МАТЕМАТИКА

УДК 517.958
DOI 10.17223/19988621/69/1

MSC 35J10, 35J25, 46E35, 34L10

А.Р. Алиев, Ш.Ш. Раджабов

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ МАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Вводится магнитный оператор Шредингера, соответствующий обобщенной задаче Дирихле. Доказывается его самосопряженность и дискретность спектра в ограниченных областях в многомерном случае, а также базисность его собственных функций в пространстве Лебега и магнитном соболевском пространстве. Дается новая характеристика области определения магнитного оператора Шредингера. Исследуется существование и единственность решения магнитного уравнения Шредингера со спектральным параметром. Доказывается, что если спектральный параметр отличен от собственных значений, то первая обобщенная задача Дирихле имеет единственное решение. Находится условие разрешимости обобщенной задачи Дирихле при совпадении спектрального параметра с собственным значением магнитного оператора Шредингера.

Ключевые слова: магнитный оператор Шредингера, дискретный спектр, собственные значения и собственные функции, разложение по собственным функциям, теоремы существования и единственности решений.

1. Постановка задачи

Пусть G – ограниченная область в n -мерном пространстве R^n .

Рассмотрим в G магнитное выражение Шредингера

$$H_{a,V} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} + a_k(x) \right)^2 + V(x), \quad (1)$$

где $V(x)$ – вещественный электрический потенциал, $a(x) = (a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x))$ – вещественный магнитный потенциал, $i = \sqrt{-1}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$.

В пространстве $L_2(G)$ введем симметрический оператор $H_{a,V}^0$ с областью определения $D(H_{a,V}^0) = C_0^\infty(G)$, порожденный выражением (1), т.е. действующий по правилу

$$H_{a,V}^0 \varphi(x) := \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} + a_k(x) \right)^2 \varphi(x) + V(x) \varphi(x), \quad \varphi(x) \in C_0^\infty(G),$$

где $C_0^\infty(G)$ (пространство основных функций) – совокупность всех бесконечно

дифференцируемых финитных в G функций. Замыкание оператора $H_{a,V}^0$ обозначим через $H_{a,V}^D$.

Цель работы – доказать дискретность спектра оператора $H_{a,V}^D$, получить разложение по собственным функциям этого оператора и применить полученные результаты к исследованию первой обобщенной задачи Дирихле для уравнения

$$H_{a,V}^D u(x) - \lambda u(x) = f(x) \quad (2)$$

в ограниченных областях пространства R^n , где λ – спектральный параметр. Отметим, что под первой обобщенной задачей Дирихле для уравнения (2) понимаем задачу нахождения такой функции $u(x)$ из класса $\overset{o}{W}_2^1(G)$, которая удовлетворяет уравнению (2) в смысле теории обобщенных функций в области G при $f(x) \in \overset{o}{W}_2^{1,1}(G)$. Здесь через $\overset{o}{W}_2^{1,1}(G)$ обозначено сопряженное пространство к $\overset{o}{W}_2^1(G)$, являющееся замыканием пространства $C_0^\infty(G)$ в пространстве Соболева первого порядка $\overset{o}{W}_2^1(G)$.

В приложениях принципиальное значение имеет разложение по собственным функциям краевых задач для дифференциальных уравнений. В настоящее время существует несколько методов (см. [1]) доказательства полноты собственных функций. В настоящей работе доказывается полнота собственных функций оператора $H_{a,V}^D$ методом Грина.

2. Основные результаты

В пространстве $\overset{o}{W}_2^1(G) \times \overset{o}{W}_2^1(G)$ с помощью выражения (1) определим полуторалинейную форму

$$h_{a,V}(u, v) = \sum_{k=1}^n \int_G \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + i a_k(x) u(x) \right) \left(\frac{\partial \overline{v(x)}}{\partial x_k} - i a_k(x) \overline{v(x)} \right) dx + \int_G V(x) u(x) v(x) dx. \quad (3)$$

Обозначим через $H_{a,V}^F$ оператор, ассоциированный с формой (3).

Теорема 1. Пусть G – ограниченная область в R^n , функции $a_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, имеют непрерывные ограниченные в G частные производные первого порядка, а функция $V(x)$ – измеримая и ограниченная в G . Тогда оператор $H_{a,V}^D$ – существенно самосопряженный и справедливы равенства

$$H_{a,V}^D = H_{a,V}^F = G_\mu^{-1} + \mu E,$$

где G_μ – оператор Грина, который введен в работе [2], E – единичный оператор.

Доказательство. Существенно самосопряженность оператора $H_{a,V}^0$ следует из теоремы Ляйнфельдера – Зимадера (см. [3]). Самосопряженность оператора $H_{a,V}^F$ следует из теоремы Лакса – Мильграма (см. [4, 5] и [6, с. 16]) и теории расширения по Фридрихсу (см. [7]). Из теории расширения Фридрихса следует, что область определения оператора $H_{a,V}^F$ следующая:

$$D(H_{a,V}^F) = \left\{ \varphi(x) \in \overset{o}{W}_2^1(G) : H_{a,V} \varphi(x) \in L_2(G) \right\}.$$

Очевидно, что $H_{a,V}^D = H_{a,V}^F$, так как расширение Фридрихса $H_{a,V}^F$ является единственным самосопряженным расширением симметрического оператора $H_{a,V}^0$. В работе [8] доказано, что оператор Грина G_μ является самосопряженным оператором в пространстве $L_2(G)$. Поэтому его обратный G_μ^{-1} также будет самосопряженным. Из определения оператора G_μ (см. [2]) следует, что для любого элемента из $L_2(G)$ существует функция из $\overset{o}{W}_2^1(G)$, такая, что $G_\mu^{-1}f = H_{a,V,\mu}u$ ($H_{a,V,\mu}$ определено в работе [2]). Тем самым, область определения и действия оператора $G_\mu^{-1} + \mu E$ следующие:

$$D(G_\mu^{-1} + \mu E) = \left\{ u(x) \in L_2(G) : u(x) \in \overset{o}{W}_2^1(G), H_{a,V}u \in L_2(G) \right\},$$

$$(G_\mu^{-1} + \mu E)u = H_{a,V}u, \quad u \in D(G_\mu^{-1} + \mu E).$$

Отсюда получаем, что

$$G_\mu^{-1} + \mu E = H_{a,V}^D.$$

Следовательно,

$$H_{a,V}^D = H_{a,V}^F = G_\mu^{-1} + \mu E.$$

Теорема доказана.

В дальнейшем оператор $H_{a,V}^D$ назовем магнитным оператором Шредингера, соответствующим первой обобщенной задаче Дирихле.

Теорема 2. Магнитный оператор Шредингера $H_{a,V}^D$, соответствующий первой обобщенной задаче Дирихле, имеет чисто дискретный спектр.

Доказательство. Самосопряженность и полуограниченность снизу оператора Грина G_μ в произвольной области доказана в работе [8]. Из теоремы Реллиха (см. [9, с. 183] или [10, с. 167]) следует, что если область G – ограниченная, то оператор G_μ является вполне непрерывным оператором. Обозначим через $R_{a,V}^D(\lambda)$ резольвенту оператора $H_{a,V}^D$. Для доказательства теоремы достаточно доказать,

что оператор $H_{a,V}^D$ имеет компактную резольвенту (см. [11] или [12, с. 269, теорема XIII.64]).

Пусть λ и ν – произвольные регулярные числа оператора $H_{a,V}^D$. Тогда имеет место следующее тождество Гильберта (см. [13, с. 136]):

$$R_{a,V}^D(\lambda) - R_{a,V}^D(\nu) = (\lambda - \nu) R_{a,V}^D(\lambda) \cdot R_{a,V}^D(\nu). \quad (4)$$

Если в тождестве Гильберта (4) число ν заменить произвольным числом μ из промежутка $(-\infty, \lambda_0)$ (число λ_0 определено в работе [2]) и учесть, что $R_{a,V}^D(\mu) = G_\mu$, то получим

$$R_{a,V}^D(\lambda) - G_\mu = (\mu - \lambda) R_{a,V}^D(\lambda) \cdot G_\mu. \quad (5)$$

Из вполне непрерывности оператора Грина G_μ и равенства (5) вытекает, что оператор $R_{a,V}^D(\lambda)$ – вполне непрерывный, так как пространство вполне непрерывных операторов образует идеал. Теорема доказана.

Обозначим через $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$, собственные значения магнитного оператора $H_{a,V}^D$ и упорядочим их в порядке возрастания (с учетом их кратности)

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Из теории Фредгольма следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$.

Пусть $\varphi_k(x), k = 1, 2, \dots$, – ортонормированные собственные функции оператора $H_{a,V}^D$, отвечающие собственным значениям $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$.

Имеет место следующая

Теорема 3. Система собственных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(G)$.

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что

$$H_{a,V}^D = G_\mu^{-1} + \mu E.$$

Из этого равенства и равенства

$$H_{a,V}^D \varphi_k(x) = \lambda_k \varphi_k(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

следует, что $\varphi_k(x), k = 1, 2, \dots$, являются также собственными функциями для оператора Грина G_μ , отвечающими собственным значениям

$\left\{ \frac{1}{\lambda_k - \mu} \right\}_{k=1}^\infty$, т.е.

$$G_\mu \varphi_k(x) = \frac{1}{\lambda_k - \mu} \varphi_k(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Так как оператор Грина является вполне непрерывным положительно-определенным самосопряженным оператором, то система собственных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ полна в $L_2(G)$. Из ортонормированности и полноты следует, что система собственных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ образует базис в пространстве $L_2(G)$, т.е.

любую функцию $f(x)$ из пространства $L_2(G)$ единственным образом можно разложить по собственным функциям, т.е.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x)$$

и

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2.$$

Теорема доказана.

Используя теорему 3, дадим новую характеристику области определения оператора $H_{a,V}^D$.

Теорема 4. Для того чтобы функция $f(x) \in L_2(G)$ принадлежала области определения оператора $H_{a,V}^D$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(f, \varphi_k)|^2 < +\infty. \quad (7)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ принадлежит области определения оператора $H_{a,V}^D$. Так как $D(H_{a,V}^D) = D(G_{\mu}^{-1})$, то существует функция $g(x)$ из пространства $L_2(G)$, которая $G_{\mu}g(x) = f(x)$. Из теоремы 3 следует, что функцию $g(x)$ можно разложить по собственным функциям $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, т.е. справедливо равенство

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (g, \varphi_k) \varphi_k(x),$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(g, \varphi_k)|^2 < +\infty. \quad (8)$$

Отсюда и из равенства (6) получим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (g, \varphi_k) \frac{1}{\lambda_k - \mu} \varphi_k(x).$$

С другой стороны, имеем

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x).$$

Из базисности системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ следует, что

$$(f, \varphi_k) = (g, \varphi_k) \frac{1}{\lambda_k - \mu}. \quad (9)$$

Так как $\lambda_k \sim \lambda_k - \mu$ при $k \rightarrow \infty$, то из (8) и (9) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(f, \varphi_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(g, \varphi_k)|^2 \cdot \frac{1}{|\lambda_k - \mu|^2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} |(g, \varphi_k)|^2 < +\infty.$$

Достаточность. Пусть $f(x) \in L_2(G)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(f, \varphi_k)|^2 < +\infty.$$

Докажем, что $f(x) \in D(H_{a,V}^D)$. Положим

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^k (f, \varphi_j) \varphi_j(x).$$

Тогда

$$H_{a,V}^D f_k(x) = \sum_{j=1}^k \lambda_j (f, \varphi_j) \varphi_j(x).$$

Из (7) и теоремы 3 следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_{a,V}^D f_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f, \varphi_j) \varphi_j(x).$$

Из замкнутости оператора $H_{a,V}^D$ следует, что $f(x) \in D(H_{a,V}^D)$ и

$$H_{a,V}^D f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f, \varphi_j) \varphi_j(x).$$

Теорема доказана.

Теперь докажем, что система собственных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ магнитного оператора Шредингера $H_{a,V}^D$, соответствующая первой обобщенной задаче Дирихле, образует ортогональный базис в пространстве $W_{a,V,\mu}^1(G)$ (пространство $W_{a,V,\mu}^1(G)$ введено в работе [2]).

Справедлива следующая

Теорема 5. Система собственных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $H_{a,V}^D$ образует ортогональный базис в магнитном пространстве Соболева первого порядка $W_{a,V,\mu}^1(G)$.

Доказательство. Так как функции $\varphi_k(x)$, $k=1,2,\dots$, принадлежат области определения оператора $H_{a,V}^D$, то из теоремы 3.1 работы [2] следует, что $\varphi_k(x) \in W_{a,V,\mu}^1(G)$, $k=1,2,\dots$. Из равенства

$$\begin{aligned} (\varphi_l, \varphi_m)_{W_{a,V,\mu}^1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_G \left(\frac{\partial \varphi_l(x)}{\partial x_k} + i a_k(x) \varphi_l(x) \right) \left(\frac{\partial \overline{\varphi_m(x)}}{\partial x_k} - i a_k(x) \overline{\varphi_m(x)} \right) dx + \\ &+ \int_G (V(x) - \mu) \varphi_l(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = \int_G \left((H_{a,V}^D - \mu E) \varphi_k(x) \right) \overline{\varphi_m(x)} dx = \\ &= \int_G (\lambda_k - \mu) \varphi_k(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = (\lambda_k - \mu) (\varphi_k, \varphi_m)_{L_2(G)} \end{aligned}$$

и ортогональности системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2(G)$ следует, что если $l \neq m$, то $(\varphi_l, \varphi_m)_{W_{a,V,\mu}^1(G)} = 0$, т.е. система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональна и в пространстве $W_{a,V,\mu}^1(G)$. Так как пространство $W_{a,V,\mu}^1(G)$ плотно вложено в $L_2(G)$, то из теоремы 3 следует, что система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в пространстве $W_{a,V,\mu}^1(G)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Из теоремы 3.1 работы [2] следует, что система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $W_2^1(G)$.

Теперь, используя полученные результаты, исследуем существование и единственность решения первой обобщенной задачи Дирихле в ограниченных областях.

Теорема 6. Пусть G – ограниченная область в R^n , $f(x) \in L_2(G)$ и $\lambda \in C \setminus \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда первая обобщенная задача Дирихле имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ и число λ удовлетворяют условию теоремы. Из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2$$

и $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_k - \lambda) = \infty$ следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} (f, \varphi_k) \varphi_k(x) \quad (10)$$

сходится в пространстве $L_2(G)$. Обозначим сумму ряда (10) через $u(x, \lambda)$, т.е. положим

$$u(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} (f, \varphi_k) \varphi_k(x). \quad (11)$$

Докажем, что функция $u(x, \lambda)$, определенная по формуле (11), принадлежит пространству $W_2^1(G)$. Так как пространства $W_2^1(G)$ и $W_{a,V,\mu}^1(G)$ топологически эквивалентны (см. [2]), то достаточно доказать, что $u(x, \lambda) \in W_{a,V,\mu}^1(G)$. По теореме 5

система функций $\left\{ \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k - \mu}} \right\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в пространстве $W_{a,V,\mu}^1(G)$. Из равенства Парсеваля следует, что

$$\|u(x, \lambda)\|_{W_{a,V,\mu}^1(G)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(u, \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k - \mu}} \right)_{W_{a,V,\mu}^1(G)} \right|^2.$$

Из (11) имеем

$$(u, \varphi_k)_{L_2(G)} = \frac{1}{\lambda_k - \lambda} (f, \varphi_k)_{L_2(G)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\text{и} \quad (u, \varphi_k)_{W_{a,V,\mu}^1(G)} = \frac{\sqrt{\lambda_k - \mu}}{\lambda_k - \lambda} (f, \varphi_k)_{L_2(G)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Так как $\lambda_k - \mu \sim \lambda_k$ при $k \rightarrow \infty$, то из (12) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \cdot \frac{|(f, \varphi_k)_{L_2(G)}|^2}{|\lambda_k - \lambda|^2} < +\infty.$$

Следовательно, $u(x, \lambda) \in W_{a,V,\mu}^1(G)$.

Теперь докажем, что функция $u(x, \lambda)$ принадлежит области определения оператора $H_{a,V}^D$.

Из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2$$

и асимптотического равенства $\lambda_k^2 \sim (\lambda_k - \lambda)^2$ при $k \rightarrow \infty$ получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(u, \varphi_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \frac{|(f, \varphi_k)_{L_2(G)}|^2}{|\lambda_k - \lambda|^2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 < +\infty. \quad (13)$$

Из (13) и теоремы 4 следует, что $u(x, \lambda) \in D(H_{a,V}^D)$. Применяя оператор $H_{a,V}^D - \lambda E$ к равенству (11), получим

$$\begin{aligned} (H_{a,V}^D - \lambda E)u(x, \lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} (f, \varphi_k) (H_{a,V}^D - \lambda E)\varphi_k(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x) = f(x). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В заключение исследуем существование решения первой обобщенной задачи Дирихле для уравнения

$$H_{a,V}^D u(x) - \lambda_{k_0} u(x) = f(x), \quad (14)$$

где λ_{k_0} – один из собственных значений оператора $H_{a,V}^D$, $f(x) \in L_2(G)$.

Пусть порядок собственного значения λ_{k_0} равен p_{k_0} . Выберем ортонормированный базис $\varphi_1^{(k_0)}(x), \varphi_2^{(k_0)}(x), \dots, \varphi_{p_{k_0}}^{(k_0)}(x)$ в собственном подпространстве $L_{\lambda_{k_0}}$.

Из теории Фредгольма (см. [6, с. 30]) следует, что верна следующая

Теорема 7. А) Для того чтобы первая обобщенная задача Дирихле для уравнения (14) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была ортогональна собственным функциям $\varphi_1^{(k_0)}(x), \varphi_2^{(k_0)}(x), \dots, \varphi_{p_{k_0}}^{(k_0)}(x)$.

В) Если $f(x)$ ортогональна всем собственным функциям $\varphi_1^{(k_0)}(x), \varphi_2^{(k_0)}(x), \dots, \varphi_{p_{k_0}}^{(k_0)}(x)$, то уравнение (14) имеет бесконечно много решений вида

$$u_{k_0}(x) = \sum_{\substack{j \\ \lambda_j \neq \lambda_{k_0}}} \frac{(f, \varphi_j)}{\lambda - \lambda_j} \varphi_j(x) + \sum_{i=1}^{p_{k_0}} c_i \varphi_i^{(k_0)}(x),$$

где $c_1, c_2, \dots, c_{p_{k_0}}$ – произвольные постоянные числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Круликовский Н.Н. Пути развития спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов. Томск: ТГУ, 2008. 224 с.
2. Rajabov Sh.Sh. Generalized Dirichlet problems for magnetic Schrödinger operator // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2019. V. 45. No. 1. P. 111–118.
3. Leinfelder H., Simader C. Schrödinger operators with singular magnetic vector potentials // Math. Z. 1981. V. 176. P. 1–19.
4. Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Векторный метод конечных элементов. Новосибирск: НГТУ, 2001. 69 с.
5. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
6. Raymond N. Elements of spectral theory. Master. France, 2017. 61 p.
7. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2003. 303 с.
8. Rajabov Sh.Sh. On the existence and uniqueness of the solution of Dirichlet generalized problem in arbitrary domain of n -dimensional space R^n for magnetic Schrödinger operator // Azerbaijan Journal of Mathematics. 2020. V. 10. No. 1. P. 172–180.
9. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.
10. Adams R.A., Fournier J.J. Sobolev Spaces. Amsterdam; Boston: Academic Press, 2003. 317 p.
11. Алиев А.Р., Эйвазов Э.Х. О дискретности спектра магнитного оператора Шредингера // Функциональный анализ и его приложения. 2012. Т. 46. № 4. С. 83–85.
12. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.
13. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. 1. Харьков: Изд-во Харьковского университета, Вища школа, 1977. 318 с.

Статья поступила 25.05.2020

Aliiev A.R., Rajabov Sh.Sh. (2021) EIGENFUNCTION EXPANSIONS OF THE MAGNETIC SCHRÖDINGER OPERATOR IN BOUNDED DOMAINS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 69. pp. 5–14

DOI 10.17223/19988621/69/1

Keywords: magnetic Schrödinger operator, discrete spectrum, eigenvalues and eigenfunctions, eigenfunction expansions, theorems for existence and uniqueness of solutions.

In this work, we introduce the magnetic Schrödinger operator corresponding to the generalized Dirichlet problem. We prove its self-adjointness and discreteness of the spectrum in bounded domains in the multidimensional case. We also prove the basis property of its eigenfunctions in the Lebesgue space and in the magnetic Sobolev space. We give a new characteristic of the definition domain of the magnetic Schrödinger operator. We investigate the

existence and uniqueness of a solution of the magnetic Schrödinger equation with a spectral parameter. It is proved that if the spectral parameter is different from the eigenvalues, then the first generalized Dirichlet problem has a unique solution. We then find the solvability condition for the generalized Dirichlet problem when the spectral parameter coincides with the eigenvalue of the Schrödinger magnetic operator.

AMS Mathematics Subject Classification: 35J10, 35J25, 46E35, 34L10

Araz R. ALIEV (Doctor of Sciences on Mathematics, Professor of Azerbaijan State Oil and Industry University; Senior Research Associate of Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku city, Azerbaijan). E-mail: alievaraz@yahoo.com, alievaraz@asoiu.edu.az

Shahin Sh. RAJABOV (PhD student of Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku city, Azerbaijan). E-mail: shahin.racabov.88@mail.ru

REFERENCES

1. Krulikovskiy N.N. (2008) *Puti razvitiya spectral'noy teorii obyknovennykh differentsial'nykh operatorov*. [Ways of development of the spectral theory of ordinary differential operators]. Tomsk: Tomsk State University.
2. Rajabov Sh.Sh. (2019) Generalized Dirichlet problems. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*. 45(1). pp. 111–118.
3. Leinfelder H., Simader C. (1981) Schrödinger operators with singular magnetic vector potentials. *Mathematische Zeitschrift*. 176(1). pp. 1–19.
4. Balandin M.Yu., Shurina E.P. (2001) *Vektornyy metod konechnykh elementov* [Vector finite element method]. Novosibirsk: NSTU.
5. Gilbarg D., Trudinger N.S. (1983) *Elliptic partial differential equations of second order*. Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer-Verlag.
6. Raymond N. (2017) *Elements of spectral theory*. Access mode: <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01587623v2/document>.
7. Shubin M.A. (2003) *Leksii ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki*. [Lectures on equations of mathematical physics]. Moscow: MCCME.
8. Rajabov Sh.Sh. (2020) On the existence and uniqueness of the solution of Dirichlet generalized problem in arbitrary domain of n -dimensional space R^n for magnetic Schrödinger operator. *Azerbaijan Journal of Mathematics*. 10(1). pp. 172–180.
9. Mizohata S. (1973) *The Theory of Partial Differential Equations*. New York: Cambridge University Press.
10. Adams R.A., Fournier J.J. (2003) *Sobolev Spaces*. Amsterdam; Boston: Academic Press.
11. Aliev A.R., Eyvazov E.H. (2012) On the discreteness of the spectrum of the magnetic Schrödinger operator. *Functional Analysis and its Applications*. 46(4). pp. 305–307.
12. Reed M., Simon B. (1978) *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4: Analysis of Operators*. New York: Academic Press.
13. Akhiezer N.I., Glazman I.M. (1977) *Teoriya lineynykh operatorov v gil'bertovom prostranstve*. [Theory of linear operators in the Hilbert space]. Vol. 1. Kharkov: Izd-vo Khar'kovskogo universiteta, Vishcha shkola. 318 p.

Received: May 25, 2020