

## ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

УДК 538.9

DOI: 10.17223/00213411/63/11/3

Е.Е. ДЕРЮГИН

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ  
С ТРЕЩИНОЙ \*

Рассматривается трещина в виде узкого выреза с определенной кривизной у вершины в неограниченной пластине. Определены характеристики напряженно-деформированного состояния (НДС) данной системы при одноосном нагружении: коэффициент концентрации напряжений, сила, вызывающая рост трещины, энергия твердого тела с трещиной. Определены затраты упругой энергии в процессе распространения трещины. Выявлены общие закономерности механического состояния твердого тела с трещиной, не обязательно в виде эллипса. Важным параметром трещины является кривизна у вершины. Показано, что в действительности у трещины Гриффитса нет сингулярности на конце разреза. НДС пластины с эллиптической трещиной идентично НДС пластины с очагом однородной пластической деформации.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, трещина, эллиптический вырез в пластине, концентрация напряжений, трещиноводящая сила, кривизна, энергия.

## Введение

Разрушение твердых тел вызвано образованием и развитием макроскопических трещин. В механике разрушения эту ситуацию схематизируют, заменяя трещину разрезом нулевой толщины. Трещина-разрез получается из эллипса при стремлении малой полуоси эллипса к нулю. В связи с этим исследование локального напряженного состояния вблизи эллиптических вырезов представляет исключительный интерес.

Впервые метод анализа напряжений в пластине с эллиптическим вырезом предложил Инглис [1]. Линейное упругое решение Инглиса для поля напряжений, окружающего эллипс, явилось важным шагом в развитии теории линейной механики разрушения. Как и решение Кирша для круглого отверстия [2], оно применяется к бесконечной изотропной пластине при одноосном растяжении. В отличие от решения Кирша, данное решение Инглиса применимо к бесконечному числу различных сценариев, соответствующих эллипсам с разными соотношениями полуосей.

Важной характеристикой эллипса является кривизна на конце его большой полуоси  $\eta = 1/r_a$ , где  $r_a$  — радиус кривизны на конце большой полуоси. Результаты численных расчетов краевых задач теории вырезов обнаруживают, что существенное влияние на смещение точек контура выреза и на концентрацию напряжений при растяжении оказывают лишь два геометрических параметра: протяженность выреза в направлении, перпендикулярном оси растяжения, и максимальная кривизна на конце выреза вдоль этого направления [3, 4]. Поэтому напряжения у вершины трещины длиной  $2a$  и кривизной  $\eta$  можно определять, рассматривая трещину в виде эллипса с большой полуосью  $a$  и малой полуосью  $b = (a/\eta)^{1/2}$ .

В предлагаемой работе трещина рассматривается как узкий вырез в неограниченной плоскости с определенной кривизной у вершины. Описывается напряженно-деформированное состояние (НДС) и определяются характеристики механического состояния данной системы при одноосном нагружении: коэффициент концентрации напряжения (ККН), движущая сила роста трещины и энергия упругой деформации. Анализируются зависимости характеристик НДС от кривизны трещины в плоскости при растяжении.

## 1. Пластина с эллиптическим вырезом при растяжении

Общее решение задачи для неограниченной пластины с эллиптическим вырезом (отверстием) при растяжении можно найти в монографии Мусхелишвили [5]. В декартовой системе координат с началом на конце большой полуоси эллипса  $a$  под действием вдоль оси  $y$  напряжения  $\sigma$  компоненты тензора напряжений вдоль оси  $x$  имеют вид

\* Работа выполнена в рамках госзадания ИФПМ СО РАН, проект III.23.1.1.

$$\sigma_x = \frac{\sigma a}{a-b} \left[ \frac{-a}{a-b} + \frac{x+a}{c} \left[ \frac{a}{a-b} - \frac{b^2}{c^2} \right] \right], \quad \sigma_y = \frac{\sigma a}{a-b} \left[ \frac{b^2}{a(a-b)} + \frac{x+a}{c} \left[ 1 - \frac{b}{a-b} + \frac{b^2}{c^2} \right] \right], \quad (1)$$

где  $c = \sqrt{x^2 + 2xa + b^2}$ ,  $b$  – малая полуось эллипса. Компонента  $d\tau_{xy} = 0$ .

Уравнения (1) характеризуют неоднородное поле напряжений вне выреза. На границе эллиптического контура происходит скачок до нуля всех компонент тензора напряжения. Зона существенной концентрации упругой энергии сосредоточена в небольшой области вблизи границы эллиптического контура. Поле напряжений (1) однозначно определяет смещения точек контура эллипса:

$$u_x = -\frac{\sigma}{E} y, \quad u_y = \frac{\sigma}{E} \left( 1 + 2\frac{a}{b} \right) x. \quad (2)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга. Можно убедиться, что граничным условиям (2) на контуре эллипса удовлетворяет однородное поле пластической деформации

$$\varepsilon_x^p = \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon_y^p = \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\sigma}{E} \left( 1 + 2\frac{a}{b} \right). \quad (3)$$

Согласно континуальной теории дефектов [6], однородное поле пластической деформации не связано с напряжениями. Это означает, что внутри эллипса напряжение  $\sigma = 0$ . Следовательно, напряженное состояние вне выреза точно воспроизводит НДС пластины с очагом пластической деформации (3).

На рис. 1 представлена схема идентичности НДС пластины с вырезом (а) и сплошной пластины с очагом пластической деформации (б). Вариант б можно рассматривать как суперпозицию однородного поля напряжения  $\sigma$  (в) и плоскости с очагом пластической деформации величиной  $\varepsilon^p = 2\sigma a/(bE)$  (г) при отсутствии каких-либо внешних сил. В последнем случае вне очага, очевидно, присутствует неоднородное поле внутренних напряжений, а внутри – однородное поле  $-\sigma$ .

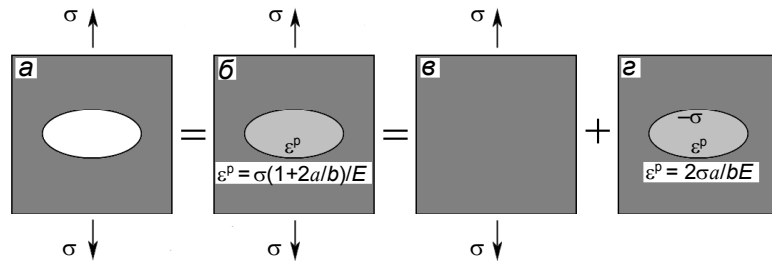


Рис. 1. Идентичность НДС для пластины с вырезом (а) и с очагом пластической деформации (б); в – однородное поле напряжения  $\sigma$ ; г – плоскость с очагом пластической деформации  $\varepsilon^p$

Значительно удобнее рассматривать поле напряжений вне выреза без учета однородного поля внешнего напряжения  $\sigma$ . Очевидно, решение (г) выделяет отдельно поле напряжений, связанное с присутствием в пластине выреза. Это дополнительное поле напряжений характеризует компонента

$$\sigma_y = \frac{\sigma a}{a-b} \left[ -1 + \frac{b}{a-b} + \frac{x+a}{c} \left[ -1 - \frac{b}{a-b} + \frac{b^2}{c^2} \right] \right]. \quad (4)$$

На конце большой полуоси эллипса наблюдается максимальная концентрация напряжения. Согласно уравнению (1) коэффициент концентрации напряжения (ККН) равен

$$k = \sigma_{y=0} / \sigma = 1 + 2a/b. \quad (5)$$

Формулу (5) используют для оценки концентрации напряжения [4]. Для круглого отверстия ( $a = b$ ), например, согласно (5),  $k = 3$ . Концентрация напряжения дополнительного поля (4) равна

$$k = 2a/b. \quad (6)$$

Сравнение показывает, что уравнение (5) отличается от уравнения (6) на единицу. Для круглого отверстия ( $a = b$ ), согласно (3),  $k = 2$ . Это отличие становится несущественным при большой величине отношения  $a/b$ .

Подставив в уравнение (3) выражение  $b = (a/\eta)^{1/2}$ , получим формулу для коэффициента концентрации напряжения трещины с кривизной  $\eta$

$$k = \sigma_y / \sigma = 2\sqrt{a\eta}. \quad (7)$$

Уравнение (7) указывает на параболическую зависимость между кривизной трещины  $\eta$  и концентрацией напряжения  $k$  при заданной величине  $a$ :

$$\eta = k^2/4a. \quad (8)$$

Распределение ККН в плоскости координат  $a - \eta$  представлено на рис. 2. Видно, что концентрация напряжения растет при увеличении как длины, так и кривизны трещины. Уравнение (8) указывает на параболическую зависимость кривизны трещины  $\eta$  от концентрации напряжения  $k$  при заданной величине  $a$  (рис. 2):  $\eta = k^2/4a$ . Аналогичная зависимость выполняется между ККН и длиной трещины  $a$  при  $\eta = \text{const}$ :  $a = k^2/4\eta$ .

Кривизна  $\eta = 10 \text{ мкм}^{-1}$  (рис. 3) соответствует радиусу кривизны  $r = 0.1 \text{ мкм}$ . При этом  $\sigma_y$  перед трещиной с полудлиной  $a = 1 \text{ мм}$  в 200 раз выше внешнего напряжения  $\sigma$  (кривая 5). Увеличение длины трещины приводит к быстрому росту концентрации напряжения. У трещины с полудлиной  $a = 25 \text{ мм}$  напряжение  $\sigma_y$  перед трещиной превосходит приложенное напряжение  $\sigma$  в 1000 раз (кривая 1).

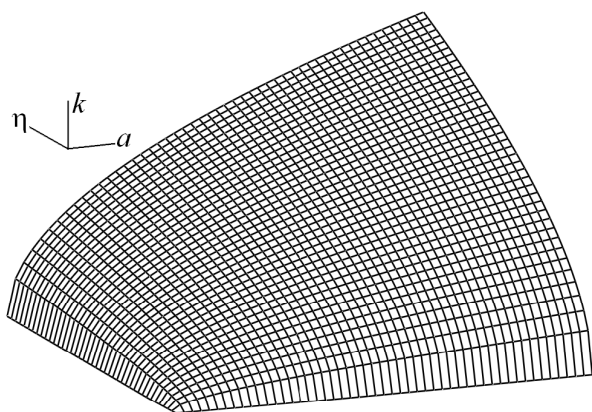


Рис. 2. Общий вид функции  $k = f(a, \eta)$

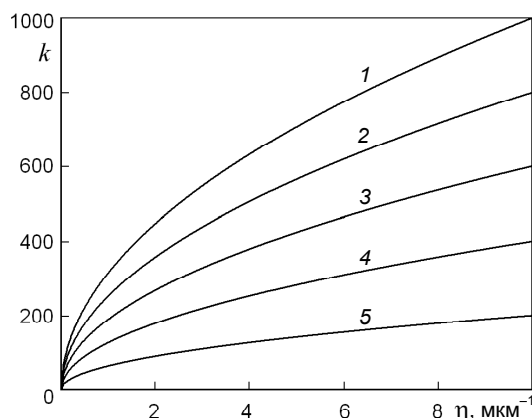


Рис. 3. Зависимости  $k$  от  $\eta$ :  $a = 25$  (кр. 1), 16 (кр. 2), 9 (кр. 3), 4 (кр. 4) и 1 мм (кр. 5)

На рис. 4 изображена поверхность  $\sigma_y$  в виде функции двух переменных: координаты  $x$  и кривизны трещины  $\eta$ . Конкретное значение кривизны  $\eta$  определяет соответствующее распределение  $\sigma_y$  впереди трещины. Ряд таких распределений изображен на рис. 5. Видно, что увеличение кривизны трещины приводит к росту концентрации напряжения у вершины трещины. Чем выше  $\eta$ , тем быстрее происходит падение напряжения вдоль оси  $x$ . Влияние кривизны существенно только вблизи вершины трещины. Например, для трещины с полудлиной  $a = 0.1 \text{ мм}$  (рис. 5) влияние кривизны несущественно уже на расстоянии  $x > 0.4 \text{ мкм}$ .

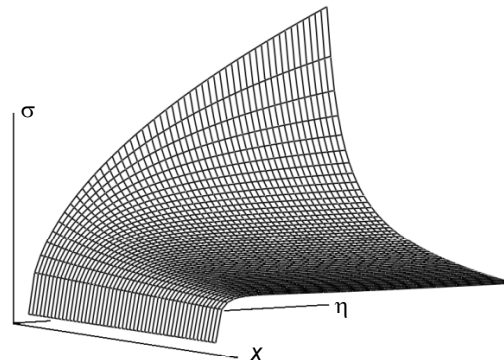


Рис. 4. Распределение функции  $\sigma_y(x, \eta)$

На рис. 6 представлены зависимости относительной величины  $\sigma_y/\sigma$  от  $\eta$  на разных расстояниях недалеко от вершины трещины. При  $x = 0$  (кривая 1) значение  $\sigma_y/\sigma$  определяет концентрацию напряжения на конце полуоси  $a$ , которая подчиняется параболической зависимости (8) (кривая 1).

Закономерность (8) выполняется только при значениях  $x = 0$ . Как видно из рис. 6, на расстоянии  $x > 0$  закон (8) нарушается.

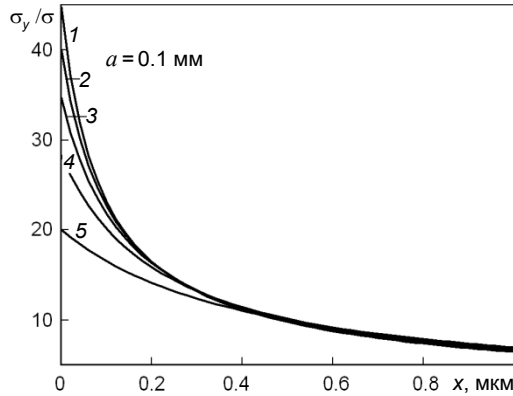


Рис. 5. Распределения  $\sigma_y/\sigma$  от  $x$  для разных  $\eta$ :  $\eta = 5$  (кр. 1), 4 (кр. 2), 3 (кр. 3), 2 (кр. 4) и  $1 \text{ мкм}^{-1}$  (кр. 5)

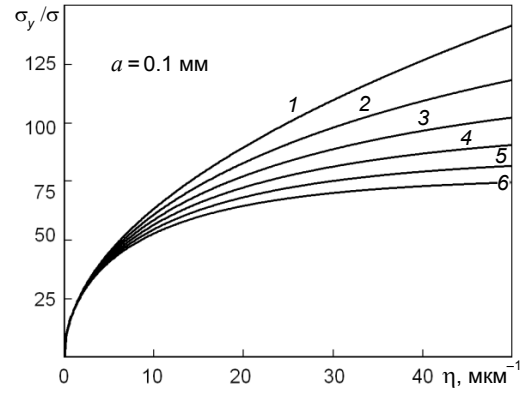


Рис. 6. Зависимости  $\sigma_y/\sigma$  от  $\eta$  для разных  $x$ :  $x = 0$  (кр. 1), 0.1 (кр. 2), 0.2 (кр. 3), 0.3 (кр. 4), 0.4 (кр. 5) и 0.5 мм (кр. 6)

## 2. Трещина Гриффитса

В основе механики разрушения твёрдых тел с трещинами лежат количественные соотношения, которые были предложены в работах Гриффитса [7], рассмотревшего трещину-разрез нулевой толщины. Принято считать, что классическая трещина Гриффитса имеет существенный недостаток – сингулярность поля напряжений в вершине трещины. Приближение к вершине вызывает неограниченный рост напряжений. Рассмотрим вопрос о сингулярности поля напряжений в твёрдом теле с трещиной Гриффитса подробнее.

В работе [8] Ирвин рассмотрел задачу о распределении напряжений в окрестности трещины Гриффитса. Он показал, что в случае трещины первого типа (трещина отрыва, когда берега трещины расходятся без сдвига) величина  $\sigma_y/\sigma$  вдоль оси растяжения у вершины трещины равна

$$\sigma_y/\sigma = \sqrt{0.5a/x}. \quad (9)$$

С другой стороны, из (1) при  $b = 0$  следует, что

$$\sigma_y/\sigma = \frac{x+a}{\sqrt{x^2 + 2xa^2}}. \quad (10)$$

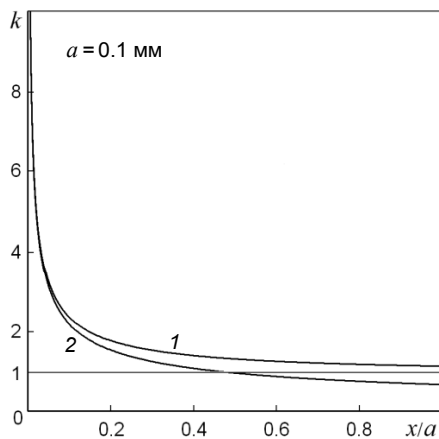


Рис. 7. Распределение  $\sigma_y$  согласно уравнениям (15) (кр. 1) и (14) (кр. 2)

На рис. 7 кривая 1 относится к распределению  $\sigma_y$ , согласно уравнению (10). Видно, что на далеких расстояниях поле напряжения  $\sigma_y$  стремится к уровню внешнего напряжения  $\sigma_y/\sigma = 1$ . Кривая 2 на рис. 7 представляет отношение  $\sigma_y/\sigma$ , согласно уравнению (9), которое, как правило, используется при анализе напряженного состояния у вершины трещины [9]. Сравнение показывает, что на близком расстоянии от вершины трещины, когда  $x$  не превышает двадцатую долю полудлины  $a$ , значения  $\sigma_y$  практически не отличаются друг от друга. Однако по мере удаления от вершины трещины кривая 2, в отличие от кривой 1, стремится не к величине внешнего напряжения  $\sigma$ , а к нулю, что противоречит действительности. На далеком расстоянии от трещины напряжение в пластине не может быть ниже внешнего напряжения. Таким образом, применение уравнений (9) ограничено условием  $x \ll a$ .

Из уравнения эллипса вытекает соотношение  $y = b[1 - (x/a)^2]^{1/2}$ . Подставив это значение в уравнение (2), получим выражение для смещений контура вдоль оси  $y$ :

$$u_y = \sigma(b+2a)[1 - (x/a)^2]^{1/2}/E. \quad (11)$$

При  $b \rightarrow 0$  получается смещение берегов трещины:

$$u_y = 2\sigma a [1 - (x/a)^2]^{1/2} / E.$$

Отсюда следует, что разрез под действием внешнего напряжения превращается в эллипс с малой полуосью  $b = 2a\sigma/E$ . Поскольку  $b \neq 0$ , то у вершины трещины нет сингулярности и в нагруженной системе наблюдается концентрация напряжения  $k = E/\sigma$ . Для гипотетического материала с трещиной длиной  $a = 1$  мм и модулем Юнга  $E = 210$  ГПа (сталь) при внешнем напряжении растяжения  $\sigma = 210$  МПа максимальное раскрытие берегов трещины Гриффитса будет равно 4 мкм, что в 250 раз меньше полудлины трещины. Напряжение в устье трещины превышает внешнее напряжение в 1000 раз.

Таким образом, сингулярности напряжения в модели трещины Гриффитса нет. Однако это не облегчает решение практических задач. При малом приложенном напряжении у вершины трещины возникает концентрация напряжения, намного превышающая предел текучести материала. Следовательно, по-прежнему существует потребность в новых моделях трещины, позволяющих выяснять причину низкой прочности реальных материалов. Прежде всего требуется учет влияния пластической деформации на НДС твердого тела с трещиной.

### 3. Упругая энергия пластины с трещиной

Найдем энергию упругой деформации пластины с эллиптическим вырезом при одноосном нагружении. Идентичность НДС пластины с эллиптическим вырезом и с очагом однородной пластической деформации позволяет определить работу внешнего напряжения на пластических смещениях. Согласно континуальной теории дефектов [6, 10], энергия поля напряжений равна энергии, рассеянной при релаксации напряжения в очаге пластической деформации, а именно

$$U = 0.5S(\varepsilon_x^p + \varepsilon_y^p)\sigma = \sigma^2 \frac{\pi a^2}{E}, \quad (12)$$

где  $S = \pi ab$  – площадь эллипса. Изменение длины трещины на  $2da$  требует затрат энергии

$$G = \frac{dU}{2da} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}. \quad (13)$$

По физическому смыслу  $G$  определяет «интенсивность высвобождения упругой энергии» при распространении трещины [11]. Величину  $G$  называют также движущей силой роста трещины. Ее размерность – энергия на единицу новой площади поверхности, возникающей при распространении трещины. Величина  $G$  является энергетической характеристикой трещиностойкости (вязкости разрушения) материала.

Силовой характеристикой трещиностойкости хрупких материалов с трещиной отрыва является коэффициент интенсивности напряжений [10]

$$K_I = \sqrt{GE} = \sigma\sqrt{\pi a}. \quad (14)$$

Выражения (13) и (14) обычно используются для определения энергетической и силовой характеристик трещиностойкости хрупких материалов с трещиной-разрезом Гриффитса. Наши расчеты показали, что эти уравнения справедливы и для трещин с любой кривизной на конце большой полуоси, не обязательно в виде эллипса.

### Заключение

Во многих работах по определению НДС пластин с вырезами и трещинами рассматриваются, в основном, аналитические методы решения задач. Главное внимание обращается на максимальную концентрацию напряжения или на энергию упругой деформации. Понятие «коэффициент интенсивности напряжений» введено как силовая характеристика трещины Гриффитса с нулевым радиусом кривизны. Влияние ненулевого радиуса кривизны на НДС твердого тела с трещиной в литературе не обсуждается достаточно подробно.

В настоящей работе рассмотрено механическое состояние пластины с трещиной в виде эллиптического выреза под действием внешнего напряжения  $\sigma$ . Трещина Гриффитса является частным случаем такой системы. Определены характеристики механического состояния пластины при одноосном нагружении: коэффициент концентрации напряжения, движущая сила роста трещины, коэффициент интенсивности напряжений. Выявлены общие закономерности механического со-

стояния твердого тела с трещиной, не обязательно в виде эллипса, с кривизной  $\eta$  на конце, а именно:

1. Концентрация напряжения подчиняется зависимости  $k = 2(a\eta)^{1/2}$ .
2. Влияние кривизны существенно лишь в непосредственной близости от трещины.
3. В действительности у трещины Гриффитса нет сингулярности на конце разреза. Под действием внешнего напряжения  $\sigma$  трещина Гриффитса превращается в эллипс с малой полуосью  $b = 2a\sigma/E$ . При этом в нагруженной системе наблюдается концентрация напряжения  $k = E/\sigma$ , где  $E$  – модуль Юнга.
4. Показано, что распределение напряжения  $\sigma_y = \sigma(0.5a/x)^{1/2}$ , которое традиционно используют при анализе НДС пластины с трещиной Гриффитса, неверно уже на расстоянии, соизмеримом с полудлиной трещины. Более точным является уравнение  $\sigma_y = \sigma(x+a)/(x^2+2xa)^{1/2}$ .
5. НДС пластины с эллиптической трещиной идентично НДС пластины с очагом однородной пластической деформации  $\varepsilon^p = \sigma(1+2a/b)/E$ .
6. Движущая сила роста трещины  $G$  и коэффициент интенсивности напряжений  $K_I$  не зависят от кривизны трещины. Поэтому известные выражения  $G = \pi\sigma^2 a/E$  и  $K_I = \sigma(\pi a)^{1/2}$ , полученные для трещины Гриффитса, можно применять как характеристики трещиностойкости материала с трещиной, не обязательно в виде эллипса, с известной кривизной у вершины.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Inglis C. E. // Trans. Inst. Naval Architects London. – 1913. – V. LV. – P. 219–230.
2. Kirsch E. G. // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. – 1898. – No. 42. – P. 797–807.
3. Келли А. Высокопрочные материалы. – М.: Мир, 1976. – 264 с.
4. Петерсон И. В. Коэффициенты концентрации напряжений. – М.: Мир, 1977. – 304 с.
5. Mushelišvili N. I. Same Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. – Noordhoff: Groningen, 1953.
6. Eshelby J. D. // Proc. Roy. Soc. London. – 1957. – A 241. – P. 376–396.
7. Griffith A. A. // Phil. Trans. Roy. Soc. London. – 1920. – A221. – P. 163–198.
8. Irwin G. R. American Soc. Metals. – Cleveland: USA, 1948. – P. 147–166.
9. Anderson T. L. Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. – 3-d ed. – NW: Taylor & Francis Group, 2005.
10. Лихачев В. А., Волков А. Е., Шудегов В. Е. Континуальная теория дефектов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.
11. Hertzberg R. W. Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials. – N.Y.: John Wiley&Sons, 1976.

Поступила в редакцию 12.02.2020.

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск, Россия