

УДК 535.015

DOI: 10.17223/00213411/63/11/104

С.В. СУЧКОВ

ПСЕВДОЭРМИТОВЫЙ МОДУЛИРОВАННЫЙ ДИМЕР *

Исследуется модулированный псевдоэрмитовый оптический димер. Определены области параметров, где собственные моды димера сохраняют свою мощность. Было показано, что такой димер обладает несколькими особыми точками, и установлено, что моды димера могут сохранять среднюю мощность по периоду даже в случае, если каждый из сегментов находится в фазе нарушенной симметрии. Возможен также случай, когда каждый сегмент находится в РТ-симметричной фазе, но средняя по периоду мощность целого димера не сохраняется. Данная особенность определяется соотношением между длиной димера и периодом биения сигнала, возникающего в отдельных сегментах димера.

Ключевые слова: РТ-симметрия, псевдоэрмитовые системы, димер, особые точки.

Введение

Концепция РТ-симметрии [1, 2], утверждающая, что неэрмитовы гамильтонианы могут обладать полностью вещественным спектром при определенных условиях, в настоящее время широко используется при разработке разнообразных оптических устройств со сбалансированным усилением и потерями, которые открывают новые возможности по эффективному управлению оптическими сигналами. Симметричное распределение областей усиления и потерь, а также показателя преломления приводит к неортогональности собственных мод, наличию потока энергии и точки бифуркации (особой точки) – так называемого порога нарушения РТ-симметрии. Таким образом, РТ-симметричные системы сочетают в себе свойства консервативных и активных систем и могут использоваться для усиления, фильтрации и переключения режимов функционирования систем [3–6]. Одной из особенностей РТ-симметричных систем является наличие исключительной (особой) точки, которая разделяет режим функционирования системы на РТ-симметричную фазу и фазу нарушенной симметрии и играет важную роль в линейной и нелинейной динамике [4, 7]. В РТ-симметричной фазе сохраняется средняя мощность собственных мод, а в фазе с нарушенной симметрией наблюдается экспоненциальный рост мощности. Так, в работе [8] была продемонстрирована одномодовая генерация в связанных микрзеркальных лазерах вблизи исключительной точки, а также были реализованы системы повышенной чувствительности [9–11].

РТ-симметричные структуры принадлежат к более широкому классу псевдоэрмитовых систем с полностью вещественным спектром [12–14]. Псевдоэрмитовые системы предоставляют дополнительные возможности по управлению сигналами, поскольку не накладывают специальных условий симметрии.

Цель данной работы – изучение свойств и особенностей псевдоэрмитового модулированного димера – пары связанных волноводов с усилением и потерями, изменяющимися вдоль оси волноводов, а также определение его потенциальных возможностей по управлению световыми сигналами. Отметим, что частным случаем такой системы является РТ-симметричный димер – простейшая конфигурация РТ-симметричной оптической системы. Однако даже такая система уже может демонстрировать важные новые физические явления [15–17]. Модулированные РТ-симметричные системы исследовались в работах [18, 19]. Так, в работе [18] рассматривался РТ-симметричный димер с модуляцией показателя преломления, а в [19] – решетка волноводов с временной модуляцией областей с усилением и потерями. Предложенная нами структура представляет собой последовательную комбинацию РТ-симметричных димеров и ранее не исследовалась.

Модель и свойства псевдоэрмитового димера

Рассмотрим два связанных оптических волновода, т.е. оптический димер, у которого физические параметры изменяются вдоль оси. Такими параметрами могут быть показатель преломления

* Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС», проект № 18-1-3-39-1.

[18, 20], а также коэффициент усиления и потерь. Частный случай такой системы, который будет исследован в настоящей работе, схематично изображен на рис. 1.

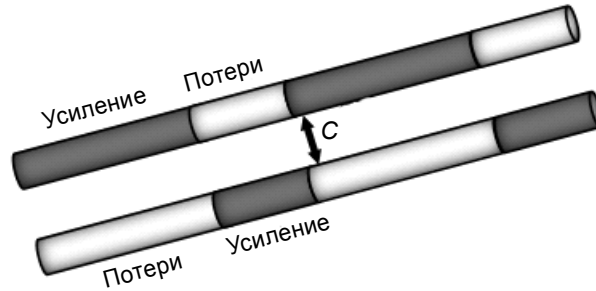


Рис. 1. Схематичное изображение псевдоэрмитового модулированного димера. Серым цветом обозначены участки с усилением, а белым – с потерями; C – коэффициент связи, определяемый расстоянием между волноводами

Распространение сигнала в данной системе в случае отсутствия дисперсии может быть описано в терминах медленно меняющихся амплитуд мод с помощью уравнения

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(z) & -C \\ -C & V_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где a_1 и a_2 – амплитуды мод; $V_{1,2}(z)$ – комплексный потенциал; C – коэффициент связи, определяемый расстоянием между волноводами. Для того чтобы данная система являлась РТ-симметричной, ее гамильтониан должен быть одновременно инвариантен относительно преобразования \mathbf{P} и \mathbf{T} , где \mathbf{P} – оператор пространственной симметрии, который действует как $a_1 \leftrightarrow a_2$, а оператор \mathbf{T} изменяет направление $z \rightarrow -z$ и осуществляет комплексное сопряжение. Отсюда следует условие на потенциал системы $V_1(z) = V_2^*(-z)$, где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Обычно потенциал V рассматривается как постоянная величина, не зависящая от z , однако в данной работе исследуется модулированная периодическая структура, в которой период состоит из двух РТ-симметричных димеров.

Для начала напомним свойства РТ-симметричного димера. Потенциал $V_{1,2}(z)$ представим в виде $V_{1,2}(z) = i\gamma_{1,2} + \beta_{1,2}$, где $\gamma_{1,2} > 0 (< 0)$ – величина усиления (потерь), $\beta_{1,2}$ – константа распространения. Тогда условие РТ-симметрии будет выполнено, если $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$ и $\beta_1 = \beta_2$. Для простоты предположим, что волноводы имеют одинаковый показатель преломления, поэтому можно считать $\beta_{1,2} = 0$. Представим уравнение (1) в виде

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_{\text{out}} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_{\text{in}}, \quad (2)$$

где \mathbf{T} – матрица перехода, преобразующая сигнал на входе $(a_1, a_2)_{\text{in}}^T$ в сигнал на выходе $(a_1, a_2)_{\text{out}}^T$. Данную матрицу можно получить, решив уравнение (1):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_1 L} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_2 L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (3)$$

Здесь λ_1 и λ_2 – собственные значения; \mathbf{a}^1 и \mathbf{a}^2 – собственные векторы (столбцы) матрицы $\begin{pmatrix} i\gamma & -C \\ -C & -i\gamma \end{pmatrix}$; L – длина димера. В особом случае, когда коэффициент усиления γ равен коэффициенту связи C , собственные значения, а также векторы совпадают и система находится в так называемой точке нарушения РТ-симметрии. Тогда матрица перехода запишется как $\mathbf{T} = \mathbf{E} - CL \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$, где \mathbf{E} – единичная матрица.

Отметим, что в РТ-симметричном димере, когда система находится в РТ-симметричной фазе ($C > \gamma$), мощность собственных мод сохраняется вдоль оси z , в то время как мощность произвольного входящего сигнала колеблется вокруг некоторого среднего значения с периодом

$$2\pi/|\lambda_1 - \lambda_2|. \quad (4)$$

Это связано с тем, что собственные моды димера не ортогональны [4]. Для фазы нарушенной симметрии $C < \gamma$ характерен экспоненциальный рост мощности после некоторого переходного процесса. Изучим далее модулированный периодический димер, один период которого состоит из двух РТ-симметричных сегментов (см. рис. 1).

Очевидно, что псевдоэрмитовый димер, образованный повторяющимися двухсегментными димерами, обладает теми же самыми собственными модами. Поэтому для простоты рассмотрим один период димера с матрицей перехода $T_{\text{tot}} = T_2 T_1$, где $T_{1,2}$ – матрицы перехода первого и второго сегмента соответственно. Чтобы определить области параметров, в которых система сохраняет энергию собственных мод, вычислим значение параметра Λ :

$$\Lambda = |\ln |\lambda_1 / \lambda_2|| \quad (5)$$

в зависимости от параметров усиления и потерь γ и параметра связи C . Здесь λ_1 и λ_2 – собственные числа матрицы T_{tot} . Используя формулу (3), можем получить аналитические выражения для данных чисел, которые здесь не приводятся из-за громоздкости. Если значение параметра Λ равно нулю, то собственные моды сохраняют свою мощность после прохождения через составной димер (т.е. средняя мощность по периоду сохраняется), в то время как для случая $\Lambda > 0$ мощность мод не сохраняется. Пусть общая длина одного периода равна единице, тогда для разных соотношений между длинами первого и второго сегмента получается результат, представленный на рис. 2.

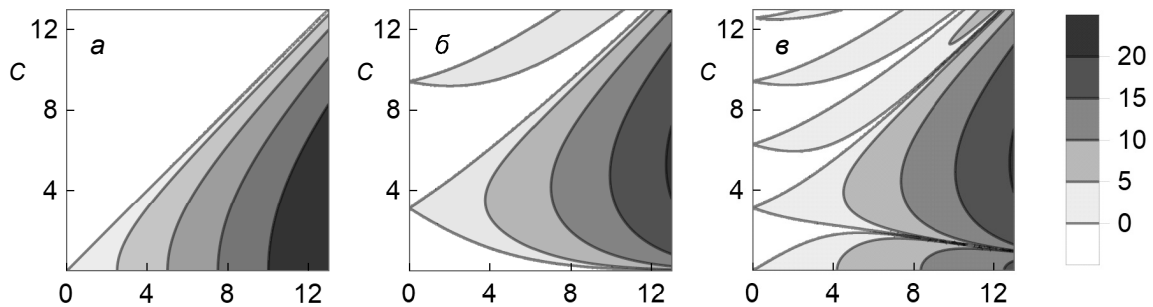


Рис. 2. Соотношение собственных чисел матрицы T_{tot} , Λ . Области параметров, в которых собственные моды димера сохраняют среднюю мощность, отображены белым цветом; а – соотношение между сегментами димера 1:0 (РТ-симметричный димер), б – соотношение 1:1 (РТ-симметричный модулированный димер), в – соотношение 4:1

Для РТ-симметричного димера условие нарушения РТ-симметрии известно, $C = \gamma$ (рис. 2, а), в то время как для модулированного РТ-симметричного димера, когда соотношение между двумя сегментами равно 1:1 (рис. 2, б), зависимость не тривиальна. Еще более сложная зависимость наблюдается в случае, показанном на рис. 2, в, где соотношение сегментов было выбрано 4:1. Отметим, что существуют области параметров, где собственные моды не сохраняют свою мощность, несмотря на то, что оба сегмента в отдельности находятся в РТ-симметричной фазе, $C > \gamma$. Верно и другое – собственные моды могут сохранять свою мощность, даже если оба сегмента находятся в фазе нарушенной симметрии, $C < \gamma$. Интересно, что если зафиксировать параметр C и при этом изменять величину усиления и потерь γ , то можно заметить, что параметр Λ несколько раз пересекает границу белой области (области устойчивости) на рис. 2, б и в. Это означает, что псевдоэрмитовый модулированный димер имеет несколько особых точек.

Динамика сигнала в псевдоэрмитовом димере

Для того чтобы исследовать отмеченный выше факт, построим динамику сигнала, распространяющегося внутри димера, с соотношением сегментов 4:1 для нескольких наборов параметров. Для лучшей наглядности рассмотрим два периода псевдоэрмитового димера. На рис. 3 пред-

ставлена динамика мощности P в первом и втором волноводах $|a_1(z)|^2$ и $|a_2(z)|^2$ соответственно, а также их суммарная мощность для следующих случаев: $C = 2$, $\gamma = 3$ (а); $C = 3$, $\gamma = 2$ (б); $C = 4$, $\gamma = 1$ (в).

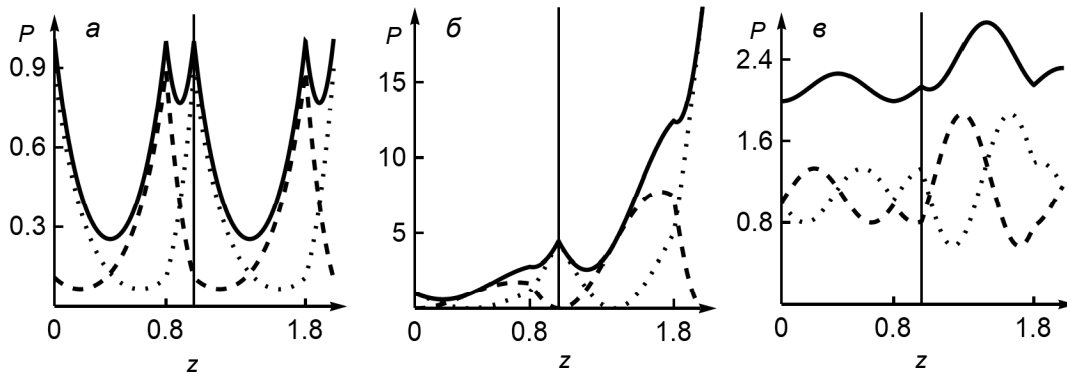


Рис. 3. Эволюция мощности сигнала в псевдоэрмитовом димере. Штриховая линия – мощность в первом волноводе, пунктирная – во втором, сплошная – их суммарная мощность. Вертикальная линия отмечает один период псевдоэрмитового димера. Параметры: а – $C = 2$, $\gamma = 3$; б – $C = 3$, $\gamma = 2$; в – $C = 4$, $\gamma = 1$

На рис. 3, а оба сегмента находятся в фазе нарушенной симметрии, однако мощность сигнала после прохода через димер собственной моды не изменяется. На рис. 3, б, напротив, оба сегмента находятся в РТ-симметричной фазе, однако мощность собственной моды изменяется. Собственные моды могут быть получены из уравнения (3). На рис. 3, в оба сегмента также находятся в РТ-симметричной фазе, при этом параметр $\Lambda = 0$, однако представлена эволюция некоторого произвольного начального состояния $(a_1, a_2)^T = (1, 1)^T$, которое не сохраняет свою среднюю мощность. Рассмотрим данные примеры более подробно.

В случае, когда оба сегмента находятся в фазе нарушенной симметрии (рис. 3, а), для сохранения мощности сигнала второй сегмент должен компенсировать влияние первого. Это возможно благодаря тому, что в данной фазе сигнал концентрируется в волноводе с усилением [15, 16], а после прохождения через первый сегмент усиление заменяется потерями, что приводит к обратному перетеканию мощности сигнала.

Другой случай, представленный на рис. 3, б, реализуется из-за того, что собственные моды двухсегментного димера не могут совпадать с собственными модами любого из РТ-симметричных димеров. Однако на каждом из участков они выражаются в виде суперпозиции мод того или иного сегмента. Как отмечалось ранее, данная суперпозиция представляет собой биение с периодом, определяемым формулой (4). Поэтому соотношение между длинами сегментов, а также периодом биения играет ключевую роль в данном случае. Отметим важное отличие РТ-симметричного димера от двухсегментного псевдоэрмитового: в РТ-симметричной фазе РТ-симметричный димер сохраняет среднюю мощность для любого входящего сигнала, в то время как псевдоэрмитовый димер сохраняет среднюю мощность только для собственных мод. На рис. 3, в видна эволюция мощности некоторого произвольного входящего сигнала, не совпадающего ни с одной из собственных мод. Таким образом, чтобы двухсегментный димер сохранял среднюю мощность любого входящего сигнала в РТ-симметричной фазе, длина каждого из сегментов должна быть кратна периоду биения (4). Данные особенности должны быть учтены при использовании псевдоэрмитового димера для управления сигналами в оптических системах.

Выводы

Исследован псевдоэрмитовый модулированный димер, один период которого состоит из двух РТ-симметричных сегментов. Определены области параметров, где собственные моды сохраняют свою мощность. Показано, что такой димер имеет несколько особых точек, что позволит использовать его для переключения режимов функционирования оптических систем в нелинейном случае. Установлено, что моды димера могут сохранять среднюю мощность по периоду даже в случае, если каждый из сегментов находится в фазе нарушенной симметрии. Также возможен случай, когда каждый сегмент находится в РТ-симметричной фазе, но средняя по периоду мощность цело-

го димера не сохраняется. Данные особенности были проанализированы и установлена связь с периодом биения отдельных РТ-симметричных сегментов. Предложена реализация псевдозермитового димера, который сохраняет среднюю мощность любого входящего сигнала.

Рассмотренная в работе структура может быть использована в составе фотонных решеток для усиления, фильтрации и переключения режимов в нелинейном случае. Идея, изложенная в работе, об использовании РТ-симметричных сегментов в составе оптических систем, не являющихся в целом РТ-симметричными, может найти применение в области микрорезонаторов, волоконных лазеров, многоядерных волокон и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bender C.M. and Boettcher S. // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – V. 80. – P. 5243–5246.
2. Bender C.M. // *Rep. Prog. Phys.* – 2007. – V. 70. – P. 947–1018.
3. *Parity-time Symmetry and Its Applications* / eds. D. Christodoulides and J. Yang. – Singapore: Springer, 2018.
4. El-Ganainy R., Makris K.G., Khajavikhan M., et al. // *Nat. Phys.* – 2018. – V. 14. – P. 11–19.
5. Konotop V.V., Yang J.K., and Zezyulin D.A. // *Rev. Mod. Phys.* – 2016. – V. 88. – P. 035002–59.
6. Suchkov S.V., Sukhorukov A.A., Huang J.H., et al. // *Laser Photon. Rev.* – 2016. – V. 10. – P. 177–213.
7. Ozdemir B.K., Rotter S., Nori F., and Yang L. // *Nat. Mater.* – 2019. – V. 18. – P. 783–798.
8. Hodaei H., Miri M.A., Hassan A.U., et al. // *Laser Photon. Rev.* – 2016. – V. 10. – P. 494–499.
9. Ren J., Hodaei H., Harari G., et al. // *Opt. Lett.* – 2017. – V. 42. – P. 1556–1559.
10. Hodaei H., Hassan A. U., Wittek S., et al. // *Nature*. – 2017. – V. 548. – P. 187–200.
11. Smith D.D., Chang H., Horstman L., and Diels J.-C. // *Opt. Express*. – 2019. – V. 27. – P. 34169–34191.
12. Mostafazadeh A. // *J. Math. Phys.* – 2002. – V. 43. – P. 205–214.
13. Mostafazadeh A. // *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* – 2010. – V. 7. – P. 1191–1306.
14. Suchkov S.V., Fotsa-Ngaffo F., Kenfack-Jiotsa A., et al. // *New J. Phys.* – 2016. – V. 18. – P. 065005.
15. El-Ganainy R., Makris K.G., Christodoulides D.N., and Musslimani Z.H. // *Opt. Lett.* – 2007. – V. 32. – P. 2632–2634.
16. Sukhorukov A.A., Xu Z.Y., and Kivshar Y.S. // *Phys. Rev. A*. – 2010. – V. 82. – P. 043818–5.
17. Barashenkov I.V., Suchkov S.V., Sukhorukov A.A., et al. // *Phys. Rev. A*. – 2012. – V. 86. – P. 053809–12.
18. Luo X.B., Huang J.H., Zhong H.H., et al. // *Phys. Rev. Lett.* – 2013. – V. 110. – P. 243902–5.
19. Della Valle G. and Longhi S. // *Phys. Rev. A*. – 2013. – V. 87. – P. 022119–6.
20. Безпалый А.Д., Шандаров В.М., Мандель А.Е. и др. // *Изв. вузов. Физика*. – 2019. – Т. 62. – № 3. – С. 3–8.

Поступила в редакцию 27.04.2020,
после доработки – 14.05.2020.

Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия