на предположении о том, что потенциальная энергия упругих деформаций пропорциональна квадрату кривизны осевой линии и выражается интегралом

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EJ \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (1)$$

В нем  $y = w(x)$  – искомое уравнение осевой линии, а выражение  $EJ$  называется коэффициентом жесткости на изгиб и состоит из произведения модуля Юнга  $E$  и геометрического момента инерции  $J$  поперечного сечения балки относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, и перпендикулярной к плоскости изгиба.

Так, например, в справочниках можно найти, что для стали модуль Юнга равен  $E = 20.6 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>. Для круглой цилиндрической трубы, показанной на рис. 1, площадь поперечного сечения  $S$  и момент инерции  $J$

$$S = \pi(a^2 - b^2), \quad J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_b^a \sin^2 \varphi r^3 dr = \pi \frac{a^4 - b^4}{4} = S \cdot \frac{a^2 + b^2}{4}. \quad (2)$$

С другой стороны, потенциальная энергия упругих деформаций (1) образовалась за счет работы  $A$  сил поперечной нагрузки  $q(x)$  на перемещении  $w(x)$

$$A = \int_0^L q w dx. \quad (3)$$

Таким образом, приравнявая выражения (1) и (3), получаем равенство

$$\frac{1}{2} \int_0^L EJ \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = \int_0^L q w dx. \quad (4)$$

Из интегрального выражения (4) нужно определить функцию  $w(x)$ , такую, которая придает минимальное значение функционалу (4). Это достигается применением средств вариационного исчисления. Вычисляя вариацию от обеих частей равенства (4), находим:

$$\int_0^L EJ w'' \delta(w'') dx = \int_0^L q(x) \delta(w) dx. \quad (5)$$

Под вариацией  $\delta(w)$  обычно подразумевается произвольная функция от переменной  $x$ , которая ограничена тем условием, что должна обращаться в ноль на концах интервала интегрирования. Кроме того, операция вариации перестановочна с операцией дифференцирования, т.е. выполняется равенство

$$\delta(w') = \frac{d}{dx} \delta(w). \quad (6)$$

Учитывая это обстоятельство, можно интеграл в левой части (5) проинтегрировать два раза по частям. Интегрируя первый раз, получим

$$\int_0^L EJ w'' \delta(w'') dx = \int_0^L EJ w'' \frac{d}{dx} \delta(w') dx = EJ w'' \delta(w') \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d}{dx} (EJ w'') \delta(w') dx. \quad (7)$$

Точно так же, после второго интегрирования по частям, получается выражение

$$\int_0^L EJ w'' \delta(w'') dx = EJ w'' \delta(w') \Big|_0^L - \frac{d}{dx} [EJ w''] \delta(w) \Big|_0^L + \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} (EJ w'') \delta(w) dx. \quad (8)$$

Таким образом, формула (5) после подстановки (8) приобретает вид

$$EJ w'' \delta(w') \Big|_0^L - \frac{d}{dx} [EJ w''] \delta(w) \Big|_0^L + \int_0^L \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - q(x) \right] \delta(w) dx = 0. \quad (9)$$

Вне-интегральные члены в уравнении (9) обращаются в ноль, так как считается, что вариации  $\delta(w)$  и  $\delta(w')$  равны нулю на концах рассматриваемой области (при  $x = 0$  и при  $x = L$ ).

Это приводит к равенству нулю интегрального члена в формуле (9), что, в свою очередь, требует равенства нулю выражения в квадратных скобках. В результате приходим к дифференциальному уравнению, определяющему функцию прогиба  $w(x)$ :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x). \quad (10)$$

Таким образом, если нам известна поперечная нагрузка на трубу  $q(x)$ , то для получения прогиба  $w(x)$  нужно просто решать дифференциальное уравнение (10) аналитическим или численным способом с соответствующими граничными условиями на концах. Поскольку это уравнение четвертого порядка, то нужно задавать четыре граничных условия, в качестве которых можно задавать значения функции  $w(x)$  и ее производных, или их линейные комбинации, при  $x = 0$  и  $x = L$ . Уравнение (10) является основным уравнением, описывающим поперечные колебания фрагмента трубопровода. Оно обычно приводится в учебниках по сопротивлению материалов без подробного вывода, так как уравнение (10) можно получить многими различными способами.

Отметим следующие важные для расчета формулы. Изгибающий момент  $M(x)$  и поперечная сила  $F(x)$ , которые приложены к трубе в сечении  $x = const$ , определяются выражениями:

$$EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x), \quad \frac{d}{dx} \left[ EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = F(x). \quad (11)$$

Формулы (11) можно использовать для расчета этих величин, если известна функция прогиба  $w(x)$ .

Такая элементарная теория прогиба широко применяется в строительной механике при изучении прогиба мостов или других балочных конструкций под действием неподвижных или подвижных грузов при различных условиях закрепления концов конструкций.

Граничные условия при решении дифференциального уравнения (10) должны выбираться в зависимости от способа закрепления концов трубы. Так, например, если оба конца жестко зажаты, то должны выполняться следующие четыре граничных условия:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(L) = 0, \quad w'(L) = 0. \quad (12)$$

Если второй конец свободен, то на нем должны быть равны нулю сила и момент, приложенные в сечении  $x = L$ . Тогда из (11) следует, что для трубы постоянного сечения граничные условия будут иметь вид

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w''(L) = 0, \quad w'''(L) = 0. \quad (13)$$

То есть на свободном конце вторая и третья производная от функции прогиба  $w(x)$  должны обе обращаться в ноль.

Конечно, вся теория прогиба значительно усложняется, если поперечное сечение трубы не симметрично. В этом случае не существуют чисто изгибные деформации, поскольку появляются еще крутильные деформации. Поперечные сечения трубы при этом получаются не плоскими фигурами. В таких случаях трубы совершают совместные упруго-крутильные деформации.

### Поперечные изгибные колебания упругой трубы

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний упругой трубы можно получить из основного статического уравнения (10), заменяя в нем нагрузку  $q(x)$  силой инерции единичного фрагмента трубы:

$$q(x) = -\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Здесь  $S$  – площадь сечения, а  $\rho$  – плотность материала трубы. Для стали эта плотность приблизительно равна  $\rho \approx 8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

Таким образом, уравнение изгибных колебаний трубы имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (15)$$

Если труба имеет постоянное поперечное сечение, то коэффициент жесткости  $EJ$  можно вынести за скобку и уравнение (15) упрощается:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EJ} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) можно искать в виде произведения двух множителей, один из которых является периодической функцией времени и колеблется с угловой частотой  $\omega$ :

$$w(x, t) = \cos(\omega t + \varepsilon) W(x). \quad (17)$$

Тогда для функции  $W(x)$  получается обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее стоячую волну осевой линии:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{1}{L^4} \left( \frac{\rho S \omega^2 L^4}{EJ} \right) W = 0. \quad (18)$$

Выражение в круглых скобках в формуле (18) представляет собой безразмерную величину. Поэтому имеет смысл ввести для него специальное обозначение:

$$\frac{\rho S \omega^2 L^4}{EJ} = \lambda^4. \quad (19)$$

Если значение параметра  $\lambda$  нам известно, то из (19) можно найти частоту колебаний трубы:

$$\omega^2 = \frac{EJ\lambda^4}{\rho S L^4}, \quad \omega = \frac{\lambda^2}{L^2} \sqrt{\frac{J}{S}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (20)$$

Радикалы в формуле (20) имеют следующий физический смысл:  $\sqrt{J/S}$  – радиус инерции поперечного сечения трубы, величина  $\sqrt{E/\rho}$  имеет размерность скорости и определяет порядок величины скорости перемещения точек поперечного сечения трубы при изгибных деформациях. Для стальной трубы  $\sqrt{E/\rho} \approx 13622$  м/с. Из формулы (2) также имеем, что для цилиндрической трубы с внешним радиусом  $a$  и внутренним  $b$  радиус инерции поперечного сечения конструкции будет равен  $\sqrt{J/S} = \sqrt{a^2 + b^2}/2 \approx a/\sqrt{2}$ . Таким образом, угловая частота поперечных колебаний трубы зависит от ее размеров и от безразмерного параметра  $\lambda$ , который можно найти из условий закрепления ее концов.

Стационарное уравнение для средних положений колеблющихся точек осевой линии с учетом обозначения (19) записывается в виде

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{\lambda^4}{L^4} W = 0. \quad (21)$$

Его общее решение с произвольными константами  $A, B, C, D$  выражается через гиперболические и тригонометрические функции и записывается в виде

$$W(x) = A \operatorname{ch} \lambda \frac{x}{L} + B \cos \lambda \frac{x}{L} + C \operatorname{sh} \lambda \frac{x}{L} + D \sin \lambda \frac{x}{L}. \quad (22)$$

### Решения для частных случаев закрепления концов трубы

Рассмотрим решения уравнения (21) для трех случаев закрепления краев трубы: оба конца жестко зажаты; оба конца являются свободными; один конец жестко зажат, а второй является свободным.

В первом случае должны выполняться граничные условия:

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 0; \quad W(L) = 0, \quad W'(L) = 0. \quad (23)$$

Они означают, что осевая линия  $y = W(x)$  соприкасается с прямолинейным отрезком длины  $L$  на его концах. В этом случае решение вида (22) можно составить в виде следующей линейной комбинации из двух функций:

$$W(x) = A \left[ \operatorname{ch} \lambda \frac{x}{L} - \cos \lambda \frac{x}{L} \right] + B \left[ \operatorname{sh} \lambda \frac{x}{L} - \sin \lambda \frac{x}{L} \right]. \quad (24)$$

Здесь, очевидно, обе функции в квадратных скобках, называемые обычно функциями Крылова, удовлетворяют уравнению (21) и обращаются в ноль вместе с первой производной при  $x = 0$ . Граничные условия (23) для выражения (24) на втором конце трубы (при  $x = L$ ) запишем в виде двух равенств:

$$\begin{aligned} W(L) &= A[\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda] + B[\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda] = 0, \\ W'(L) &= A \frac{\lambda}{L} [\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda] + B \frac{\lambda}{L} [\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda] = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, получаем однородную систему двух алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} A[\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda] + B[\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda] &= 0, \\ A[\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda] + B[\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda] &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Для того чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю, и, кроме того, можно выразить коэффициент  $B$  через коэффициент  $A$  по формуле

$$B = -A \frac{\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda}{\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (24), получаем следующее выражение для поперечного прогиба трубы, жестко закрепленной на ее концах, с точностью до постоянного множителя  $A$ :

$$W(x) = \left[ \operatorname{ch} \lambda \frac{x}{L} - \cos \lambda \frac{x}{L} \right] - \frac{\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda}{\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda} \left[ \operatorname{sh} \lambda \frac{x}{L} - \sin \lambda \frac{x}{L} \right]. \quad (28)$$

Параметр  $\lambda$  найдем из условия равенства нулю определителя системы (26):

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda & \operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda \\ \operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda & \operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После вычисления и упрощения этого определителя, получаем

$$\begin{aligned} &(\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda)^2 - (\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda)(\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda) = \\ &\operatorname{ch}^2 \lambda - 2 \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda + \cos^2 \lambda - \operatorname{sh}^2 \lambda + \sin^2 \lambda = 2 - 2 \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda = 0. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение для определения параметра  $\lambda$  имеет вид

$$\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda = 1. \quad (29)$$

Уравнение (29) имеет бесконечное множество корней. Корню  $\lambda = 0$  соответствует решение  $W(x) = 0$ . Остальные положительные корни уравнения (29) можно вычислить каким-либо численным способом. Они имеют следующие приближенные числовые значения:

$$\lambda_1 = 4.730, \quad \lambda_2 = 7.853, \quad \lambda_3 = 10.996, \quad \lambda_4 = 14.137, \quad \lambda_5 = 17.279... \quad (30)$$

Причем для больших значений  $n > 3$  с хорошей точностью выполняется следующее соотношение:

$$\lambda_{n+1} \approx \lambda_n + \pi.$$

Так как для каждого значения корня  $\lambda_n$  существует своя частота колебаний, вычисляемая по формуле (20), и своя форма колебаний (см. (28)), то

$$W_n(x) = \left[ \operatorname{ch} \lambda_n \frac{x}{L} - \cos \lambda_n \frac{x}{L} \right] - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n - \cos \lambda_n}{\operatorname{sh} \lambda_n - \sin \lambda_n} \left[ \operatorname{sh} \lambda_n \frac{x}{L} - \sin \lambda_n \frac{x}{L} \right]. \quad (31)$$

Подобные формулы можно получить и для других способов закрепления концов трубы.

Во втором случае закрепления, когда оба конца являются свободными, граничные условия сводятся к равенству нулю силы и момента (11), т.е. на обоих концах должны равняться нулю вторая и третья производная по  $x$  от функции  $W(x)$ :

$$W''(0) = 0, \quad W'''(0) = 0; \quad W''(L) = 0, \quad W'''(L) = 0. \quad (32)$$

Для этого случая решение уравнения колебаний (21) следует искать в виде

$$W(x) = A \left[ \operatorname{ch} \lambda \frac{x}{L} + \cos \lambda \frac{x}{L} \right] + B \left[ \operatorname{sh} \lambda \frac{x}{L} + \sin \lambda \frac{x}{L} \right]. \quad (33)$$

Действительно, здесь обе функции в квадратных скобках удовлетворяют условию равенства нулю второй и третьей производной при  $x = 0$ . Чтобы эти условия выполнялись также и при  $x = L$ , имеем следующую однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} A[\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda] + B[\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda] &= 0, \\ A[\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda] + B[\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda] &= 0. \end{aligned}$$

Она оказалась в точности совпадающей с аналогичной системой (26) для трубы с двумя зажатыми концами. Поэтому корни характеристического уравнения  $\lambda_n$  будут совпадать с числами (30). Это говорит о том, что частоты колебаний для трубы со свободными концами будут такими же, как и для трубы с зажатыми концами. Однако формы их колебаний в этом случае будут другими. Они, в отличие от формулы (31), имеют следующий вид:

$$W_n(x) = \left[ \operatorname{ch} \lambda_n \frac{x}{L} + \cos \lambda_n \frac{x}{L} \right] - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n - \cos \lambda_n}{\operatorname{sh} \lambda_n - \sin \lambda_n} \left[ \operatorname{sh} \lambda_n \frac{x}{L} + \sin \lambda_n \frac{x}{L} \right]. \quad (34)$$

Из этого решения видно, что функция  $W_n(x)$  и ее производная по  $x$  не равны нулю при  $x = 0$  и при  $x = L$ .

Третий случай: труба защемлена в точке  $x = 0$ , а другой ее конец свободен. Тогда граничные условия для уравнения (21) имеют вид

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 0; \quad W''(L) = 0, \quad W'''(L) = 0. \quad (35)$$

В этом случае решение следует искать в форме (28), т.е.

$$W(x) = A \left[ \operatorname{ch} \lambda \frac{x}{L} - \cos \lambda \frac{x}{L} \right] + B \left[ \operatorname{sh} \lambda \frac{x}{L} - \sin \lambda \frac{x}{L} \right]. \quad (36)$$

Приравняв к нулю в точке  $x = L$  вторую и третью производные от функции (36) по переменной  $x$ , получим систему двух линейных уравнений относительно коэффициентов  $A$  и  $B$ , которая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} A[\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda] + B[\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda] &= 0, \\ A[\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda] + B[\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda] &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Из ее первого уравнения находим коэффициент  $B$ :

$$B = -A \frac{\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda}{\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda}. \quad (38)$$

Раскрывая и упрощая определитель системы (37), имеем

$$(\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda)^2 - (\operatorname{sh}^2 \lambda - \sin^2 \lambda) = 2 + 2 \operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda = 0.$$

Отсюда следует, что величины  $\lambda_n$  являются корнями характеристического уравнения

$$\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda = -1. \quad (39)$$

Они не совпадают с корнями (30). Вычисленные численным методом, они имеют следующие приближенные значения:

$$\lambda_1 = 1.875, \lambda_2 = 4.694, \lambda_3 = 7.855, \lambda_4 = 10.996, \lambda_5 = 14.137, \lambda_6 = 17.279 \dots (40)$$

Сравнение этих значений с данными предыдущих задач (30) показывает, что отличия касаются только первых трех корней, а остальные корни практически совпадают. Таким образом, для трубы, у которой один конец закреплен, а другой свободен, первые три тона колебаний имеют более низкую частоту, а остальные тоны имеют те же частоты, что и труба с двумя зажатыми или с двумя свободными концами.

Формы колебаний трубы, у которой один конец зажат, а другой конец свободен, определяются следующим выражением:

$$W_n(x) = \left[ \operatorname{ch} \lambda_n \frac{x}{L} - \cos \lambda_n \frac{x}{L} \right] - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n + \cos \lambda_n}{\operatorname{sh} \lambda_n + \sin \lambda_n} \left[ \operatorname{sh} \lambda_n \frac{x}{L} - \sin \lambda_n \frac{x}{L} \right]. \quad (41)$$

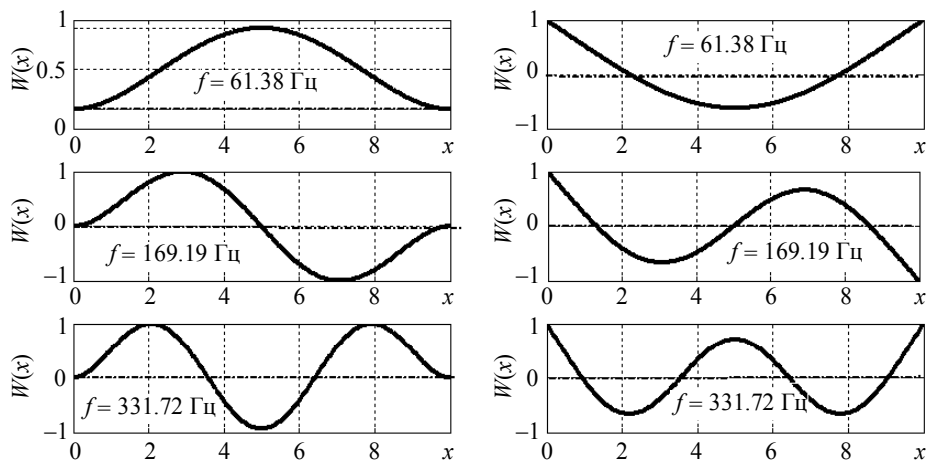
### Пример расчета

Предполагается, что нам известны числа  $\lambda$  как корни соответствующих характеристических уравнений (см. (30) и (40)):

$$\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda = -1.$$

Для расчета собственных частот  $f = \omega/2\pi$  по формулам (20) и соответствующих форм колебаний по выражениям (31), (34) и (41) составлена программа.

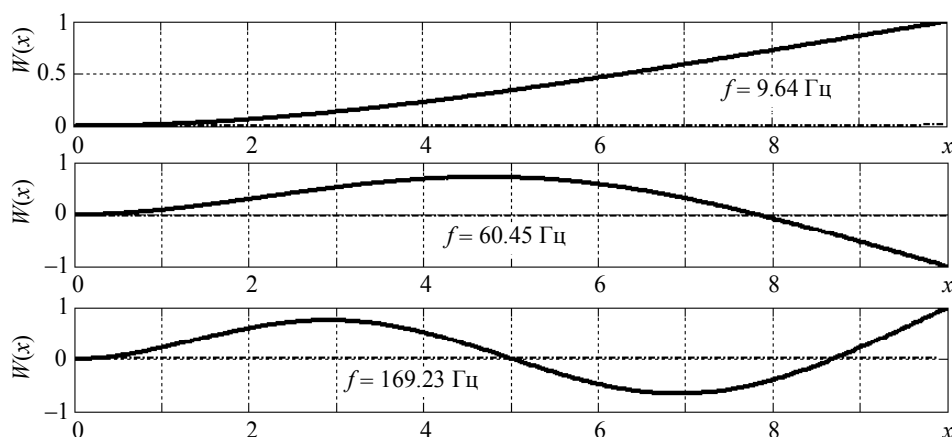
Результаты работы программы (1) представлены на рис. 2 и 3.



**Рис. 2.** Формы и частоты колебаний трубы с двумя зажатыми концами (слева) и с двумя свободными концами (справа)

**Fig. 2.** Shapes and frequencies of vibrations for a pipe with two fixed (at the left) and unfixed (at the right) ends





**Рис. 3.** Формы и частоты колебаний трубы, зажатой на одном краю и свободной на другом  
**Fig. 3.** Shapes and frequencies of vibrations for a pipe with one fixed and another unfixed ends

Наиболее низкий тон  $f = 9.64$  Гц соответствует корню  $\lambda = 1.875$  (см. рис. 3)

### Заключение

В рамках предположения о малости изгибных деформаций трубы, при которых форма сечений, находящихся в плоскостях, перпендикулярных осевой линии деформированного фрагмента трубопровода, остается постоянной, получено уравнение для изгибных деформаций. Такое уравнение и ранее получалось различными способами. В данной работе оно выведено с применением средств вариационного исчисления. Гиперболическое уравнение для смещения точек осевой линии трубы интегрируется аналитически с применением метода разделения переменных и функций Крылова, являющихся фундаментальными решениями соответствующего стационарного уравнения для осевой линии. Естественно, что получающиеся частоты и формы колебаний зависят от конкретных случаев закрепления концов трубы.

Исследованы все возможные варианты закрепления концов, следовательно, и распространения упругих волн по отдельному прямоугольному фрагменту трубопровода. Счетные множества корней характеристических уравнений для стоячих волн, отвечающих конкретным способам закрепления концов, определяют спектры частот колебаний. По найденной в работе связи частоты с корнями характеристического уравнения легко определяются основной тон упругих колебаний и все другие моды колебаний фрагмента трубопровода.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Musaakhunova L.F., Igolkin A.A., Shabanov K.Y. The vibroacoustic characteristics research of the gas pipeline // *Procedia Engineering*. 2015. V. 106. P. 316–324. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.06.041.
2. Tian J., Yuan C., Wu C., Liu G., Yang J. The vibration analysis model of pipeline under the action of gas pressure pulsation coupling // *Engineering Failure Analysis*. 2016. V. 66. P. 328–340. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2016.05.017.
3. Mironova T.B., Prokofiev A.B., Sverbilov V.Y. The finite element technique for modeling of pipe system vibroacoustical characteristics // *Procedia Engineering*. 2017. V. 176. P. 681–688. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.02.313.

4. Guo B., Song S., Ghalambor A., Lin T.R. Pipeline vibration and condition based maintenance // Design, Installation and Maintenance. 2014. P. 299–337. DOI: 10.1016/B978-0-12-397949-0.00018-2.
5. Oh. S.W., Yoon D-B., Kim G.J., Bae J-H., Kim H.S. Acoustic Data condensation to enhance pipeline leak detection // Nuclear Engineering and Design. 2018. V. 327. P. 198–211. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2017.12.006.
6. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: Изд-во НКТП СССР, 1935. 675 с.
7. Стретт Дж.В. (лорд Рэлей). Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. 1. 503 с.
8. Тимошенко С.П., Янг Д.К., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 446 с.
9. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: ГИТТЛ, 1958. 628 с.

Статья поступила 11.03.2019 г.

Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A., Jambaa S., Tsydygov S.G.-Ts. (2020) DETERMINING OF TRANSVERSE VIBRATION FREQUENCIES FOR CROSSOVERS AND DEAD ENDS OF GAS PIPELINES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 95–105

DOI 10.17223/19988621/68/9

Keywords: pipeline segment, elastic wave, standing wave of an axial line, frequency spectrum, basic vibration mode.

The paper presents a stationary equation for bending deformations of a hollow rod derived by means of variational calculus. Further, the authors introduce into consideration an inertial term as consistent with a standard procedure and obtain the wave equation for pipe bending vibrations. Applying the method of separation of variables, the resulting hyperbolic equation of vibrations is reduced to an ordinary fourth-order differential equation for a standing wave on the axial line of the pipe. Fundamental solutions to the latter equation are referred to as the Krylov functions, while the standing wave is represented as a linear combination of two independent Krylov functions. The solution to the obtained homogeneous equation is only found at certain values of characteristic parameters which are amounted to a countable set for each case of fixed ends of the pipeline segment. Thus, the whole frequency spectrum of the pipe bending vibrations is determined, and the main vibration mode is revealed for each case of fixed pipeline ends.

*Aleksandr V. LUN-FU* (Gazprom Transgaz Tomsk Ltd., Tomsk, Russian Federation). E-mail: a.lunfu@gtt.gazprom.ru

*Mikhail A. BUBENCHIKOV* (Candidate of Physics and Mathematics, Gazprom Transgaz Tomsk Ltd., Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

*Soninbayar JAMBAA* (Candidate of Physics and Mathematics, Director Centre for Fundamental Research of Mongolian University of Science and Technology, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia). E-mail: jsoninbayar@yahoo.com

*Sevan G. TSYDYPOV* (Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation). E-mail: sivan77@mail.ru

#### REFERENCES

1. Musaakhunova L.F., Igolkin A.A., Shabanov K.Y. (2015) The vibroacoustic characteristics research of the gas pipeline. *Procedia Engineering*. 106. pp. 316–324. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.06.041.
2. Tian J., Yuan C., Wu C., Liu G., Yang J. (2016) The vibration analysis model of pipeline under the action of gas pressure pulsation coupling. *Engineering Failure Analysis*. 66. pp. 328–340. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2016.05.017.
3. Mironova T.B., Prokofiev A.B., Sverbilov V.Y. (2017) The finite element technique for modeling of pipe system vibroacoustical characteristics. *Procedia Engineering*. 176. pp. 681–688. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.02.313.

4. Guo B., Song S., Ghalambor A., Lin T.R. (2014) Pipeline vibration and condition based maintenance. *Design, Installation and Maintenance*. pp. 299–337. DOI: 10.1016/B978-0-12-397949-0.00018-2.
5. Oh S.W., Yoon D-B., Kim G.J., Bae J-H., Kim H.S. (2018) Acoustic data condensation to enhance pipeline leak detection. *Nuclear Engineering and Design*. 327. pp. 198–211. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2017.12.006.
6. Love A.A (1892) *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Vol. 1*. Cambridge: CambridgeUniversity Press.
7. Strutt Rayleigh J.W. (1955) *Theory of Sound. Vol. 1*. Ann Arbor: The University of Michigan Library.
8. Weaver Jr.W., Timoshenko S.P., Young. D.H. (1990) *Vibration Problems in Engineering, 5th Edition*. Hoboken: John Wiley & Sons.
9. Babakov I.M. (1964) *Theory of Vibrations*. Tonopah: Foreign Technology Division.

Received: March 11, 2019